



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ С
МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

Барнаул 2023

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
с международным участием**

Фундаментальная и прикладная математика

Цифровая экономика

*Современные информационные и вычислительные
технологии в прикладных задачах*

*Информационные технологии и системы искусственного
интеллекта*

*Цифровые и информационные технологии в
профессиональном образовании*

ББК 22.1я431

М 150

Главный редактор
профессор Н.М. Оскорбин

Редколлегия:

А.И. Будкин, Д.Ю. Козлов, Г.В. Кравченко, А.А. Папин,
Е.П. Петров, Е.В. Понькина, Е.Д. Родионов, А.Н. Саженов

М 150 МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2023. – 231 с.

Выпуск содержит статьи, в которых представлены основные результаты научных исследований преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, докторантов и студентов учебных заведений. Конференция «МАК-2023» представляет собой Российско-Казахстанский проект, целью которого является активизация отношений с ВУЗами Казахстана и проведение конструктивного научного сотрудничества по важным для России и Казахстана направлениям в сфере образования и научно-исследовательской деятельности.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, прикладной математики, математического моделирования и информационных технологий в социальных, экономических, экологических системах; интенсификация междисциплинарных исследований, развитие научной активности научно-ориентированной молодежи, привлечение ее к решению актуальных задач современной науки и практики; сохранение и развитие научного потенциала Алтайского края и других регионов.

ISSN: 2687-0118

© Алтайский государственный университет, 2023

**СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА**

УДК 512.544

**Нильпотентные группы с нильпотентными n -
порождёнными нормальными подгруппами**

А.И.Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается оператор L_n , определённый на квазимногообразиях групп. Доказано, что если квазимногообразие N порождается конечной неабелевой r -группой, то множество $\{L_n(N) \mid n=1,2,\dots\}$ бесконечное.

Ключевые слова: *группа, нильпотентная группа, квазимногообразие групп, класс Леви.*

Квазимногообразие групп – это класс групп, определимый специальными формулами, называемыми квазитождествами. В этой работе изучаются группы, у которых все n -порождённые нормальные подгруппы принадлежат квазимногообразию, порождённому фиксированной неабелевой конечной нильпотентной группой.

Пусть N - класс групп, тогда через $L_n(N)$ будем обозначать класс всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle g_1, \dots, g_n \rangle^G$ любой n -порождённой подгруппы $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ группы G принадлежит N . Оператор L_n для каждого натурального числа n был введён в [1]. Оказалось [1], если M - квазимногообразие групп, то $L_n(M)$ - снова квазимногообразие групп. Возникает цепочка

$$L_1(N) \geq L_2(N) \geq L_3(N) \geq \dots, \quad (1)$$

в которой $\bigcap_{n \geq 1} L_n(N) = N$.

Эту цепочку будем называть бесконечной, если она содержит бесконечное множество различных квазимногообразий $L_n(N)$.

Данная статья посвящена изучению таких цепочек. Несложно заметить, что если квазимногообразие N имеет конечный аксиоматический ранг (т.е. задаётся системой квазитождеств от конечного числа переменных), то цепочка (1) конечная. Справедливость обратного утверждения не известна. В частности, хорошо известно, что если N - произвольное квазимногообразие

абелевых групп, то его аксиоматический ранг конечен, следовательно множество $\{L_n(N) \mid n=1,2,\dots\}$ в этом случае конечное.

К настоящему времени почти все работы по изучению классов $L_n(N)$ посвящены классам вида $L_1(N)$, называемыми классами Леви, порожденными N . Особое внимание здесь было уделено нильпотентным квазимногообразиям N групп. Подробно классы Леви изучались в [2-9].

Теорема. Если квазимногообразие N порождается конечной неабелевой p -группой, то цепочка (1) бесконечная.

Библиографический список

1. Будкин А.И. Оператор L_n на квазимногообразиях универсальных алгебр// Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 724-733.
2. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами// Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 270-277.
3. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами// Алгебра и логика. 2000. Т. 39, №6. С. 635-647.
4. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 26-41.
5. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порождённом квазимногообразием нильпотентных групп// Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 4. С. 486-499.
6. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге классов Леви// Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 587-600.
7. Shakhova S.A. The Axiomatic Rank of the Levi Class Generated by the Almost Abelian Quasivarieties of Nilpotent Groups// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 17, № 9. P. 1680-1683.
8. Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 5. С. 510-524.
9. Лодейщикова В.В., Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий нильпотентных групп экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, №. С. 77-92.

О сплетении групп автоморфизмов циклически упорядоченного и линейно упорядоченного множеств

С.В.Вараксин

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию сплетений групп порядковых автоморфизмов, циклически упорядоченных и линейно упорядоченных множеств.

Ключевые слова: *циклически упорядоченное множество, линейно упорядоченное множество, порядковые автоморфизмы, сплетение групп.*

Напомним, что непустое множество X называется циклически упорядоченным множеством (ц. у. множеством) [2], если на X определено тернарное отношение C , обладающее следующими свойствами:

C1) если $C(x, y, z)$, то $x \neq y \neq z \neq x$,

C2) если $x \neq y \neq z \neq x$, то имеет место ровно одно из отношений $C(x, y, z)$ и $C(x, z, y)$,

C3) если $C(x, y, z)$, то $C(y, z, x)$,

C4) если $C(x, y, z)$ и $C(x, z, t)$, то $C(x, y, t)$.

Если $\{X, C\}$ – ц. у. множество и f – подстановка множества X , то f называется автоморфизмом ц. у. множества $\{X, C\}$, если

C5) из $C(x, y, z)$ следует $C(f(x), f(y), f(z))$ для любых элементов $x, y, z \in X$.

Группой автоморфизмов ц. у. множества (X, C) называется любая подгруппа G группы $A(X, C)$ всех порядковых автоморфизмов ц. у. множества (X, C) , рассматриваемая как группа, действующая на X .

Пусть Y – линейно упорядоченное множество с порядком $\leq$ и H – подгруппа группы автоморфизмов $A(Y, \leq)$ линейно упорядоченного множества $(Y, \leq)$ [1].

Определим циклический порядок $C'((x_1; x_2), (y_1; y_2), (z_1; z_2))$ на декартовом произведении $X \times Y$ по правилу:

$C'((x_1; x_2), (y_1; y_2), (z_1; z_2))$, если выполнено одно из условий

a) $C(x_1, y_1, z_1)$

b) $x_1 = y_1 \neq z_1$ и $x_2 < y_2$

c) $x_1 \neq y_1 = z_1$ и $y_2 < z_2$

d) $z_1 = x_1 \neq y_1$ и $z_2 < x_2$

e) $x_1 = y_1 = z_1$ и $x_2 < y_2 < z_2$ или $z_2 < x_2 < y_2$ или $y_2 < z_2 < x_2$

Лемма 1. Отношение C' является отношением циклического порядка на декартовом произведении $X \times Y$.

Теорема 1. Групповое сплетение групп подстановок (G, X) и (H, Y) вложимо в группу порядковых подстановок $A(X \times Y, C')$ ц.у. множества $(X \times Y, C')$.

Библиографический список

1. Копытов В. М., Медведев Н. Я. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400p.
2. Тарарин В. М., О группах автоморфизмов циклически упорядоченных множеств // Сиб. матем. журн. – 2001. – № 1(42) . – С. 212–230.

.

О разрешимости свободной m -группы над свободной нильпотентной двупорожденной группой

С.В.Вараксин

АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматривается строение свободной m -группы над свободной двуступенно нильпотентной двупорожденной группой. Показывается, что данная m -группа метабелева.

Ключевые слова: решеточно упорядоченные группы, m -группы, правоупорядоченные группы, порядковые автоморфизмы, линейно упорядоченные множества.

Моноotonно упорядоченной группой, или m -группой, (G, φ) называют алгебраическую систему G с бинарными операциями $\cdot$, $\vee$ и $\wedge$, унарными операциями $^{-1}$ и φ и константой e . Она является ℓ -группой, т.е. решеточно упорядоченной группой, относительно операций $\cdot$, $\vee$, $\wedge$, $^{-1}$ и e и одноместная операция φ на ней является автоморфизмом второго порядка группы G и антиизоморфизмом решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$. Для любых элементов $x, y \in G$ выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y), & \varphi(\varphi(x)) &= x \\ \varphi(x \vee y) &= \varphi(x) \wedge \varphi(y), & \varphi(x \wedge y) &= \varphi(x) \vee \varphi(y) \end{aligned}$$

Базовые понятия и определения теории решеточно упорядоченных групп описаны в монографии [1]. Напомним, что ℓ -группа является группой по умножению и дистрибутивной решеткой и умножение дистрибутивно относительно решеточных операций

$$a(x \wedge y)b = axb \wedge ayb, \quad a(x \vee y)b = axb \vee ayb$$

При этом решеточные операции определяют на G решеточный порядок $x \leq y$ если $x \wedge y = x$ или, что то же самое, $x \vee y = y$.

Пусть G – правоупорядочиваемая группа с частичным порядком P и автоморфизмом второго порядка φ . Будем говорить, что порядок P реверсируется автоморфизмом φ , если из неравенства $x \leq_P y$ следует неравенство $\varphi(y) \leq_P \varphi(x)$, а пару (G, φ) называть частично упорядоченной (ч.у.) группой с реверсией.

Назовем также m -группу (F, φ) свободной над ч.у. группой с реверсией (G, φ) , если (G, φ) вложима в (F, φ) и любой о-гомоморфизм $\alpha_0: G \rightarrow H$ в m -группу H , устойчивый относительно φ ,

продолжается до m -гомоморфизма $\alpha: F \rightarrow H$. В частности, m -группа (F, φ) свободна над правоупорядочиваемой группой (G, φ) с автоморфизмом φ , если G вложима в F как группа и любой гомоморфизм $\alpha_0: G \rightarrow H$ в m -группу H , устойчивый относительно φ , продолжается до m -гомоморфизма $\alpha: F \rightarrow H$.

Решеточно упорядоченная группа называется метабелевой, если фактор-группа по ее наибольшему абелевому ℓ -идеалу, т.е. по абелевому радикалу, является абелевой решеточно упорядоченной группой. Монотонно упорядоченная группа метабелева, если она является метабелевой решеточно упорядоченной группой.

Пусть $N_{2,2}$ – свободная двуступенно нильпотентная группа, а (F, φ) – свободная m -группа над ней.

Теорема. Монотонно упорядоченная группа (F, φ) порождает многообразие метабелевых m -групп.

Библиографический список

1. Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400p.
2. Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. of Algebra. – 1970. – V.16. – P. 191-203.
3. Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V.49(124). – P.743-766.

Обобщенные версии алгоритмов

А.Н. Гамова

*Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов*

Статья посвящена обобщенным вычислениям с частичными оракулами, метарекурсивным системам и Σ -программированию. Для сохранения привычных свойств перечислимых множеств на оракул накладываются дополнительные требования. Метарекурсия Крипке-Платека строится на допустимых ординалах, для которых требуются оракулы со свойствами регулярности и слабой фундированности. Крайзель и Сакс строят метарекурсию для единственного ординала $\omega_1 = |T(F_\epsilon)|$, идея бесконечного перебора реализуется вычислимостью функционала E (джампа). Поэтому естественно предположить, что метарекурсия допускает описание на оракульном языке. Σ -программирование - новая концепция программирования, опирающаяся на методы математической логики, использующей Σ -формулы в языке исчисления предикатов 1-го порядка.

Ключевые слова: *обобщенные вычисления, метарекурсия, машина Тьюринга с частичным оракулом, ординал, программистские принципы,*

Большинство обобщенных систем получается, исходя из одной из известных эквивалентных версий понятия алгоритма, различающихся прежде всего языком описания (выбором средств представления) и могут быть в основном отнесены к трем типам:

- алгоритмических систем (или машин),
- исчислений (или порождающих грамматик),
- Σ -систем (или логического программирования).

Алгоритмические системы. Примером могут служить машины Тьюринга, предполагающие детерминированную направленность шагов вычислений согласно некоторому набору предписаний.

В исчислениях эффективный список правил вывода позволяет переходить от посылок к заключениям при альтернативном выборе подходящего правила (и посылок), т.е. имеют дело с недетерминированным процессом, который может порождать многозначные функции. Аналогами вычислений здесь являются

деревья вывода, как например, в эрбран-геделевском исчислении равенств.

Характерной чертой Σ -программирования является представление объектов вычисления (рекурсивных функций) не инструкциями к вычислениям, а описанием их свойств на некотором логико-математическом языке с применением аппарата математической логики для исследований как синтаксического порядка (вывод следствий из посылок), так и семантического (описание моделей языка). Известный пример Σ -представимости есть представление рекурсивно перечислимых отношений в виде Σ -формул в языке элементарной арифметики при подразумеваемой стандартной интерпретации языка. В такого рода определениях алгоритмичности понятия вычислимости (эффективности) и вычислений отчуждаются друг от друга и вычисления как бы отходят на второй план.

Языки описания хотя и накладывают на вычислительные системы неповторимую индивидуальность, не нарушают эквивалентности определяемых понятий, что как правило не сохраняется для их обобщений. Покажем это на примере обобщений эрбран-геделевского исчисления равенств и машин Тьюринга.

Эрбран-геделевское исчисление[1] можно обобщить до рекурсивности относительно произвольной частичной функции F , добавив к нему в качестве новых аксиом все равенства, образующие график F . **Тьюрингова версия относительной рекурсивности**[2] приводит к обобщенной машине с частичным оракулом F , задающей по ходу работы вопросы x , на которые оракул дает ответы $F(x)$, используемые в дальнейшей работе машины (если $F(x)$ определено), в противном случае следует безрезультатный обрыв (застывание машины). В эрбран-геделевском исчислении относительно F из способа определения вычислимости следует эквивалентность утверждений об F -вычислимости функции и F – перечислимости ее графика. Для тьюринговой версии, где в качестве F – перечислимых множеств берутся области определения F – вычислимых функций, существуют оракулы, для которых это не выполняется.

Назовем оракул F постовским, если для F -перечислимых множеств имеет место теорема Поста, т.е. по кодам F -перечислимых множеств A и $\bar{A}$ эффективно может быть найден код F -разрешимого множества A . Покажем, что непостовские оракулы существуют. Пусть F частичный оракул с областью определения $\delta F = \{2^u: u \in A\}$, и множество A не F -разрешимо. Построим оракул F' такой, $\delta = \{2^u, 3^{<u,v>} : u \in A, v \in \bar{A}\}$ и $F'(2^u) \approx F(2^u)$, $F'(3^{<u,v>}) \approx 0$, если $F'(3^{<u,v>})$ определено.

Очевидно, что множества $A, \bar{A}, F'$ – перечислимы. Возьмем продолжение $F': \mathcal{F}(2^u) \approx F'(2^u), \mathcal{F}(3^{<u,v>}) \approx 0$, если $u \in A$. Легко видеть, что $\mathcal{F} \sim F$ (взаимно вычислимы). Если множество B F' -разрешимо, т.е. его характеристическая функция χ_B – тотальная F' – вычислимая, имеющая F' -код $z \in B^*(F')$, следовательно, ее $\mathcal{F}$ – код $z' \in B^*(\mathcal{F})$ и F -код $z'' \in B^*(F)$. Таким образом, если F' – постовский оракул, то множество A F' -разрешимо, следовательно, и F – разрешимо, что противоречит условию. Функция F' F -вычислима, но ее график не F -перечислим. Но функция F' вычислима относительно F в эрбран-геделевском исчислении, где ее график также F -перечислим. Тем самым доказана эквивалентность рассматриваемых систем.

Основные программистские принципы: теорема об универсальной функции, s - m - n -теорема, теорема о неподвижной точке, верны в обеих системах. Это очевидно для тьюринговых вычислений. Для эрбран-геделевской версии, когда F тотальная функция это известно из монографии Клини, но рекурсивность относительно частичных функций там не рассматривалась. Чтобы убедиться, что клиниевский предикат $T(e, x, y)$ рекурсивен по Эрбрану-Геделю относительно F , достаточно установить перечислимость графика функции F . Введем функцию $\chi(s) = g(|F(u(s)) - v(s)|)$, где $\langle u(s), v(s) \rangle = s$, и функция g задается равенством $g(0) = 0$. Присоединим к этим равенствам рекурсивные описания функций $u(s), v(s)$ и модуля разности. Полученную систему обозначим δ_χ . Покажем, что система δ_χ в точности определяет функцию χ , являющуюся частичной характеристической функцией графика функции F . Допустим для фиксированного s : $\delta_\chi \mid - (F(u(s)) = v(s))$, тогда $\delta_\chi \mid - \chi(s) = 0$. Обратно, допустим, что для фиксированного s : $F(u(s)) \neq v(s)$ (поэтому $\langle u(s), v(s) \rangle \in$ графику F , т.е. $F(u(s)) = v(s)$ неправильное равенство) и $\delta_\chi \mid - \chi(s) = 0$. Но равенство $g(|F(u(s)) - v(s)|) = 0$ может быть получено из δ_χ по правилам R1, R2 только непосредственно из посылок $g(0) = 0, |F(u(s)) - v(s)| = 0$. Тогда, вводя в вывод рекурсивное описание модуля разности, получим $\delta_\chi \mid - F(u(s)) = v(s)$, т.е. $\langle u(s), v(s) \rangle \in$ графику F , откуда получено противоречие. Тем самым доказана перечислимость графика функции F относительно F , после чего F -перечислимость предиката $T(e, x, y)$ легко установить.

Далее заметим, что для эрбран - геделевского исчисления имеет место принцип селекции, т.е. для любой F -вычислимой функции $\varphi(z, x)$ существует F -вычислимая многозначная функция h_φ

(селекторная) такая, что $h_\varphi(z) = x \leftrightarrow (\varphi(z, x) \text{ определено})$. Достаточно положить по определению $h_\varphi(z) = x \text{ sg } (\varphi(z, x) + 1)$. Благодаря наличию селекторного свойства, если для некоторых x имеет место $\exists y T(e, x, y)$, то $h_T(e, x) = y \leftrightarrow T(e, x, y)$. Тогда $U(h_T(e, x)) F$ - вычислимая многозначная универсальная функция.

Для установления эквивалентности рассматриваемых обобщенных систем достаточно на оракул F наложить условие регулярности (возможность эффективно выбрать элемент из любого непустого F -перечислимое множества равномерно по его коду). Регулярные оракулы вообще наиболее интересны для теории вычислений с оракулом, поскольку дают близкие аналоги теорем о перечислимых множествах (в частности, теореме Поста, поэтому регулярные оракулы - постовские). Покажем, что с регулярным оракулом F из эрбран - геделевской вычислимости следует тьюрингова вычислимость функций. Действительно, график F тривиальным образом F -перечислим на машине Тьюринга с оракулом F . Если φ однозначная F - вычислимая функция с кодом e , то множество $\{h_T(e, x) : T(e, x, y)\}$ F -перечисливо в обеих версиях. В силу регулярности F из этого множества можно выбрать элемент $y = h_T(e, x)$, после чего вычислить $U(y)$. Из F -вычислимости универсальной функции следует F -вычислимость функции φ (с кодом e). Однозначность функции φ используется так, что ее значения не зависят от выбираемого вывода y . Таким образом эквивалентность систем доказана.

Σ -программирование. Наиболее глубокие абстракции и большое разнообразие обобщений дают Σ -системы [3]. Рассмотрим некоторые способы обобщений Σ -определимости, для чего удобно перейти сначала к языку теории множеств с интерпретацией на наследственно конечных множествах (HF). Если рассматривать интерпретации Σ -формул на произвольных транзитивных моделях, то Σ -формулы будут теперь соответствовать не точно рекурсивно перечислимым множествам, а некоторым близким к ним аналогам рекурсивной перечислимости. Σ -система в общем смысле задается моделью с Σ -определимыми на ней функциями. Интерес представляют не отдельные Σ -системы, а тот или иной класс однотипных Σ -систем, определяемый классом моделей, на которых выполняется некоторая система аксиом. В качестве примера возьмем счетные допустимые по Барвайсу множества, формально определяемые как стандартные модели некоторой аксиоматической системы теории множеств (системы аксиом KP). Возможности такого рода обобщений очень велики, достаточно сказать, что эта концепция включает в себя

конструктивные по Геделю множества, дескриптивную теорию множеств Лузина и ряд других. При таких обобщениях могут быть утрачены не только некоторые программистские принципы, но и само понятие вычислений.

Библиографический список

1. Kripke S. Transfinite recursion on admissible ordinals, 1, 11 (Abstracts) // J. Symbolic Logic. – 1964. – 29. – P. 161-162.
2. Гамова А.Н. Обобщенные вычисления с оракулами. // Алгебра и логика. – 1988. – Т. 27, № 2 – С. 131-147.
3. Ершов Ю.Л. Σ -допустимые множества, Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы 114), 35-39, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1986.

О классификации конечных локальных колец с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности три

Е.В. Журавлев, О.А. Филина

АлтГУ, г. Барнаул

В работе с точностью до изоморфизма классифицированы все конечные локальные кольца R характеристики $p \neq 2$ и условиями: $R/J = GF(p^r) = F$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2 = 3$, $J^3 = 0$, где J – радикал Джекобсона кольца R .

Ключевые слова: локальные кольца, конечные кольца.

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей характеристики $p \neq 2$, p – простое число, $J = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R , $R/J = GF(p) = F$ – простое конечное поле и $J^3 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2 = 3$.

Тогда

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3,$$

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ – отмеченный базис идеала J над полем F (подробнее см. [1]), причем $\{u_1, u_2\} \in J \setminus J^2$, $\{v_1, v_2, v_3\} \in J^2$. Так как $u_i v_j \in J^2$ и $u_i v_j = 0$, $v_j u_i = 0$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^1 v_1 + a_{ij}^2 v_2 + a_{ij}^3 v_3,$$

для некоторых $a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3 \in F$, $i, j = \overline{1, 2}$. Рассмотрим матрицы умножения: $A_1 = (a_{ij}^1)$, $A_2 = (a_{ij}^2)$, $A_3 = (a_{ij}^3)$, где $i, j = \overline{1, 2}$.

Доказано, что все попарно неизоморфные локальные кольца порядка p^6 , описанные выше, определяются следующими тройками матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } z \in F;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\partial \notin F^{*^2}$, $\partial \neq 0$.

Библиографический список

1. Chikunji C.J. On a Class of Finite Rings // *Communication in Algebra*. – 1999. – V. 27, №10. – P. 5049-5081.

Полиномиальная сложность слов Штурма

В.О. Кирова

МГУ им. Ломоносова, г. Москва

Статья посвящена комбинаторным сложностным характеристикам бесконечных слов, в частности слов Штурма. Вводится новое понятие - полиномиальной сложности слова, тесно связанной с комбинаторной и арифметической сложностью. Для слов Штурма мы даем верхнюю оценку полиномиальной сложности равную $O(n^{d+3})$, где d – степень полинома.

Ключевые слова: комбинаторная сложность, арифметическая сложность, полиномиальная сложность, слова Штурма.

1. Введение

Набор символов w над множеством S фиксированного конечного алфавита Σ_q , состоящего из q символов, проиндексированных элементами множества S , называется *слово*: $w = (w_i)_{i \in S}$. Слово называется *бесконечным в обе стороны*, если $S = \mathbb{Z}$:

$$w = \cdots w_{-2}w_{-1}w_0w_1w_2 \cdots$$

для всех i и $w_i \in \Sigma_q$.

Слово называется *бесконечным вправо*, если $S = \mathbb{N}$:

$$w = w_0w_1w_2 \cdots.$$

Подсловом или *фактором* слова w называется слово

$$w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n-1},$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, и обозначается как $w_{[k \dots k+n)}$.

Изучение комбинаторики на словах начинается с работ норвежского математика А. Thue [30,31] и продолжено М. Morse и G. Hedlung [15]. В своей работе [30] А. Thue поставил вопрос о существовании бесконечного слова над конечным алфавитом, в котором нет слов, состоящих из двух последовательных вхождений одинаковых подслов. Такие слова называются *квадратами*. Например, таким будет слово *ababab*, в котором есть три подряд идущих вхождения подслова *ab*. Очевидно, если алфавит бинарный, то бесконечных слов без квадратов нет. Однако А. Thue построил пример такого слова над трехбуквенным алфавитом. Полученные результаты стали основой нового направления исследований - теории избегаемости.

В 1940 году в работе [15] М. Morse и G. Hedlung ставят вопрос о множестве подслов заданной длины бесконечного слова и вводят следующее определение. *Комбинаторной (факторной) сложностью* слова w называется количество подслов длины n и обозначается $p_w(n)$. Очевидно, что $p_w(n)$ - неубывающая функция, значения которой находятся между единицей и множеством всех слов длины n : $1 \leq p_w(n) \leq q^n$. Авторы доказали, что комбинаторная сложность бесконечного слова ограничена тогда и только тогда, когда слово периодически. Более того, что комбинаторная сложность непериодического слова для всякой длины n не может быть меньше $n + 1$. Это понятие широко используется при комбинаторном изучении бесконечных последовательностей. Например, при определении топологической энтропии символьной динамической системы.

В дополнение к факторной сложности существует множество различных функций сложности: сложность Ли [4], абелева сложность [9], k -абелева сложность [14], арифметическая сложность [1], [7], максимальная шаблонная сложность [13], циклическая сложность [8], биномиальная сложность [25], оконная сложность [10], периодическая сложность [20] и т.д. Мы рассмотрим лишь некоторые из них.

Структура этой статьи следующая: разделы 2-4 посвящены словам Штурма и их комбинаторным свойствам - факторной и арифметической сложности. В разделе 5 мы вводим новое понятие - полиномиальную сложность слова, а также даем верхнюю границу для полиномиальной сложности слова Штурма.

2. Слова Штурма.

Бесконечное вправо слово $w = w_0w_1w_2 \dots$ над алфавитом $\Sigma_q = \{0,1\}$ называется *словом Штурма*, если его комбинаторная сложность $p_w(n)$ равна $n + 1$ для всех значений n .

Первые изложения были представлены J. Bernoulli, Christoeil, и А. А. Markov в книге [32]. Термин *слово Штурмана* был введен в Hedlund и Morse при развитии символической динамики [17,15,16]. Большое количество работ посвящено свойствам этих последовательностей (C.Series [27], Френкель [12], Столярский [28]). В работах Rauzy [22-24], Brown [5], Ito и Yasutomo [18] рассматривали комбинаторные свойства слов Штурма. Связь с итерационными морфизмами были рассмотрены Seebold [26] и Mignosi [19]. Слова Штурма присутствуют в таких областях как эргодическая теория [21], компьютерная графика [6] и кристаллография.

Помимо приведенного выше определения, существует несколько эквивалентных определений слов Штурма. Приведем некоторые из них.

Словом Штурма называется бесконечное вправо или в обе стороны слово, каждый символ которого задан одним из двух равенств:

$$w_i = [\alpha(i+1) + \beta] - [\alpha i + \beta], \text{ или} \\ w_i = [\alpha(i+1) + \beta] - [\alpha i + \beta]$$

где α – это *иррациональный наклон* слова Штурма, $0 \leq \beta < 1$. Оба варианта совпадают в случае, когда $\alpha i + \beta$ не является целым. Определения будут эквивалентны только в случае бесконечных вправо слов, так как не всякое бесконечное в обе стороны слово со сложностью

$n + 1$ будет словом Штурма.

Приведенное выше определение можно эквивалентным образом переписать как

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha(i+1) + \beta < \alpha \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $i \geq 0$

Например, если взять $\alpha = (\sqrt{5} + 1)/2 - 1$ и $\beta = 0$ то получится слово

$$w = 101\ 1010110110101101 \dots$$

которое называется *словом Фибоначчи*, и является классическим примером слова Штурма.

3. Комбинаторная сложность слов Штурма.

Слова Штурма - это слова минимальной факторной сложности среди непериодических слов. F. Mignosi [19] основываясь на предположение Dulucq и Gouyou-Beauchamps (1987) [11] о неоднозначности языка, доказал в 1989 году следующую важную теорему.

Теорема. *Количество подслов длины n в слове Штурмана определяется суммой*

$$1 + \sum_{i=1}^n (n - i + 1)\phi(i)$$

где $\phi(i)$ – функция Эйлера, т.е $\phi(i)$ это количество натуральных чисел, которые меньше n и взаимно простые с ним.

Доказательство этой теоремы основано на тонком анализе структуры слова Штурма. Однако в 1992 году Berstel и M. Pocchiola [3] представили доказательство формулы с использованием

геометрического двойственного метода. Метод основан на том факте, что каждое слово Штурма, заданное двумя параметрами, может быть сопоставлено с точкой на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной и той же подключенной области будут соответствовать одному и тому же слову. В этом случае области оказываются гранями плоского графа, что означает, что их число можно вычислить по формуле Эйлера. Таким образом, число всех множителей длины n Слова Штурма может быть получено как число всех связанных областей плоскости

4. Арифметическая сложность слов Штурма.

Арифметическая сложность бесконечного слова является функцией относительно его комбинаторной сложности. Она больше или равна комбинаторной сложности, поскольку учитывает не только подслова заданного слова, но и все слова, встречающиеся в его арифметической прогрессии: $w_k w_{k+d} w_{k+2d} \dots, d > 0$.

Арифметическим замыканием бесконечного слова w называется множество

$$A_w = \{w_k w_{k+d} w_{k+2d} \dots w_{k+(n-1)d} \mid k \geq 0, d > 0\}.$$

Арифметическая сложность $a_w(n)$ определяется как как совокупное число всех подслов арифметических подпоследовательностей данного слова $a_w(n) = \#(A_w \cap \Sigma_q^n)$.

Понятие арифметической сложности бесконечного слова впервые было введено в 2000 г. в работе Августиновича, Фон-Дер-Флаасса и Фрид [1]. Начало изучению арифметической сложности положили теоремы Ван дер Вардена и Семерди [29]. Эти теоремы дают ответ на вопрос о том, какие слова обязательно входят в арифметическое замыкание.

Теорема (Ван дер Варден). *Во всяком слове w существует символ a , такой что $a \in A_w$ для любого $n > 0$.*

Теорема Семерди о наличии длинных арифметических прогрессий в плотных множествах в данных терминах может быть сформулирована следующим образом.

Теорема (Семерди). *Если в слове w для некоторого символа a верхний предел отношения количества вхождений символа a в префикс слова w к длине этого префикса положителен,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|w[1..n]|}{n} > 0$$

то $a \in A_w$ для всех $n > 0$.

Слова Штурма имеют наименьшую комбинаторную сложность $p_w(n) = n + 1$ и линейно растущую арифметическую сложность. В работе [3] J. Cassaigne и А.Фрид, используя геометрический двойственный метод, который принадлежит J. Berstel и М. Roscholia [], установили верхнюю границу арифметической сложности слова Штурма, равную $O(n^3)$. Используемый метод основан на том, что каждому заданному двумя параметрами слову можно поставить в соответствие точку на плоскости, координаты которой равны параметрам слова. При определенном выборе параметров точки из одной связной области будут соответствовать одному и тому же слову. В данном случае области оказываются гранями плоского графа, а значит их количество можно посчитать по формуле Эйлера. Таким образом, верхняя оценка для количества всех арифметических подслов слова Штурма может быть получена как количество всех связных областей плоскости.

Теорема. Для всех $n > 0$ арифметическая сложность слова Штурма с наклоном $\alpha < 1/2$ удовлетворяет неравенству

$$a_\alpha(2n - 2) \geq \sum_{p=1}^n p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha \rfloor} p\phi(p) - 1/2 \sum_{p=1}^{\lfloor 1/\alpha \rfloor} p\phi(p)$$

где $\phi(i)$ – функция Эйлера.

Ясно, что функции факторной и арифметической сложности бесконечного слова не уменьшаются и растут не быстрее, чем q^n , где q – мощность алфавита. Таким образом, для любого бесконечного слова над алфавитом мощности q верно:

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq q^n.$$

5. Полиномиальная сложность

Рассмотрим полином $Q(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_1 n + a_0$, где $a_i, n \in N$, для всех $i \in \{0, \dots, d\}$ и $d \in N$. Построим с помощью полинома $Q(n)$ слово $v = v_0 v_1 v_2 \dots$, где $v_i = w_{Q(i)}, i \in Z$.

Например, если в качестве полинома рассмотреть линейную функцию $Q(n) = 2n + 1$ на слове Фибоначчи

$$w = 101\ 1010110110101101 \dots$$

то построенное слово будет иметь вид

$$v = 011101110 \dots$$

Полиномиальной сложностью слова $v = v_0v_1v_2 \dots$ будем называть комбинаторную сложность $p_v(n)$ слова v и обозначать $\mathcal{P}_w(n)$.

Ясно, что функция полиномиальной сложности бесконечного слова является неубывающей функцией и растет не быстрее, чем число возможных слов в заданном алфавите, и не медленнее, чем функции комбинаторной и арифметической сложности. Очевидно, что для любой степени многочлена d и любой длины подслова n верно:

$$1 \leq p_w(n) \leq a_w(n) \leq \mathcal{P}_w(n) \leq q^n$$

Предположение. Полиномиальная сложность слова Штурма

$$\mathcal{P}_w(n) = O(n^{d+3}).$$

Очевидно, в случае $d = 1, a_1 = 1, a_0 = 0$ имеем $\mathcal{P}_w(n) = p_w(n)$.

Библиографический список

1. Avgustinovich S. V. , Fon-Der-Flaass D. G. , Frid A. E.. Arithmetical complexity of infinite words. Proc. Words, Languages and Combinatorics III, 2000. Singapore: World Scientific, 2003. P. 51-62.
2. Berstel J., P. Seebold. Sturmian words, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words .Cambridge University Press, 2002. P. 40-97.
3. Berstel J., M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words. Int. J. Algebra and Comput., 1993, V. 3, 349 -355.
4. Bell, J. P., and Shallit, J. Lie complexity of words. Theoret. Comput. Sci. in press (2022).
5. Brown C., A characterization of the quadratic irrationals, Canad. Math. Bull. (1991), 364
6. Bresenham J. E. , Algorithm for computer control of a digital plotter. IBM Systems J. (1965), 25-30.
7. Cassaigne J., E.A. Frid. On the arithmetical complexity of Sturmian words. Theoretical Computer Science, 2007, V. 380, P.304-316.
8. Cassaigne J., Fici, G., Sciortino, M., and Zamboni, L. Cyclic complexity of words. J. Combin. Theory Ser. A 145 (2017), 36–56.
9. Cassaigne J., Richomme, G., Saari, K., and Zamboni, L. Avoiding Abelian powers in binary words with bounded Abelian complexity. Internat. J. Found. Comput. Sci. 22, 4 (2011), 905–920.
10. Cassaigne J., Kabor'e, I., and Tapsoba, T. On a new notion of complexity on infinite words. Acta Univ. Sapientiae Math. 2, 2 (2010), 127–136.

11. Dulucq S., D. Gouyou-Beauchamp. Sur les facteurs des suites de Sturm, Rapport No. I-8735, Comput. Sci., 1987.
12. Fraenkel A.S., M. Mushkin, U. Tassa. Determination of by $[n\theta]$ its sequence of differences. *Canad. Math. Bull.* (1978), 441-446.
13. Kamae, T., and Zamboni, L. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 22, 4 (2002), 1191–1199.
14. Karhumaki, J., Saarela, A., and Zamboni, L. Q. On a generalization of abelian equivalence and complexity of infinite words. *J. Combin. Theory, Ser. A* 120, 8 (2013), 2189–2206
15. Hedlund G.A. , M. Morse. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 1938, 815-866.
16. Hedlund G.A., M. Morse. Sturmian sequences. *Amer. J. Math.*, 1940.
17. Hedlund G.A., Sturmian minimal sets. *Amer. J. Math.*, 1944, 605-620.
18. Ito S., Yasutomi S., On continued fractions, substitutions and characteristic sequences, *Japan. J. Math.*, 1990, 287-306.
19. Mignosi F., On the number of factors of Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* 1991, 71-84.
20. Mignosi, F., and Restivo, A. A new complexity function for words based on periodicity. *Int. J. Algebra Comput.* 23, 4 (2013), 963–988.
21. Queffelec M., Substitution Dynamical Systems. *Spectral Analysis Lecture Notes Math.*, vol. 1294, Springer-Verlag, 1987.
22. Rauzy G., Suites a termes dans un alphabet fini, *Semin. Theorie des Nombres*, 1982-1983, 25-01,25-16, Bordeaux.
23. Rauzy G., Mots infinis en arithmetique, in :Automata on infinite words (D. Perrin ed.). *Lect. Notes Comp. Sci.* 1985, 165-171.
24. Rauzy G., Sequences defined by iterated morphisms, in :Workshop on Sequences (R. Capocellied.). *Lecture Notes Comput. Sci.*, to appear.
25. Rigo M., and Salimov, P. Another generalization of abelian equivalence: Binomial complexity of infinite words. *Theoret. Comput. Sci.* 601 (2015), 47–57.
26. Seebold P., Fibonacci morphisms and Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.* 1991, 367-384.
27. Series C., The geometry of Marhoff numbers, *The Mathematical Intelligencer* (1985), 20-29.
28. Stolarsky K., Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators. *Cand. Math.Bull.* (1976), 473-482.
29. Szemerédi E., On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arithm.* 1975. V. 27. P. 199-245.
30. Thue A., Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen. *Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl.*, Christiania, 1912.

31. Thue A., Über unendliche Zeichenreihen. Norske Vid. Skrifter I Mat. Nat. Kl., Christiania 1906. V. 7 P. 1-22. V. 10. P. 1-67.
32. Venkov A., Elementary Number Theory. Wolter-Noordho, Groningen, 1970

**Коммутативность мультипликативного векторного
пространства как условие конечной базисуемости его
тождеств**

А.В. Кислицин

Омский государственный университет

им. Ф.М. Достоевского, г. Омск; Алтайский

государственный педагогический университет, г. Барнаул

В статье найдены условия, влекущие конечную базисуемость тождеств ассоциативных мультипликативных векторных пространств.

Ключевые слова: мультипликативное векторное пространство, тождество векторного пространства, базис тождеств, конечно базисуемое пространство, бесконечно базисуемое пространство.

Пусть F – некоторое поле, $F\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра от множества свободных образующих X . Пусть далее V – векторное пространство над полем F , являющееся подпространством некоторой ассоциативной F -алгебры A . Будем называть пространство V мультипликативным векторным пространством, или векторным пространством, вложенным в алгебру A , а алгебру A – обертывающей для пространства V . Назовем многочлен $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ тождеством векторного пространства V , если $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ в алгебре A при всех $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

Совокупность многочленов $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ будем называть базисом тождеств пространства V , если все многочлены множества G являются тождествами V , и все тождества пространства V следуют из совокупности G . В случае существования конечного множества G пространство V называют конечно базисуемым (КБ-пространством). В противном случае говорят, что пространство V – бесконечно базисуемо, или не конечно базисуемо (НКБ-пространство).

В работе [1] доказано, что произвольное векторное пространство V над полем F , вложенное в ассоциативную F -алгебру и удовлетворяющее тождеству коммутативности, имеет конечный базис тождеств. В связи с этим результатом представляет интерес поиск условий, влекущих коммутативность в произвольном векторном пространстве, вложенном в ассоциативную алгебру, поскольку

фактически такие условия немедленно повлекут конечную базисуемость тождеств в таком пространстве.

В работе [2] показано, что каждое из тождеств $(xy)^n = x^n y^n$, $(xy)^n = (yx)^n$, где $n \geq 2$ – фиксированное целое число, влечет коммутативность в произвольном ассоциативном кольце нулевой характеристики с единицей. Несложно показать, что мультипликативное векторное пространство, содержащее единицу обертывающей алгебры и удовлетворяющее одному из этих тождеств, будет коммутативно.

Таким образом, с учетом сделанного выше замечания, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть F – поле нулевой характеристики, V – мультипликативное векторное пространство над полем F , вложенное в ассоциативную F -алгебру A с единицей, причем единица алгебры A лежит в V . Если пространство V удовлетворяет одному из тождеств $(xy)^n = x^n y^n$ или $(xy)^n = (yx)^n$ для фиксированного целого $n \geq 2$, то V имеет конечный базис тождеств.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00745).

Библиографический список

1. Исаев И.М., Кислицин А.В. Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52. – № 4. – С. 435–460.
2. Andrzejewski P., Glanc B. A note on the commutativity of rings // Demonstratio mathematica. – 2006. – Vol. 39. – № 2. P. 299–303.

Ациклические сжатые графы делителей нуля конечных колец с единицей

А.С. Монастырева

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена конечным кольцам с единицей, у которых сжатый граф делителей нуля является ациклическим.

Ключевые слова: *сжатый граф делителей нуля, конечное ассоциативное кольцо, делители нуля.*

Все кольца в настоящей работе ассоциативные.

В работах [1] и [2] Н. Блумфилдом и С. Викхамом было введено понятие сжатого графа делителей нуля для коммутативного кольца. Е.В. Журавлев и А.С. Монастырева расширили это понятие на некоммутативный случай в статье [3].

Введем понятие сжатого графа делителей нуля. Пусть R - произвольное кольцо, $D(R)^*$ - множество ненулевых делителей нуля этого кольца. Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$: $x \sim y \Leftrightarrow l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y)$, $x, y \in D(R)^*$, $l(x), r(x)$ - левый и правый аннуляторы элемента x . Это отношение эквивалентности задает разбиение множества делителей нуля кольца R на классы. Пусть $[x]$ - класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Граф, для которого множеством вершин являются все такие классы эквивалентности и две вершины $[x], [y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$, будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца R . Сжатый граф делителей нуля обозначается $\Gamma_-(R)$.

В работе [3] доказано, что вершины сжатого графа делителей нуля делятся на два типа. Если $x^2 = 0$, то класс эквивалентности $[x]$ - это вершина с петлей. Если $x^2 \neq 0$, то $[x]$ - это вершина без петли.

В настоящей работе мы даем полное описание конечных колец с единицей, сжатые графы делителей нуля которых не имеют циклов.

Библиографический список

1. Bloomfield N., Wickham C. Local Rings with Genus Two Zero Divisor Graph // *Communication in Algebra*. – 2010. – V. 38. – P. 2965–2980.
2. Bloomfield N. The Zero Divisor Graphs of Commutative Local Rings of Order p^3 and p^4 // *Communication in Algebra*. – 2013. – V. 41. – P. 765–775.
3. Журавлев Е.В, Монастырева А.С. Сжатые графы делителей нуля ассоциативных колец // *Сибирский математический журнал*. – 2020. – Т. 61. №1. – С. 96–106.

О строении конечномерных нильпотентных алгебр с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$.

Е.П. Петров

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию базиса и определяющих соотношений у 2-порожденной нильпотентной алгебры R над алгебраически замкнутым полем с двумя и тремя определяющими соотношениями, удовлетворяющей условию $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$.

Ключевые слова: нильпотентная алгебра, определяющее соотношение, тождество, базис.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n -мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n < 18$. Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр, порожденное всеми n -мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n \leq 6$. И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$. В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n -мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim R^2/R^3$ удовлетворяет данной гипотезе. С целью дальнейшего подтверждения данной гипотезы автором в работах [6] – [9] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R , удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N > 1$ условию: $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, с описанием ее строения, определяющих соотношений и тождеств. В частности, доказано, что такая алгебра

удовлетворяет стандартному тождеству степени $N+2$.

Из полученных автором результатов ясно, что степень тождества в алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $N > 1$, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R . В случае, когда $\dim R^2/R^3 = 3$, такой независимости уже нет. В [10] автором замечено, что для любого натурального числа k найдется 2-порожденная нильпотентная алгебра R над алгебраически замкнутым полем с одним единственным определяющим соотношением и с условием $\dim R^2/R^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени k . Интересно понять: как изменится ситуация, когда в такой алгебре будет более одного определяющего соотношения.

Заметим, что нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ является в некотором смысле опорной для дальнейшего изучения произвольных нильпотентных конечномерных алгебр, для которых $\dim R^N/R^{N+1} > 2$. При этом, для нахождения тождеств, которым удовлетворяют такие алгебры, описание их строения и изучение их определяющих соотношений является весьма важным. В [11] автором выяснены некоторые особенности строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над алгебраически замкнутым полем с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$.

Здесь мы приводим некоторую классификацию алгебр с указанными ограничениями. Имеют место следующие результаты.

Предложение 1. Пусть R – 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$ с двумя определяющими соотношениями. Тогда R изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:

(1) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	...
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	...
	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	...

Определяющие соотношения: $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$ (либо $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$), $b^3 \equiv \alpha a^3 + \gamma a^2b + \delta ab^2 \pmod{R^4}$,
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$;

(2) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	...
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	...
	b^2	b^3	b^4	b^5	...

определяющие соотношения: $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$ (либо $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$), $ab^2 \equiv \gamma a^2 b \pmod{R^4}$, $\beta, \gamma \in F$;

Предложение 2. Пусть R – 2-порожденная нильпотентная индекса N алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$ с тремя определяющими соотношениями. Тогда R изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:

(1) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\dots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\dots$
	ba	aba	a^2ba	a^3ba	$\dots$

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $ba^2 \equiv \alpha_1 a^3 + \beta_1 a^2 b + \gamma_1 aba \pmod{R^4}$,
 $bab \equiv \alpha_2 a^3 + \beta_2 a^2 b + \gamma_2 aba \pmod{R^4}$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in F$;

(2) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\dots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\dots$
	ba	ba^2	ba^3	ba^4	$\dots$
			ba^2b	ba^3b	$\dots$

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$,
 $bab \equiv 0 \pmod{R^4}$ при $N > 4$, $bab \equiv \alpha a^3 + \beta a^2 b + \gamma ba^2 \pmod{R^4}$
при $N = 4$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$;

(3) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\dots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\dots$
	ba	bab			

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$,
либо $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$, $ba^2 \equiv \alpha a^3 + \beta a^2 b \pmod{R^4}$,
либо $aba \equiv \gamma a^3 \pmod{R^4}$, $ba^2 \equiv \delta a^3 \pmod{R^4}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$;

(4) базис-таблица:

a	a^2	a^2b	ba^2b
b	ab	ba^2	
	ba	bab	

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $a^3 \equiv aba \equiv 0 \pmod{R^4}$.

Замечание. Алгебры (3) и (4) из предложения 2 удовлетворяют стандартному тождеству степени 4, что следует из результатов работы [9] и это тождество минимально. Остается пока открытым вопрос: какому минимальному тождеству могут удовлетворять оставшиеся алгебры из предложений 1, 2.

Библиографический список

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). – Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n -мерными алгебрами. – Тульский политехнический институт, Тула (1980), Деп. в ВИНТИ, № 1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. – 1986. – № 9. – С. 68-72.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов, Новосибирск, август 1989. – С. 43.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. – 1991. – т. 30, выпуск 5. – С. 540-556.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $\dim R^2/R^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 13. – С. 1052-1066.

7. Петров Е.П. Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – № 14. – С. 1153-1187.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – № 15. – С. 1048-1064.

9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия.

2019. – № 16. – С. 1981-2002.

10. Петров Е.П. О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim R^2/R^3 = 3$ // Международная конференция «Мальцевские чтения», 19–23 августа 2019 г., тезисы докладов, Новосибирск. – С. 169-170.

11. Петров Е.П. Об особенностях строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с ограничениями на $\dim R^3/R^4$ // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: «Математики – Алтайскому краю», 28-29 июня 2021 г., сборник трудов, Барнаул. – С. 30-32.

Об аксиоматическом ранге классов Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп

С.А. Шахова

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть s – натуральное число, $s \geq 2$, p – простое число, $p \neq 2$, K – произвольное неабелево квазимногообразие 2-ступенно нильпотентных групп, удовлетворяющих условиям: 1) коммутант группы имеет экспоненту p , 2) из произвольного неединичного коммутатора невозможно извлечь корень степени p , 3) каждый элемент группы, порядок которого делит p^{s-1} , лежит в центре группы, 4) любая конечная группа квазимногообразия является абелевой группой экспоненты p^s . В работе доказано, что класс Леви $L(K)$ имеет конечный аксиоматический ранг.

Ключевые слова: нильпотентная группа, квазимногообразие, класс Леви.

Обозначим через $L(M)$ – класс всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle a \rangle^G$ каждого элемента a из G принадлежит классу групп M . Класс $L(M)$ называется классом Леви, порождённым классом групп M . А.И. Будкин доказал в [1], что если M – квазимногообразие групп, то $L(M)$ – также квазимногообразие групп.

Будем использовать следующие обозначения:

N_2 – многообразие нильпотентных ступени ≤ 2 групп, которое задаётся в классе всех групп тождеством $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z] = 1)$;

s – натуральное число, $s \geq 2$, p – простое число, $p \neq 2$;

$N_{p,s}$ – квазимногообразие, которое задаётся в N_2 формулами:

$$\begin{aligned} &(\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)(x^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y] = 1), \\ &(\forall x)(x^{p^{s+1}} = 1 \rightarrow x^{p^s} = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^p = [y, z] \rightarrow [y, z] = 1), \\ &(\forall x)(\forall y)(x^{p^s} = 1 \ \& \ y^{p^s} = 1 \rightarrow [x, y] = 1), \\ &(\forall x)(x^q = 1 \rightarrow x = 1), \end{aligned}$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p .

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в N_2 :

$$H_p = gr(x, y \mid [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p,s} = gr(x, y \mid x^{p^s} = [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = gr(x, y \mid x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1).$$

Обозначим через qG – квазимногообразие, порождённое группой G . В работе [2] были изучены классы Леви $L(qH_p)$, а в работе [3] – классы Леви $L(qH_{p^s})$. Эти классы оказались заданными системами квазитождеств от бесконечного числа переменных.

В [4] доказано, что класс Леви $L(qH_{p^s})$ конечно аксиоматизируем, т.е. может быть задан конечной системой квазитождеств. В [5] установлено, что класс Леви $L(qH_p)$ имеет конечный аксиоматический ранг, т.е. может быть задан системой квазитождеств от конечного числа переменных.

В настоящей работе получен следующий результат.

Теорема. Пусть s – натуральное число, $s \geq 2$, p – простое число, $p \neq 2$, квазимногообразие K удовлетворяет условию $qH_{p,s} \subseteq K \subseteq N_{p,s}$. Класс Леви $L(K)$ имеет конечный аксиоматический ранг.

Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – № 2 (10). – С. 266–270.
2. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – № 6 (51). – С. 1359–1366.
3. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – № 1 (50). – С. 26–41.
4. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. – 2018. – № 5 (57). – С. 587–600.
5. Shakhova S.A. The Axiomatic Rank of the Levi Class Generated by the Almost Abelian Quasivariety of Nilpotent Groups // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – № 9 (41). – P. 1680–1683.

СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 514.764.227

Конформно киллинговы векторные поля на 2 – симметрическом лоренцевом многообразии

М.Е. Гнедко, Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию конформного аналога уравнения Киллинга с ограничениями, свойств конформного множителя и построению нетривиальных примеров конформно киллинговых векторных полей.

Ключевые слова: *конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k - симметрические пространства, киллинговы векторные поля, солитоны Риччи.*

Естественным обобщением киллинговых векторных полей являются конформно киллинговы векторные поля, которые играют важную роль в исследовании группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. Важное место в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике играют псевдоримановы симметрические пространства порядка k , где $k \geq 2$. Данные пространства исследованы в случаях $k = 2, 3$ Д. В. Алексеевским, А. С. Галаевым и другими [1, 2, 3, 4]. Векторные поля Киллинга и солитоны Риччи на данных пространствах изучались Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым и другими [5, 6]. В частности, было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2 – симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3 – симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако, для различных значений константы Эйнштейна, роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля. Поэтому возникает потребность в их изучении. В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на 2 – симметрических неразложимых лоренцевых

многообразиях, исследованы свойства конформного множителя конформного аналога уравнения Киллинга на них. Построены нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга на них зависит от поведения тензора Вейля.

Библиографический список

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian symmetric spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1970. – Vol. 76. № 3. – P. 585–591;
2. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – Vol. 61. № 12. – P. 2331–2340;
3. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifold // Journal of the European Mathematical Society. – 2013. Vol. 15. – P. 595–634;
4. Galaev A.S., Leistner T. Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // ESI lectures in mathematics and physics. – 2008. – P. 53–96;
5. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci solitons and killing fields on generalized Cahen–Wallach manifolds // Siberian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 60. № 5. – P. 911–915;
6. Walker A.G. On parallel fields of partially null vector spaces // The Quarterly Journal of Mathematics. – 1949. – Vol. 20. – P. 135 – 145.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 22–21–00111 псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи).

Параметрический анализ модели контроля эмбриональных стволовых клеток

В.П. Голубятников¹, Е.А. Татаринова²

¹Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,

²Новосибирский Государственный Университет,
г. Новосибирск

С помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений исследуются стационарные точки нелинейной динамической системы, моделирующей генетический контроль состояния эмбриональных стволовых клеток. Известные ранее результаты расширены на более широкие области изменения параметров этой модели.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, стационарные точки, устойчивость, математическое моделирование, генная сеть, обратные задачи идентификации параметров.

1. В работе [1] был проведён численный анализ стационарных решений семимерной динамической системы (1), моделирующей состояние эмбриональных стволовых клеток у мышей. В тех вычислительных экспериментах были зафиксированы значения всех параметров данной системы, кроме одного – параметра A , который описывает величину сигнала, активирующего основные компоненты моделируемой молекулярно-генетической системы.

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= G_1(A, u_3) - k_1 u_1; & \frac{du_2}{dt} &= G_2(A, u_3) - k_2 u_2; \\ \frac{du_3}{dt} &= m_3 u_4 u_6 - (k_3 + l_3) u_3; \\ \frac{du_4}{dt} &= l_3 u_3 + n_4 u_5 - (k_4 + m_3 u_6) u_4; & (1) \\ \frac{du_5}{dt} &= l_5 u_1 - (k_5 + n_4) u_5; \\ \frac{du_6}{dt} &= l_3 u_3 + n_6 u_7 - (k_6 + m_3 u_4) u_6; & \frac{du_7}{dt} &= l_7 u_2 - (k_7 + n_6) u_7. \end{aligned}$$

Система уравнений (1) описывает начальную стадию процесса дифференцировки эмбриональных стволовых клеток. Неотрицательные

переменные $u_j(t)$ обозначают концентрации компонент этой геной сети; здесь и далее все коэффициенты в уравнениях положительны, нелинейные монотонно возрастающие функции $G_1(A, u_3)$ и $G_2(A, u_3)$ описывают положительные регуляторные связи в этой сети и определяются ниже в (3).

В этой заметке, следуя подходам, разработанным нами в [2,3], мы обобщаем результаты работы [1] на случаи, когда значения параметров системы (1) не зафиксированы, но удовлетворяют указанным в [1] «соотношениям симметрии»:

$$k_1 = k_2; \quad k_4 = k_6; \quad k_5 = k_7; \quad l_5 = l_7; \quad n_4 = n_6, \quad (2)$$

а также аналогичным равенствам, из которых следует, что в первых двух уравнениях системы (1) положительные слагаемые совпадают:

$$G_1(A, u_3) = G_2(A, u_3) = \frac{\alpha + \beta A + \gamma u_3^2}{1 + \zeta A + \xi u_3^2}. \quad (3)$$

При выполнении условий (2), (3) поиск стационарных точек системы (1) приводит к равенству $u_4 = u_6$ и далее – к решению уравнения шестой степени

$$\frac{k_3 m_3}{k_3 + l_3} u_6^2 + k_4 u_6 = \frac{n_4 l_5}{k_1 (k_5 + n_4)} G_1(A, \mu u_6^2), \quad (4)$$

где $\mu = \frac{m_3}{k_3 + l_3}$. В любой стационарной точке характеристический многочлен матрицы линеаризации системы (1) имеет вид $P(\lambda) = -(\lambda + k_1)^2(\lambda + n_4 + k_5)^2(\lambda + k_4)Q^2(\lambda) - 2G_1' l_5 n_4 m_3 u_6 (\lambda + k_4)$; здесь $Q^2(\lambda) = (\lambda + k_4)(\lambda + k_3 + l_3) + 2(\lambda + k_3)m_3 u_6$ и производная G_1' монотонно возрастающей функции $G_1(A, \mu u_6^2)$ вычислена в стационарной точке.

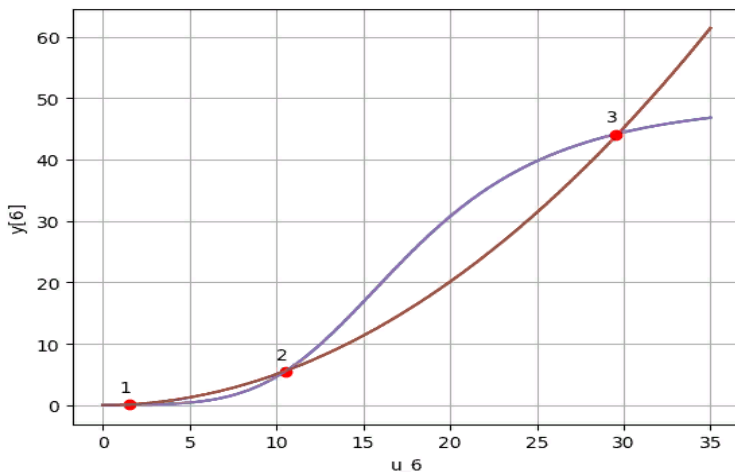


Рисунок 1 – Решения уравнения (4)

Следовательно, если эта производная G'_1 достаточно мала – как для первой и третьей (крайних) стационарных точек системы (1) на рисунке 1 при $A = 0,028169$, то у всех корней характеристического многочлена $P(\lambda)$ вещественные части отрицательны, и соответствующая стационарная точка оказывается устойчивой.

Если уравнение (4) имеет три положительных решения, то вторая точка пересечения графиков левой и правой частей уравнения (4) $y = \frac{k_3 m_3}{k_3 + l_3} u_6^2 + k_4 u_6$ и $y = \frac{n_4 l_5}{k_1(k_5 + n_4)} G_1(A, \mu u_6^2)$, см. рисунок 1, по сугубо топологическим причинам определяет неустойчивую стационарную точку, см. [4].

Как было отмечено в [1], при достаточно больших значениях параметра A графики левой и правой частей уравнения (4) имеют только одну точку пересечения, и в ней значение переменной $u_6 = u_4$ велико; такая точка пересечений графиков соответствует устойчивой стационарной точке системы (1). При увеличении параметра A первая и вторая точки пересечения этих графиков «сокращаются», как это происходит в теории особенностей гладких отображений и в теории Морса.

2. Дальнейшая кинетика моделируемых процессов описывается в работе [1] системой из трёх уравнений:

$$\frac{dv_1}{dt} = L(u_3, v_2) - k_8 v_1; \quad \frac{dv_2}{dt} = l_9 v_3 - k_9 v_2;$$

$$\frac{dv_3}{dt} = l_{10}v_1 - (l_9 + k_{10})v_3, \quad (5)$$

в которой рациональная функция

$$L(u_3, v_2) = \frac{1+b_3u_3^2}{1+b_6u_3^2+(b_7+b_8u_3^2)v_2^h}$$

монотонно убывает по переменной v_2 и описывает отрицательную регуляторную связь в генной сети. Здесь показатель степени h принимает значения от 2 до 6 и характеризует нелинейность этих процессов, все остальные параметры динамической системы (5) зафиксированы. Зафиксировано также и значение переменной $u_3 = \mu u_6^2$, это третья координата соответствующей устойчивой стационарной точки исходной системы (1).

Теорема 1. Для произвольной монотонно убывающей гладкой функции $L(u_3, v_2)$, а также для любых положительных значений u_3 и остальных параметров, система (5) имеет единственную стационарную точку.

Согласно известному критерию Вышнеградского, необходимым и достаточным условием устойчивости этой стационарной точки является неравенство: $(-L')l_{10} + k_8k_9(l_9 + k_{10}) <$

$$< (k_8 + k_9 + l_9 + k_{10})(k_8k_9 + (k_8 + k_9)(l_9 + k_{10})).$$

Здесь $-L' > 0$ поскольку функция L монотонно убывает.

Таким образом, в широком диапазоне значений параметров каждая устойчивая стационарная точка динамической системы (1) однозначно определяет как стационарную точку системы (5), так и течение моделируемых процессов в целом. Биологические интерпретации устойчивых состояний этих систем уравнений и результатов вычислительных экспериментов изложены в [1]. Около неустойчивых стационарных точек решения подобных систем могут осциллировать, см. [3].

Авторы выражают искреннюю благодарность И.Р.Акбердину и Н.А.Колчанову за полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках Гос. Задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0009.

Библиографический список

1. Akberdin I.R., Omelyanchuk N.A., Fadeev S.I., Leskova N.E., Oschepkova E.A., Kazantsev F.V., Matushkin Yu.G., Afonnikov D.A.,

- Kolchanov N.A. Pluripotency gene network dynamics: System views from parametric analysis // PLoS ONE – 2018. –V.13, № 3. – e0194464.
2. Golubyatnikov V.P., Mjolsness E., Gaidov Yu.A., Topological index of the *p53-MDM2* circuit // Вестник ВОГИС – 2009. – Т. 13, № 1. – С. 160 – 163.
 3. Akinshin A.A., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P., Kirillova N.E., Podkolodnaya O.A., Podkolodnyy N.L. On a numerical model of a circadian oscillator // Numerical Analysis and Applications. – 2022. – V. 15, № 3. – P. 187 – 196.
 4. Милнор Дж. Теория Морса. – М.: ЛКИ, 2011. – 184 с.

**Задача об охране картинной галереи на поверхности
выпуклого многогранника**

*А.В. Гринкевич, Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию задачи об охране картинной галереи в случае, когда ее план представлен в виде выпуклого многогранника. Проводится обзор известных ранее результатов, а также описан алгоритм и приведен псевдокод основных процедур, применяемых для его реализации.

Ключевые слова: *вычислительная геометрия, максимальное паросочетание, алгоритм расстановки охранников, задача об охране картинной галереи.*

На сегодняшний день задача об охране картинной галереи является хорошо изученной задачей видимости в области вычислительной геометрии [1], которая возникает в реальном мире как задача охраны интерьера художественной галереи минимальным числом охранников, наблюдающих за всеми ее залами. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, а охранник – точкой внутри него.

Известно достаточно много модификаций данной задачи, одной из которых посвящена эта работа. В данной работе осуществляется переход к трехмерному аналогу исходной задачи, т.е. план картинной галереи представлен в виде выпуклого многогранника, а охранник (средство наблюдения), расположенный в его вершине – точкой, а также приводится доказательство теоремы, которая дает оценку минимального числа охранников для наблюдения за поверхностью. Область видимости охранника ограничена поверхностью трехмерного объекта наблюдения. Необходимо оценить, какое наименьшее количество охранников (средств наблюдения) иногда необходимо и всегда достаточно для того, чтобы вся поверхность многогранника находилась под присмотром.

Единственная нетривиальная теорема об охране картинной галереи, известная для трехмерного случая, касается особого случая внешней видимости для охранников, ограниченных поверхностью выпуклого

многогранника. Эквивалентная задача в размерности 2 тривиальна: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ охранников всегда необходимо и достаточно для защиты внешней части выпуклого многоугольника.

Пусть дан выпуклый многогранник в R^3 , V , E и F - количество его вершин, ребер и граней соответственно. Установим зависимость между F и минимальным числом охранников, которых нужно поставить в вершины многогранника так, чтобы они наблюдали всю поверхность.

Дальнейшие результаты получены с помощью паросочетаний в двойственном графе многогранника. Нам понадобится следующая теорема Нишизеки о размере максимального паросочетания в плоских графах.

Лемма (Нишизеки) [2]. Если G – k -связный планарный граф на n вершинах, с минимальной степенью вершины $\delta \geq 3$ и $k \geq 2$, тогда для всех $n \geq 14$ количество ребер в максимальном паросочетании G больше или равно $\left\lceil \frac{n+4}{3} \right\rceil$, а для всех $n < 14$ количество ребер равно $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Нишизеки получил много схожих результатов для различных значений δ и k , все из которых являются наилучшими (Нишизеки и Байбарс 1977; Нишизеки 1977 [3]). Далее, приведем доказательство теоремы о картинной галерее.

Теорема (Грюнбаум и О'Рурк, 1983). $\lfloor (2F - 4)/3 \rfloor$ вершинных охранников иногда необходимо и всегда достаточно, чтобы поверхность выпуклого многогранника из F граней ($F \geq 10$) находилась под присмотром.

Доказательство данной теоремы представлено в работе 4.

Приведенная выше теорема показывает, что построение алгоритма расстановки охранников картинной галереи, представленной выпуклым многогранником, сводится к поиску максимального паросочетания в двойственном графе выпуклого многогранника.

Для решения поставленной задачи можно применить один из уже известных алгоритмов, а именно алгоритм Эдмондса, вычислительная сложность которого составляет $O(n^3)$.

Основная идея алгоритма Эдмондса состоит в сжатии циклов нечетной длины, если они есть, в исходном двойственном графе G многогранника P в псевдо-вершину. Данная процедура называется сжатием цветка (под цветком понимается цикл нечетной длины). В полученном псевдо-графе $\bar{G}$ ищется увеличивающаяся цепь, т.е. такая чередующаяся цепь, в которой первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию, с помощью обхода в ширину. После этого цветки разворачиваются. Таким образом осуществляется

обратный переход к исходному графу и восстановление увеличивающейся цепи в нем. Псевдокод основных процедур, необходимых для реализации данного алгоритма, представлен ниже.

edmonds_blossom_algorithm:

количество паросочетаний равно 0

for u in range(self.V):

if текущая вершина не содержит смежную ей в паросочетании

then строить путь

find_augmenting_path:

обход в ширину:

v = текущая_вершина

перебрать все рёбра из v

if обнаружили цикл нечётной длины

then сжать его

if пришли в свободную вершину

if пришли в несвободную вершину

then добавить в очередь смежную ей в паросочетании.

Пример работы алгоритма представлен на рисунке 1.

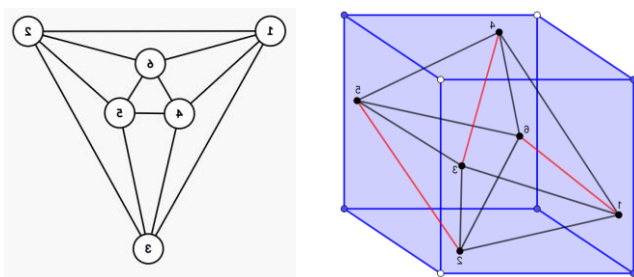


Рисунок 1. Пример работы алгоритма в случае куба

Возможно, данный алгоритм недостаточно быстр. Дальнейшие исследования будут посвящены оптимизации алгоритма Эдмондса поиска максимального паросочетания в двойственном графе выпуклого многогранника.

Библиографический список

1. O'Rourke, Joseph. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press. — 1987.

2. T. Nishizeki, Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report — 1977.
3. T. Nishizeki, I. Baybars, Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report — 1977.
4. O'Rourke, Joseph. An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem // Journal of Geometry, vol. 21. — 1983. — C. 119 — 130.
5. Balinski M. L. On the graph structure of convex polyhedral in n -space // Pacific Journal of Mathematics. — 1961.

Алгоритм Махмуда в секторной интервальной арифметике с центральной формой записи

В.С. Дронов

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена алгоритмам операций в комплексной секторной интервальной арифметике. Показываются проблемы существующих алгоритмов и предлагается улучшение с использованием центральной формы записи.

Ключевые слова: *интервальный анализ, секторная арифметика, комплексные интервалы, математическое моделирование.*

Переход от действительных переменных к комплексным является естественным в достаточно широком круге практических задач. Типовыми примерами этого являются комплексные экспоненты в случае теории колебаний и волн. Другим примером являются аналитические функции отклика в весьма общем случае: при наличии физической системы, подвергаемой малому внешнему воздействию, с минимальным количеством допущений для функции отклика удобно записывается связь между действительной и мнимой частью. Примеры задач подобного плана можно видеть, например, в [1] и [2] (где приводятся задачи из термодинамики и мезомеханики). При подходе, наоборот, со стороны свойств модели, поле $\mathbb{C}$ оказывается удобнее с точки зрения описания устойчивости и сходимости. Удобным оказывается применение комплексных экспонент и для моделей, где требуется, чтобы функция имела постоянный модуль (например, для описания вероятностей), но ненулевую производную.

Столь же естественным с практической стороны является и интервальный подход: ситуация, когда у нас нет точных значений для некоторых величин, но при этом мы с высоким уровнем надёжности можем указать границы для них. К сожалению, для комплексных величин понятие естественности тут размывается за счёт соображений выбора базового объекта. Так, если важен модуль отклонения, то за интервал естественно брать круг на комплексной плоскости (все элементы, мало отклоняющиеся от центра), если роль играет запись числа в алгебраической форме, то интервалами естественно становятся прямоугольники на комплексной плоскости, если же рассматривать

комплексные числа в показательной форме (что удобно для колебаний), то базовым объектом естественно выбирать сектор на ней же. Основным объектом данной работы является именно последний. Множество подобных объектов далее будет называться IC_{sec} . Более формально: если задать определяющий радиусы интервал неотрицательных действительных чисел $\mathbf{r}$ (жирным шрифтом здесь и далее обозначаются интервалы), и задающий углы интервал Φ действительных чисел не шире 2π (как правило, для всех элементов берётся конкретный промежуток; например в [1] – от 0 до 2π), то секторным интервалом будет

$$\langle \mathbf{r}, \Phi \rangle = \{z \in \mathbb{C}: z = re^{i\varphi}, r \in \mathbf{r}, \varphi \in \Phi\}$$

С вычислительной точки зрения элемент IC_{sec} задаётся четырьмя действительными числами.

Меньшее удобство интервалов в комплексных арифметиках по сравнению с действительными определяется свойствами арифметических операций в комплексном случае. Ни в одной из интервальных арифметик с упомянутыми выше базовыми объектами все арифметические операции разом не являются "удобными", то есть имеется операция, для которой множество поточечных результатов операции над представителями входных интервалов не является интервалом данной арифметики, и приходится вводить минимальный содержащий его интервал-оболочку:

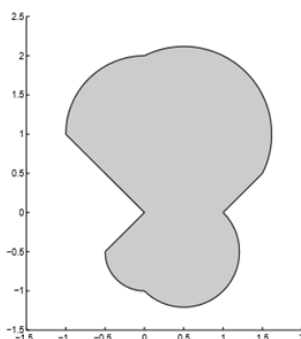


Рисунок 1– Пример точного множества для частного представителей двух прямоугольных комплексных интервалов, явственно не являющийся прямоугольником. Рисунок взят из [3].

Точно так же проблемой для комплексных интервалов является связь действительных и мнимых частей при арифметических операциях и вхождения в формулы операций тригонометрических функций, из-за чего уже в простейших случаях пропадает монотонность. В действительной интервальной арифметике для арифметических операций экстремальные значения результатов достигаются на крайних точках входных интервалов, в случае IC_{sec} (и, вообще говоря, других комплексных интервальных арифметик) это неверно:

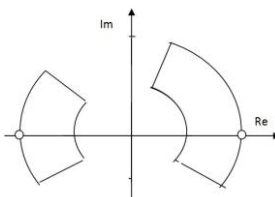


Рисунок 2– Два секторных интервала. Сумма выделенных значений в каждом даст 0, то есть ниже возможное значение радиуса для сектора-суммы. Ни одна комбинация угловых точек секторов при этом не даёт чисел с нулевым модулем.

Всё это приводит к необходимости более сложных алгоритмов работы с базовыми объектами в каждой комплексной интервальной арифметике, нежели в действительной.

Алгоритмы для арифметики для IC_{sec} изначально были введены в [1]. В случае IC_{sec} произведение секторов не требует взятия оболочки, а потому не нуждается в добавочных алгоритмах, но сумма Минковского для двух элементов IC_{sec} не является сектором. Для определения параметров интервала-оболочки в цитируемой работе приводятся четыре алгоритма, выдающих четыре параметра интервала-результата. В качестве параметров, описывающих элемент IC_{sec} авторами [1] выбрана форма $\langle r_i^-, r_i^+, \varphi_i^-, \varphi_i^+ \rangle$, которую здесь и далее будем называть граничной. В статье [4] автором данной работы было замечено, что граничная форма записи неудобна по нескольким причинам, что в неявной форме отмечалось и самими авторами [1] – например, два алгоритма для определения $\varphi \min$ и $\varphi \max$ интервала-результата фактически представляют собой две мало отличающиеся вариации на одну и ту же тему. В [4] была предложена альтернатива в виде центральной формы записи. В этом случае четыре параметра элемента IC_{sec} задаются в виде $\langle \text{mid } r, \text{rad } r, \text{mid } \varphi, \text{rad } \varphi \rangle$. Здесь под

оператором mid понимается взятие середины соответствующего интервала (то есть полусуммы его концов), а под rad – взятие половины ширины этого интервала. В случае, если интервал φ представляет собой полное кольцо (т.е. $rad \varphi = \pi$), за $mid \varphi$ принимается 0.

Обратно:

$$r^{\pm} = mid r \pm rad r, \varphi^{\pm} = mid \varphi \pm rad \varphi$$

В алгоритмах [1] интервалы подразумеваются корректно заданными, то есть φ^{-} подразумевается углом от 0 до 2π , граница φ^{+} – превышающей φ^{-} , но отличающейся не более, чем на 2π . (В случае, если секторный интервал пересекает действительную ось на комплексной плоскости, верхняя граница может превышать 2π и, вообще говоря, быть сколь угодно близкой к 4π).

Симметричность центральной формы записи, как было показано в [4], позволяет сократить неизбежный перебор крайних значений в алгоритме определения параметров оболочки, исключая часть ветвей алгоритма. Соображения, приводящие к упрощению двух из четырёх алгоритмов работы с оболочкой, по сравнению с вариантом из [1], и оценки масштабов улучшения даны в [4], ниже приводится только псевдокод для этих двух алгоритмов:

Входными данными являются два секторных интервала,

$$S_i = \langle mid r_i, rad r_i, mid \varphi_i, rad \varphi_i \rangle.$$

Выходные данные для каждого алгоритма – одно число, соответствующий параметр для $S_1 + S_2$.

$$\text{Функция } \rho(r_1, r_2, \alpha) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \alpha}$$

Угловым зазором между S_1 и S_2 далее называется величина

$$Zz_{\varphi}(S_1, S_2) = |mid \varphi_2 - mid \varphi_1| - rad \varphi_1 - rad \varphi_2$$

Аналогичная величина $Zz_r(S_1, S_2)$ с заменой φ на r далее называется радиальным зазором.

Алгоритм 1: $R^+(S_1, S_2)$

1. if $Zz_{\varphi}(S_1, S_2) \leq 0$, return $\rho(r_1^+, r_2^+, 0)$
2. if $0 < Zz_{\varphi}(S_1, S_2) < \pi$, return

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \rho(r_1^+, r_2^+, \text{sgn}(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)), \\ \rho(r_1^-, r_2^+, \text{sgn}(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)), \\ \rho(r_1^+, r_2^-, \text{sgn}(mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_{\varphi}(S_1, S_2)) \end{array} \right\}$$

3. else return

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(r_1^+, r_2^+, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left(r_1^-, r_2^+, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^+, r_2^-, Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left(r_1^+, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \rho \left(r_1^+, r_2^-, -Zz_\varphi (S_1, S_2) \right) \end{array} \right\}$$

АЛГОРИТМ 2: R- (S_1, S_2)

1. if $r_1^+ / r_2^- \leq 1$ swap (S_1, S_2)
2. if $0 \leq \pi - Zz_\varphi (S_1, S_2) \leq 2\text{rad } \varphi_1 + 2\text{rad } \varphi_2$
if $Zz_r (S_1, S_2) \leq 0$ return 0
else return $\rho(r_1^-, r_2^+, \pi)$
3. if $-\pi < Zz_\varphi (S_1, S_2) < 0$, return

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(r_1^-, r_2^+, \text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, r_2^-, \text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos \left(\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, \right. \\ \left. \frac{\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2)}{\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2)} \right), \\ \rho \left(\frac{-r_2^-}{\cos \left(\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2) \right)}, r_2^-, \right. \\ \left. \frac{\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2)}{\text{sgn} (mid \varphi_2 - mid \varphi_1) Zz_\varphi (S_1, S_2)} \right) \end{array} \right\}$$

$$4. \quad \text{else return} \quad \min \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(r_1^-, r_2^+, Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, r_2^-, Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(Zz_\varphi(S_1, S_2))}, Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(\frac{-r_2^-}{\cos(Zz_\varphi(S_1, S_2))}, r_2^-, Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, r_2^+, -Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(r_1^-, \frac{-r_1^-}{\cos(-Zz_\varphi(S_1, S_2))}, -Zz_\varphi(S_1, S_2) \right), \\ \rho \left(\frac{-r_2^-}{\cos(-Zz_\varphi(S_1, S_2))}, r_2^-, -Zz_\varphi(S_1, S_2) \right) \end{array} \right\}$$

Что касается двух оставшихся алгоритмов из [1], определяющих угловые границы оболочки, то И. Махмуд в [5] указывает на некорректность получаемого через них результата:

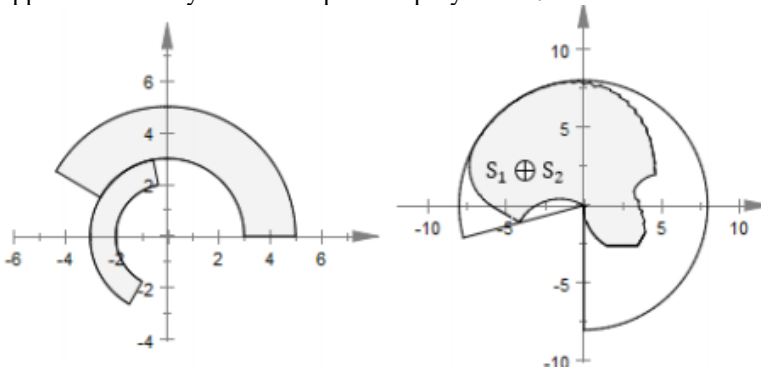


Рисунок 3 – Пример из [5], показывающий два секторных интервала и множество Минковского их суммы.

В граничной форме записи S_1 и S_2 с рисунка 3 имеют вид $\langle 2, 3, \frac{5\pi}{9}, \frac{4\pi}{3} \rangle$ и $\langle 3, 5, 0, \frac{5\pi}{6} \rangle$. Алгоритмы из [1] выдают оболочку в виде $\langle 0,$

8, 0,4, 3,4034 >. Как видно, алгоритмы для угловых границ интервала-оболочки не показывают наличие точек в четвёртой четверти.

В той же статье [5] предлагаются исправленные алгоритмы для определения угловых границ.

Их псевдокод в наших обозначениях приводится ниже.

Входными данными являются два секторных интервала,

$$S_i = \langle r_i^-, r_i^+, \varphi_i^-, \varphi_i^+ \rangle.$$

(Стоит отметить, что в [5] границы для φ^- задаются от $-\pi$ до π , а не от 0 до 2π , как в [1]. Для обобщения далее это несущественно).

$$\theta(r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2) = \arctg\left(\frac{r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2}\right)$$

При этом, если $r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 = 0$,

$$\theta = \operatorname{sgn}(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2) \frac{\pi}{2}$$

Под $\operatorname{int} x$ (где x - интервал) подразумевается внутренняя область интервала, т.е. все точки, кроме граничных.

Модуль в пункте 4 понимается в интервальном смысле – как ширина интервала.

Алгоритм 3 (Алгоритм Махмуда Φ - (S_1, S_2)).

1. if $0 \in \operatorname{int}(S_1 + S_2)$ return 0
2. else if $\operatorname{int} r_1 \cap \operatorname{int} r_2 = \emptyset$
begin
if $\sin(\varphi_1^+ - \varphi_2^+) < 0$ then return $\min\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$
else
return $\min\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-),$
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$
end
3. else if $r_1^+ = r_2^-$
if $\varphi_2^- \in \operatorname{int}(\varphi_1) \pm \pi k$ then
begin
$$\varphi_1^* = \varphi_2^- + \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi \pm \pi k$$

return $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-),$

```

end
else begin
  if  $\sin(\varphi_1^+ - \varphi_2^+) < 0$  then return  $\min\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
  else
    return  $\min\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-),$ 
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
  end
4. else if  $|\theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi_1^-, \varphi_2^-) - \theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi_1^+, \varphi_2^-)| > \pi$  then return 0
5. else if  $(\varphi_1^- < \varphi_2^- + \arctg(\frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+}) + \pi + 2\pi k < \varphi_1^+)$  and
 $(\sin(\varphi_1 - \varphi_2^+) < 0)$  then
  begin

$$\varphi_1^* = \varphi_2^- + \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi \pm \pi k$$

    return  $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-),$ 
  end
  else begin
    if  $\sin(\varphi_1^+ - \varphi_2^+) < 0$  then return  $\min\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    else
      return  $\min\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-),$ 
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    end
  end

```

Алгоритм 4 (Алгоритм Махмуда $\Phi + (S_1, S_2)$).

1. if $0 \in \text{int}(S_1 + S_2)$ return 2π
2. else if $\text{int } r_1 \cap \text{int } r_2 = \emptyset$

```

begin
  if  $\sin(\varphi_1^- - \varphi_2^-) \geq 0$  then return  $\max\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^+), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
  else

```

```

return           $\max\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
end
3.  else if  $r_1^+ = r_2^-$ 
    if  $\varphi_2^- \in \text{int}(\varphi_1) \pm \pi k$  then
    begin
 $\varphi_1^* = \varphi_2^+ - \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi \pm \pi k$ 
    return  $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-),$ 
    end
    else begin
    if  $\sin(\varphi_1^- - \varphi_2^-) \geq 0$  then return  $\max\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^+), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    else
    return           $\max\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    end
4.  else if  $|\theta(r_1, r_2, \varphi_1^-, \varphi_2^+) - \theta(r_1, r_2, \varphi_1^+, \varphi_2^+)| > \pi$  then return  $2\pi$ 
5.  else if  $(\varphi_1^- < \varphi_2^- + \arctg(\frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+}) + \pi + 2\pi k < \varphi_1^+)$  and
 $(\sin(\varphi_1 - \varphi_2^+) < 0)$  then
    begin
 $\varphi_1^* = \varphi_2^+ - \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi \pm \pi k$ 
    return  $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-),$ 
    end
    else begin
    if  $\sin(\varphi_1^- - \varphi_2^-) \geq 0$  then return  $\max\{\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^+), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    else
    return           $\max\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+),$ 
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\}$ 
    end
end

```

Как можно заметить, алгоритмы 3 и 4 структурно полностью одинаковы. Собственно, это ожидаемо из геометрического смысла арифметических операций на комплексной плоскости. В центральной форме записи поиск максимума и минимума будет отличаться, фактически, лишь направлением поворота.

Снятие проблем с неточностями определения углов оборачивается в предложенных в [5] алгоритмах слабым местом в виде необходимости интервальной операции вместо числовых в исходных алгоритмах в [1] (в самой работе [5] предлагается использование малых ε , но это удобный для теоретических конструкций, а не алгоритмов способ). Использование конструкции зазоров из алгоритмов 1-2 позволяет снять эту проблему.

Кроме этого, алгоритмы 3 и 4 требуют проверок корректности получаемых углов на промежуточных этапах и подбора параметра k на шагах 3 и 5. Из-за ограничений на углы исходных интервалов, k может быть только 0 или 1, так что перебор, с учётом знака, ограничивается всего тремя значениями, но соображения симметрии и вид формулы для θ показывают, что важна разность центральных осей интервалов S_1 и S_2 и их радиусы, а не все четыре параметра. Всё это позволяет надеяться на сокращение интервала параметров до более узкого в центральной форме записи, что позволит исключить некоторые из веток алгоритмов.

Всё это позволяет представить алгоритмы 3 и 4 для центральной записи в виде единого алгоритма:

(Выходом служат два числа $\{\varphi^-, \varphi^+\}$; прочие обозначения те же, что и в алгоритмах выше).

Алгоритм 5. $\text{extr } \Phi(S_1, S_2)$

1. if $(Zz_\varphi(S_1, S_2) < \text{rad } \varphi_1 + \text{rad } \varphi_2)$ and
 $(Zz_r(S_1, S_2) < \text{rad } r_1 + \text{rad } r_2)$ then return $\{0 ; 2\pi\}$
2. else if $Zz_r(S_1, S_2) < \text{rad } r_1 + \text{rad } r_2$ then
return
 $\{\min\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-),$
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\};$
 $\max\{\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+),$
 $\theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+)\} \}$
3. else if $Zz_r(S_1, S_2) = \text{rad } r_1 + \text{rad } r_2$ then

$$\varphi_1^* = \varphi_2^- + \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi$$

$$\varphi_1^{**} = \varphi_2^+ - \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi$$

return $\{ \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-), \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^{**}, \varphi_2^-) \}$

4. else if $0 \leq \pi - Zz_\varphi(S_1, S_2) \leq 2rad \varphi_1 + 2rad \varphi_2$
then return $\{0; 2\pi\}$

else if $(Zz_\varphi(S_1, S_2) < \pi + |\arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+}|)$ and $(-\pi < Zz_\varphi(S_1, S_2) < 0)$ then

$$\varphi_1^* = \varphi_2^- + \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi$$

return $\{ \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^*, \varphi_2^-), \max\{ \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+) \} \}$

else if $(Zz_\varphi(S_1, S_2) < \pi + |\arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+}|)$ and $(0 < Zz_\varphi(S_1, S_2) < \pi)$

$$\varphi_1^{**} = \varphi_2^+ - \arctg \frac{\sqrt{(r_2^-)^2 - (r_1^+)^2}}{r_1^+} + \pi$$

return $\{ \min\{ \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+) \}, \theta(r_1^+, r_2^-, \varphi_1^{**}, \varphi_2^-) \}$

else return

$\{ \min\{ \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+) \};$
 $\max\{ \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^+, \varphi_2^-), \theta(r_1^-, r_2^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+) \} \}$

Библиографический список

1. Candau Y., Raissi T., Ramdani N., Ibos L. Complex interval arithmetic using polar form //Reliable Computing. – 2006. – №1 – p. 1-20.

2. Dessombz O., Thouverez F., Laine J.-P., and Jezequel L. Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods.// Journal of Sound and Vibration. –2001. – Vol. 239, Issue 5 – p. 949-968.
3. Hladik M. Solution sets of complex linear interval systems of equations // Reliable Computing – 2010. – №14 – p.78-87.
4. Дронов В.С., Оболочки для сумм Минковского в секторной интервальной арифметике с центральной формой записи.// МАК-2020, Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием.– Барнаул, 2020.– с.29-37.
5. Mahmood E. M.N., Soylu G. On Complex Interval Arithmetic Using Polar Form // Gazi University Journal of Science – 2022, –Volume: 35 Issue: 1, – p. 132 - 146.

Сигнатуры кривизны Риччи четырехмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

П.Н. Клепиков
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена вычислению сигнатур кривизны Риччи четырехмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии. Получен полный перечень всех возможных сигнатур кривизны Риччи для таких многообразий.

Ключевые слова: кривизна Риччи, локально однородные римановы многообразия, сигнатуры кривизны, алгебры Ли.

Спектр оператора кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовался Дж. Милнором [1]. В трехмерном случае им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [2, 3, 4].

В четырехмерном случае известны работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [5, 6], в которых определены возможные сигнатуры кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли.

В более высоких размерностях существуют лишь частичные результаты. Например, в работе [7] Ю.Г. Никоноров показал, что оператор Риччи неунимодулярной разрешимой группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет как минимум два отрицательных собственных значения.

Под сигнатурой квадратичной формы кривизны Риччи мы будем понимать четверку $(\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \text{sgn}(x_3), \text{sgn}(x_4))$, где $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ — корни (с учетом кратности) характеристического уравнения $\det(r - x \cdot g) = 0$,

где r — тензор Риччи, g — метрический тензор.

Занумеруем все сигнатуры для четырехмерного случая (таблица 1). Таблица 1 – Возможные сигнатуры кривизны Риччи в четырехмерном случае (не обязательно, что все они реализуются)

№	Сигнатура	№	Сигнатура	№	Сигнатура
1	(-; -; -; -)	6	(-; -; +; +)	11	(0; 0; 0; 0)
2	(-; -; -; 0)	7	(-; 0; 0; 0)	12	(0; 0; 0; +)

№	Сигнатура	№	Сигнатура	№	Сигнатура
3	(-; -; -; +)	8	(-; 0; 0; +)	13	(0; 0; +; +)
4	(-; -; 0; 0)	9	(-; 0; +; +)	14	(0; +; +; +)
5	(-; -; 0; +)	10	(-; +; +; +)	15	(+; +; +; +)

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Кривизна Риччи четырехмерного локально однородного риманова многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии может иметь только те сигнатуры, для которых в таблице 2 на пересечении соответствующих строки и столбца стоит знак “+”.*

Таблица 2 – Сигнатуры кривизны Риччи четырехмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

Случай	Сигнатура														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$1.1^2.1$	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.2, p > 0$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.2, p = 0$	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.2, -2 < p < 0$	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.2, p = -2$	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.2, p < -2$	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.3$	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+	-
$1.1^2.4$	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.5$	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.6$	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.7$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.8$	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.9$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
$1.1^2.10$	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.11$	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$1.1^2.12$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$2.1^3.1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
$2.1^3.2$	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.1^3.3$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.1^3.4$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
$2.1^3.5$	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.1^3.6$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$3.4^2.1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$3.5^2.1$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3.5^2.2$	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3.5^2.3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-

Случай	Сигнатура														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3.5^2.4$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$4.2^2.1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
$4.2^2.2$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$4.2^2.3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$6.1^2.1$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$6.1^2.2$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
$6.1^2.3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-

Следствие. Не существует четырехмерного локально однородного риманова многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии такого, что его кривизна Риччи имеет сигнатуру $(-, 0, 0, +)$, $(-, 0, +, +)$ или $(-, +, +, +)$ (сигнатуры № 8, 9, 10).

Для доказательства основной теоремы необходимо рассмотреть все 33 случая из таблицы 2. Мы подробно рассмотрим только случай $1.1^2.1$. Для вычислений мы будем использовать алгоритм, приведенный в работе [8] и классификацию четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии, которая была получена в работе [9].

В случае $1.1^2.1$ скобки Ли алгебры Ли группы изометрий имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [e_1, u_1] &= u_3, & [e_1, u_3] &= -u_1, & [u_1, u_3] &= -u_2, \\ [u_1, u_4] &= u_1, & [u_2, u_4] &= 2u_2, & [u_3, u_4] &= u_3, \end{aligned}$$

где $\text{span}(e_1)$ — подалгебра изотропии, $\text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ — дополнение к подалгебре изотропии.

Матрица инвариантного метрического тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

и определяет риманову метрику тогда и только тогда, когда $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$, $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$.

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & (2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)x + (\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22})^2 \cdot \\ & \cdot ((\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)x + 6\alpha_{22}) \cdot \\ & \cdot (2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)x - (\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Его корни равны

$$x_1 = \frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad x_2 = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$

$$x_3 = x_4 = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} < 0.$$

В таблице 3 приведены значения параметров α_{22} , α_{24} , α_{33} , α_{44} , при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке теоремы.

Таблица 3 – Сигнатуры кривизны Риччи для случая 1.1². 1

№ сигнатуры	Сигнатура	α_{22}	α_{24}	α_{33}	α_{44}
1	(-, -, -, -)	1	0	1	1
2	(-, -, -, 0)	2	1	1/4	1
3	(-, -, -, +)	2	1	1/5	1

Другие сигнатуры невозможны, так как характеристическое уравнение всегда имеет как минимум три отрицательных корня.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.
2. Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. – 2006. – Т. 37. – С. 1–78.
3. Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/1. – С. 19–23.
4. Воронов Д. С., Гладунова О. П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия АлтГУ. – 2010. – № 1–2. – С. 24–28.
5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 115–147.
6. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 40–116.

7. Nikonorov Yu.G. Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras // *Geometriae Dedicata*. – 2014. – V. 170. – P. 119–133.
8. Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений для определения основных геометрических характеристик нередуктивных однородных псевдоримановых многообразий // *Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник трудов всероссийской конференции. Алтайский государственный университет*, 2015. – С. 320–326.
9. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // *Lobachevskii J. Math.* – 2001. – V. 8. – P. 33–165.

О методах вейвлет-преобразований компьютерных изображений

*И.В. Пономарев, Д.И. Строкин
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья направлена на последовательное изучение современных методов дискретного вейвлет преобразования файлов-изображений для последующей разработки стеганографического алгоритма передачи сокрытой информации.

Ключевые слова: *стеганография, вейвлет, сжатие изображения, масштабирующие функции.*

Передача информации в сети интернет в виде файлов-изображений является самым распространенным видом коммуникаций. Существует широкий спектр различных форматов представления изображений каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Цель нашего исследования – изучение методов основанных на вейвлет преобразованиях для возможности скрытой передачи информации посредством внедрения ее в файл-изображение.

Когда фотография делается с цифровой камеры или графическое изображение сканируется для формирования цифрового изображения, для сохранения конечного файла требуется значительный объем памяти. Кроме того, его передача из одного места в другое занимает много времени из-за большого размера файла. Например, изображения, получаемые с матриц фотокамер, содержат необработанную информацию и часто имеют размер, превышающий 15-25 МБ. Такой формат изображений (RAW) полезен при редактировании, но непригоден для хранения и передачи в сети. Следовательно, объем данных в файле изображения необходимо уменьшить. Сжатие изображений – это процесс уменьшения размера файла изображения без ухудшения или с незначительным ухудшением его качество [1].

Все методы сжатия информации основаны на предположении, что набор данных всегда содержит избыточные элементы. Сжатие достигается за счет поиска и кодирования избыточных элементов [2].

Будем рассматривать искажающие методы сжатия (называемые также методами сжатия с потерями), т.е. методы, основанные на

удалении несущественной части данных, после чего полное восстановление невозможно.

Основная цель сжатия с потерями заключается в минимизации количества бит, необходимых для представления изображения при допустимом уровне искажения.

Разумеется, искажение должно быть оценено соответствующим образом. Обозначим искажения между оригинальным изображением $X \equiv x[n_1, n_2]$ и восстановленным изображением $\hat{X} \equiv \hat{x}[n_1, n_2]$ через $D(X, \hat{X})$. Наиболее часто используемый метод оценки искажения – это Метод Среднеквадратической Ошибки (Mean Squared Error), определенная так:

$$MSE = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (x[n_1, n_2] - \hat{x}[n_1, n_2])^2$$

Для сжатия изображений наиболее часто используется MSE, которая выражена в эквивалентной взаимной мере, PSNR (Peak Signal to Noise Ratio – Пиковое отношение сигнал/шум), определенной так:

$$PSNR = 10 \lg \frac{(2^B - 1)^2}{MSE}$$

PSNR выражается в децибелах (дБ). Качественно восстановленные изображения обычно имеют значения PSNR 30 дБ или больше.

В работах [3, 4] были изучены методы обеспечения конфиденциальности данных средствами цифровой стеганографии, использующий в качестве файлов-контейнеров изображения формата BMP и производящий их последующее сжатие к формату JPEG без потери скрываемой информации. Сейчас большую популярность приобретает формат JPEG2000. Данный формат использует вейвлет-анализ для сжатия изображений, что позволяет достичь более эффективной компрессии, чем оригинальный формат JPEG [5].

Предположим, что мы имеем дело с ортонормированными вейвлетами. Тогда у нас есть две функции: масштабирующая функция $\varphi(x)$ и вейвлет $\psi(x)$. Для каждого $j \in \mathbf{Z}$ система функций $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n), n \in \mathbf{Z}$, является ортонормированным базисом пространства $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$. Система подпространств $V_j, j \in \mathbf{Z}$, образует бесконечную в обе стороны последовательность вложенных подпространств $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_j \subset \dots$ [6]

Операторы проектирования $P_j: L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_j$ дают приближения $P_j(f)$ элементов $f \in L^2(\mathbf{R})$, все более точные с возрастанием j . Число j характеризует уровень разрешения. Чем больше j , тем более мелкие носители имеют функции $\varphi_{j,n}(x)$. Тогда коэффициенты $(f, \varphi_{j,n})$ более

детально отражают свойства $f(x)$. Обозначим символом cA_0 набор коэффициентов разложения:

$$cA_0 = \{a_{j,n}\}, a_{j,n} = (f, \varphi_{j,n}) = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j,n}(x)} dx$$

Коэффициенты $cA_0 = \{a_{j,n}\}$ дают информацию относительно функции $f \in L^2(\mathbf{R})$, однако качественный смысл каждого коэффициента неясен. Для сравнения, коэффициенты a_n и b_n разложения функции в ряд Фурье дают достаточно ясную качественную характеристику функции. Они показывают, насколько $f(x)$ содержит в себе эталонные колебания $\cos(nx), \sin(nx)$. С вейвлетами пока этого нет (сомнительно, что вейлеты $\varphi_{j,n}(x)$ и $\psi_{j,n}(x)$ можно считать эталонами поведения функции). Однако здесь имеются другие возможности. А именно нужно рассматривать коэффициенты $cA_0 = \{a_{j,n}\}$ в сравнении с коэффициентами разложения при более низком разрешении. Для того чтобы не потерять информацию об $f(x)$ при переходе на более низкий уровень, нужно учесть эти потери.

Поступаем следующим образом. Каждое подпространство V_j раскладываем в прямую сумму ортогональных подпространств $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$. Это разложение позволяет вместо j -го уровня приближения $P_j(f)$ взять сумму

$$P_j(f) = P_{j-1}(f) + P_{j-1}^W(f).$$

Первое слагаемое есть более грубое приближение в пространстве V_{j-1} , а второе – отражает детали, которыми $P_{j-1}(f)$ отличается от $P_j(f)$. В базисах пространств V_{j-1} и W_{j-1} имеем:

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x),$$

где $a_{j-1,k}$ – коэффициенты аппроксимации $(j-1)$ -го уровня разрешения $a_{j-1,k} = (f, \varphi_{j-1,k}) = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j-1,k}(x)} dx$, $d_{j-1,k}$ – детализирующие коэффициенты, $d_{j-1,k} = (f, \psi_{j-1,k}) = \int_R f(x) \overline{\psi_{j-1,k}(x)} dx$.

Обозначим полученные наборы коэффициентов символами cA_1 и cD_1 :

$$cA_1 = \{a_{j-1,k}\}, cD_1 = \{d_{j-1,k}\}.$$

Таким образом, мы получили теперь два набора коэффициентов разложения. По построению коэффициенты cA_1 и cD_1 в совокупности дают ту же информацию, что и первоначальный набор коэффициентов cA_0 . Преимущество коэффициентов A_1 и cD_1 заключается в том, что

они несут еще и качественную информацию. А именно коэффициенты cA_1 описывают более грубое (сглаженное) приближение функции $f(x)$ в пространстве V_{j-1} , а коэффициенты cD_1 характеризуют отклонения приближения функции $P_j(f)$ относительно $P_{j-1}(f)$.

Повторяя процедуру N раз, мы получаем вейвлет-разложение аппроксимации j -го уровня разрешения $P_j(f)$ в виде серии коэффициентов

$$P_j(f) = \{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\},$$

где $cA_N = \{a_{j-N,k}\}$ – коэффициенты аппроксимации разложения глубины N и $cD_m = \{d_{j-m,k}\}$ – детализирующие коэффициенты разложения глубины $m = 1, 2, \dots, N$.

В ходе анализа рассмотренного алгоритма вейвлет преобразования нами были сделаны следующие выводы: данный формат изображения более близко к зрительной системе человека, чем дискретное косинусное преобразование; вейвлет-преобразование дает сравнимые артефакты в тех местах, где оригинальное изображение имело плавные цветопереходы. Следовательно, возникающие артефакты возможно использовать для сокрытия дополнительной информации по аналогии с форматами JPEG и GIF.

Библиографический список

1. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
2. Ватолин Д., Ракушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 384 с.
3. Куркина М. В., Пономарев И. В., Строкин Д. И. Стеганографические методы, устойчивые к JPEG сжатию // Известия Алтайского государственного университета. – 2021. – №1(117). – С. 102-105. – DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-17.
4. Пономарев И.В., Строкин Д.И. Стеганографические методы встраивания и обнаружения сокрытых сообщений, использующие GIF-изображения в качестве файлов-контейнеров // Известия АлтГУ. Математика и Механика. – 2022. – №1(123). – DOI: 10.14258/izvasu(2022)1-18.
5. Jin Li. Image Compression: The Mathematics of JPEG 2000 // Modern Signal Processing. – MSRI Publications, 2003. – Vol. 46. – P. 185-221.

6. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2014. – 628 с.

СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.95

Разрешимость в «малом» по времени начально-краевой задачи для уравнений одномерного движения сыпучей среды

*И.Г. Ахмерова, А.С. Правдивцев
АлтГУ, г. Барнаул*

В статье доказана разрешимость «в малом» по времени начально-краевой задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении сыпучей среды.

Ключевые слова: разрешимость, плотность, гранулярная температура, сыпучая среда.

Рассматривается одномерное изотермическое движение сыпучей среды. Законы сохранения массы, импульса и энергии имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ - скорость; $\rho(x, t)$ - плотность; $T(x, t)$ - гранулярная температура, определяемая колебаниями средней скорости частиц, т.е. $\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}m(\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)$, где k_B - постоянная Больцмана; m - масса частицы; $p(\rho, T)$ - давление, удовлетворяет уравнению состояния Ван-дер-Ваальса [2]; $\mu(\rho, T)$ - сдвиговая вязкость; $\lambda(\rho, T)$ - объемная вязкость; $I(\rho, T)$ - диссипативный член, возникающий из-за неупругих столкновений частиц; $\kappa(\rho, T)$ - коэффициент теплопроводности.

В приложениях используются следующие зависимости [2], [3],[4]:

$$p(\rho, T) = \rho T \frac{\rho_c + \rho}{\rho_c - \rho}, \quad \kappa(\rho, T) = \frac{\rho(\alpha l + d)^2}{l} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad \mu(\rho, T) = mPr \kappa,$$

$$\lambda(\rho, T) = -\frac{2}{3}\mu(\rho, T),$$

где $\rho_c = \frac{2}{d^2\sqrt{3}}$, $l = \frac{(\rho_c - \rho)}{\sqrt{8}\rho d(\rho_c - \alpha\rho)}$, $a = 1 - \sqrt{3/8}$, $\alpha = 0,6$, $\mu(\rho, T) = mPr \kappa$, (Pr - число Прандтля).

Система (1) - (3) дополняется начально-краевыми условиями:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (4)$$

Вопросы разрешимости задач для близких по структуре моделей рассматривались: [5], [6], [7], [8], [9].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1) – (4) называется совокупность функций $(u(x, t), \rho(x, t),)$ из пространств:

$$\begin{aligned} \rho &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ u(t) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in L_2(Q_T), \quad \Omega = (0, 1), \quad Q_T = \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

удовлетворяющих уравнениям (1) – (3) и неравенствам $0 < \rho(x, t) < 1 < \frac{1}{a}$, почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема. Пусть данные задачи (1) – (4) обладают следующей гладкостью $(u^0(x), \rho^0(x), T^0(x)) \in W_2^1(\Omega)$, $g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и подчиняются условиям согласования $u^0|_{x=0, x=1} = \frac{\partial T^0(x)}{\partial x}|_{x=0, x=1} = 0$. Пусть функции $p(\rho, T), \kappa(\rho, T), I(\rho, T)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\rho(x, t) \in (0, \frac{1}{a})$ и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} k_0^{-1} \rho^{q_1} (1 - \rho)^{q_2} (1 - a\rho)^{q_3} &\leq \kappa(\rho) \leq k_0 \rho^{q_4} (1 - \rho)^{q_5} (1 - a\rho)^{q_6}, \\ k_0^{-1} \rho^{q_7} (1 + \rho)^{q_8} (1 - \rho)^{q_9} &\leq p(\rho) \leq k_0 \rho^{q_{10}} (1 + \rho)^{q_{11}} (1 - \rho)^{q_{12}}, \\ |(\kappa(\rho))'_\rho| &\leq k_0 \rho^{q_{13}} (1 - \rho)^{q_{14}} (1 - a\rho)^{q_{15}}, \\ |(p(\rho))'_\rho| &\leq k_0 \rho^{q_{16}} (1 + \rho)^{q_{17}} (1 - \rho)^{q_{18}}, \end{aligned}$$

где $k_0 = \text{const} > 0$, $q_{1, \dots, 18}$ – фиксированные вещественные параметры. Если выполнены условия

$$0 < b_0 \leq \rho^0(x) \leq B_0 < \frac{1}{a}, \quad x \in \bar{\Omega}$$

где b_0, B_0 – известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 > 0$, $t_0 \in (0, T)$ такое, что для всех $t \leq t_0$ существует сильное решение $(u(x, t), \rho(x, t))$ задачи (1) – (4).

Существование сильного решения на достаточно малом промежутке времени в случае доказывается с помощью метода Галёркина и в идейном плане следует доказательству аналогичного результата для вязкого теплопроводного газа.

Библиографический список

1. Peter Eshuis et al. Buoyancy driven convection in vertically shaken granular matter: experiment, numerics, and theory. – Granular Matter. – 2013. – 15:893 – 911.
2. Grossman, E.L., Zhou, T., Ben-Naim, E.: Towards granular hydrodynamics in two-dimensions. – Phys. Rev. – E 55. – 4200. – 1997
3. Eshuis, P., van der Weele, K., van der Meer, D., Lohse, D.: Granular leidenfrost effect: experiment and theory of floating particleclusters. – Phys. Rev. – Lett. 95. – 258001. – 2005
4. Meerson, B., Pöschel, T., Bromberg, Y.: Close-packed floating clusters: granular hydrodynamics beyond the freezing point? – Phys. Rev. – Lett. 91. – 024301. – 2003
5. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 1999. – №114. – С. 64-70.
6. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 2000. – №116. – С. 73-80.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87(№2). – P 230-243.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // Mathematical Notes. – 2014. – Vol. 96(№2). – P 8-21.
8. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей //Ред. Сиб.мат.журн. Сиб.отд.АН РФ. – Новосибирск. –2004. –Деп. ВИНТИ. –№37. – 34с.
9. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск. – 1983.

**Сухие и влажные моды упругой пластины с линейной
аппроксимацией толщины**

П.В. Борисов, К.Е. Валяев

АлтГУ, г. Барнаул

Исследуются собственные моды и собственные частоты двумерных упругих пластин, находящихся в контакте с жидкостью, в рамках линейной теории гидроупругости.

Ключевые слова: *гидроупругость, пластины, собственные моды, собственные частоты, матрица присоединенных масс.*

Собственные частоты и моды сухих и влажных пластин используются для оценки реакции пластины и напряжений, вызванных распределенными внешними нагрузками. Задачи динамики упругой пластины в контакте со свободной поверхностью жидкости особенно сложны, потому что прогибы пластины зависят от гидродинамических нагрузок, которые, в свою очередь, зависят от прогибов пластины. Такие задачи называются связанными задачами гидроупругости. Их можно эффективно решать, используя либо моды сухой пластины и так называемую матрицу присоединенных масс, либо моды влажной (смоченной) пластины. Если влажные моды не используются и прогибы пластины в контакте с жидкостью ищутся как суперпозиция сухих мод с неизвестными заранее коэффициентами, то такой метод решения называется методом нормальных мод.

Матрицы присоединенных масс были введены в работах [1], [2] в задаче о волновом воздействии на мокрую палубу многокорпусного судна. Мокрая палуба моделировалась балками Эйлера и Тимошенко. Гидродинамические нагрузки оценивались в рамках Вагнеровской теории удара о воду. Концепция матриц присоединенных масс не использовалась в численных расчетах до статей [2] и [3]. Прогибы пластины в зоне гидроупругого удара аппроксимировались линейной функцией в [2] и рядом Фурье в [3]. В работе [4] использован тот же подход в задаче о воздействии волн на носовую часть мокрой палубы катамарана. Было показано, что элементы соответствующей матрицы присоединенных масс задаются двойными сингулярными интегралами, которые вычислялись численно. Основной проблемой являлось то, что область контакта между упругим мокрым дном и

ударной волной со временем расширялась. Матрицу присоединенных масс необходимо вычислять на каждом временном шаге интегрирования уравнения упругой пластины по времени.

Для нахождения сухих мод пластины с переменной сплошной толщиной $h(x)$ ее можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией. Пусть длина пластины разбита на N_p отрезков, $a_j < x < a_{j+1}$, $1 \leq j \leq N_p$, $a_1 = -1$ и $a_{N_p+1} = 1$ в безразмерных переменных. Толщина пластины приблизительно равна

$$h(x) \approx h_j + T_j(x - a_j), \quad T_j = \frac{h_{j+1} - h_j}{a_{j+1} - a_j} \quad (a_j < x < a_{j+1}), \quad (1)$$

где $h_j = h(a_j)$ и $h_j > 0$. Для каждого интервала $a_j < x < a_{j+1}$ пластины общее решение дифференциального уравнения, описывающего прогиб пластины, может быть получено с помощью решения

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\xi} M_n(\xi), \quad \xi = \frac{2}{\beta} \lambda_n \sqrt{1 + \beta x}, \quad (2)$$

$$M_n(\xi) = A_n J_1(\xi) + B_n Y_1(\xi) + C_n I_1(\xi) + D_n K_1(\xi),$$

где $J_1(\xi)$ и $Y_1(\xi)$ — функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно, а $I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$ — модифицированные Функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно. Это решение с четырьмя неопределенными коэффициентами получено для $h(x) = 1 + \beta x$. Коэффициенты определяются с использованием четырех краевых условий в точке $x = \pm 1$ и четырех условий согласования на границе каждого интервала. Условия согласования требуют, чтобы функции $\psi_n(x)$ были непрерывны вместе со своими первой и второй производными на концах интервалов, а также была непрерывной перерезывающая сила, что дает

$$\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right] = \left[\frac{d\psi}{dx}\right] = [\psi] = 0, \quad h\left[\frac{d^3\psi}{dx^3}\right] + 3\frac{d^2\psi}{dx^2}\left[\frac{dh}{dx}\right] = 0 \quad (x = a_j), \quad (3)$$

здесь $2 \leq j \leq N_p$. Действительно, для интервала $a_j < x < a_{j+1}$ и $T_j \neq 0$ уравнение для определения сухих мод имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} ([h_j + T_j(x - a_j)]^3 \frac{d^2\psi_n^{(j)}}{dx^2}) = \lambda_n^4 [h_j + T_j(x - a_j)] \psi_n^{(j)}, \quad (4)$$

где $\psi_n^{(j)}(x)$ — функция $\psi_n(x)$ на рассматриваемом интервале. Ограничимся случаем, когда $h_j - T_j a_j \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} ((1 + \beta_j x)^3 \frac{d^2\psi_n^{(j)}}{dx^2}) = \tilde{\lambda}_{nj}^4 (1 + \beta_j x) \psi_n^{(j)} \quad (a_j < x < a_{j+1}), \quad (5)$$

где

$$\beta_j = T_j / (h_j - T_j a_j), \quad \tilde{\lambda}_{nj} = \lambda_n / |h_j - T_j a_j|^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5) определяется выражением (2),

$$\psi_n^{(j)}(x) = \frac{1}{\xi} M_{nj}(\xi), \quad M_{nj}(\xi) = A_{nj}J_1(\xi) + B_{nj}Y_1(\xi) + C_{nj}I_1(\xi) + D_{nj}K_1(\xi), \quad (7)$$

$$\xi = b_{nj}\sqrt{1 + \beta_j x}, \quad b_{nj} = \frac{2\lambda_n}{T_j} |h_j - T_j a_j|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(h_j - T_j a_j), \quad (8)$$

где $\operatorname{sign}(x)$ — знаковая функция, $x = |x|\operatorname{sign}(x)$. Необходимо определить $4N_p$ коэффициентов A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} , D_{nj} , $4(N_p - 1)$ условий согласования и четыре краевых условия на краях пластины. Таким образом, мы имеем $4N_p$ линейных уравнений с нулевыми правыми частями для коэффициентов A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} и D_{nj} . Эта система имеет ненулевые решения только для λ_n , являющихся корнями определителя системы. Далее система решается численно для каждого λ_n с точностью до постоянного множителя, который определяется с помощью условия нормировки

$$\int_{-1}^1 h(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = \delta_{nm}. \quad (9)$$

Полученные сухие моды $\psi_n(x)$ пластины кусочно-линейной толщины представляются в виде суперпозиций сухих мод $\bar{\psi}_k(x)$, вычисляемых как нормальных мод упругой балки с постоянной толщиной, равной среднему значению $h(x)$. Матрица присоединенных масс пластины переменной толщины рассчитывается с использованием коэффициентов разложения сухих мод $\bar{\psi}_k(x)$ по соответствующим мокрым модам, см. [5].

В результате тестовых расчетов получено, что основной вклад во влажные моды вносит соответствующие сухие моды с одинаковыми номерами. Вкладом всех остальных сухих мод можно пренебречь. Однако собственные частоты влажных мод сильно отличаются от собственных частот сухих мод. Частоты влажных мод меньше, чем частоты сухих, и зависят от свойств жидкости и упругих свойств конструкции.

Библиографический список

1. Kvålsvold, J., Faltinsen, O. Hydroelastic modelling of slamming against wetdecks, In Proc. 8th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Saint Johns, Canada, 1993.
2. Kvålsvold, J., Faltinsen, O. M. 1995 Hydroelastic modeling of wet deck slamming on multihull vessels J. Ship Res. 39(03), pp. 225-239.

3. Faltinsen, O. M. 1997 The effect of hydroelasticity on ship slamming Phil. Trans. R. Soc of London A: Math., Phys. and Eng. Sciences 355(1724), pp. 575-591.
4. Korobkin, A. 1995 Wave impact on the bow end of a catamaran wet deck J. Ship Res. 39(04), pp. 321-327.
5. Korobkin, A. A., Khabakhpasheva, T. I. 1999 a Plane linear problem of the immersion of an elastic plate in an ideal incompressible fluid J. Appl. Mech. Tech. Phys. 40(3), pp. 491-500.

Численное моделирование задачи протекания жидкости в пороупругой среде

Р.А. Вириц, М.А. Токарева

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена численному исследованию математической модели фильтрации сжимаемой жидкости в пороупругой среде с неоднородными граничными условиями. Исходная задача сводится к двум уравнениям для нахождения функций пористости и плотности жидкости. Для нахождения плотности предлагается симметричная разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространству, а для отыскания пористости метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Ключевые слова: закон Дарси, пороупругость, фильтрация, численное моделирование, задача протекания.

Изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа [1]-[3]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0,$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad (4)$$

$$\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1-\phi)\rho_s,$$

которая решается в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s|_{x=0, x=1} = 0, \quad v_f|_{x=0} = v_f^0(t), \quad v_f|_{x=1} = v_f^1(t),$$

$$\phi|_{t=0} = \phi^0(x), \quad \rho_f|_{t=0} = \rho^0(x).$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное нестационарное движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде. Здесь ρ_f , ρ_s , v_f , v_s – соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ – пористость, p_f , p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – плотность двухфазной среды, g – плотность

массовых сил; кроме того, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t . Истинная плотность твердых частиц ρ_s принимается постоянной. Искомыми являются величины $\phi, \rho_f, v_f, v_s, p_f, p_s$. Система уравнений (1) – (4) замыкается заданием уравнения состояния жидкой фазы $p_f = p_f(\rho_f)$. Далее рассматривается случай, когда $g = 0, p_f = R\rho_f$. Следуя [4] приходим к следующей задаче в переменных Лагранжа для отыскания функций ρ_f, ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f(\rho_f) - p^0(t), \quad (10)$$

$$\left(\frac{k(\phi)(1-\phi)R}{\phi}\frac{\partial \rho_f}{\partial x}\right)|_{x=0} = -v_f^0(t), \quad \left(\frac{k(\phi)(1-\phi)R}{\phi}\frac{\partial \rho_f}{\partial x}\right)|_{x=1} = -v_f^0(t),$$

$$\rho_f|_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x),$$

где

$$p^0(t) = \int_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi} p_f dx \left(\int_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi} dx \right)^{-1} \equiv P^0(\phi, \rho_f),$$

$$a(\phi) = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad K(\phi) = k(\phi)(1-\phi), \quad b(\rho_f) = \rho_f \frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial \rho_f}.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$x' = x/L, \quad \rho_{f'} = \rho_f/\rho, \quad t' = t/T, \quad v_{f'} = v_f/V, \quad p' = p/P.$$

Тогда в начально – краевой задаче (9) – (10) возникнут безразмерные параметры $\lambda = \frac{\rho T k R}{\mu L^2}, \omega = \frac{T R \rho}{\eta}, \varepsilon = \frac{P T}{\eta}, \gamma = \frac{L V \mu}{\rho k R}, \alpha = \frac{R \rho}{P}$. Начально – краевая задача (9) – (10) решается численно. В области $[0,1] \times [0,1]$ построим равномерную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_{\square} \times \bar{\omega}_{\tau}$: $\bar{\omega}_{\square} = \{x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, N+1, N\square = 1\}$, $\bar{\omega}_{\tau} = \{t_k = (k-1)\tau, k = 1, 2, \dots, M+1, M\tau = 1\}$, $\square$ – шаг по пространственной координате, τ – шаг по времени. Численные решения в узлах сетки (x_i, t_k) обозначаются через $\phi_{i,j}^k = \phi(x_i, t_k)$, $\rho_{i,j}^k = \rho_f(x_i, t_k)$, $v^0(k) = v_f^0(t_k)$, $v^1(k) = v_f^1(t_k)$, $p^0(k) = p^0(t_k)$.

Для аппроксимации уравнения (9) используется разностная схема с весами для параболического уравнения [5]

$$\frac{a_i^{k+1}\rho_i^{k+1} - a_i^k\rho_i^k}{\tau} - \frac{\sigma}{\square} \left[\frac{b_i^k + b_{i+1}^k}{2} \frac{\rho_{i+1}^{k+1} - \rho_i^{k+1}}{\square} - \frac{b_i^k + b_{i-1}^k}{2} \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_{i-1}^{k+1}}{\square} \right]$$

$$-\frac{(1-\sigma)}{\square} \left[\frac{b_i^k + b_{i+1}^k}{2} \frac{\rho_{i+1}^k - \rho_i^k}{\square} - \frac{b_i^k + b_{i-1}^k}{2} \frac{\rho_i^k - \rho_{i-1}^k}{\square} \right] = 0, \quad (11)$$

и для уравнения (10) метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности [6]

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\tau} &= \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 1, \dots, N+1, \\ k_1 &= (\omega \rho_i^k - \varepsilon p^0(k)) (\phi_i^k)^n (1 - \phi_i^k) \equiv F(\phi_i^k, \rho_i^k), \\ k_2 &= F(\phi_i^k + \tau k_1/2, \rho_i^k), \\ k_3 &= F(\phi_i^k + \tau k_2/2, \rho_i^k), \quad k_4 = F(\phi_i^n + \tau k_3, \rho_i^k). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $a_i^k = \phi_i^k / (1 - \phi_i^k)$, $b_i^k = (\phi_i^k)^n (1 - \phi_i^k) \rho_i^k$.

Для граничных условий для функции плотности при $x = 0$ и $x = 1$ используются трехточечные левые и правые разности первой производной, обладающие вторым порядком аппроксимации по x

$$\begin{aligned} \frac{-3\rho_1^{k+1} + 4\rho_2^{k+1} - \rho_3^{k+1}}{2\square} &= -\frac{\gamma v^0(k)}{(\phi_i^k)^{n-1} (1 - \phi_i^k)}, \\ \frac{3\rho_{N+1}^{k+1} - 4\rho_N^{k+1} - \rho_{N-1}^{k+1}}{2\square} &= -\frac{\gamma v^1(k)}{(\phi_i^n)^{n-1} (1 - \phi_i^n)}. \end{aligned}$$

И, наконец, представление для $p^0(t)$ аппроксимируется составной формулой трапеций [6]

$$p^0(k) = \sum_{i=2}^N I_1(i, k) (\sum_{i=2}^N I_2(i, k))^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(i, k) &= (F_1(i, k) + F_1(i-1, k))\square/2, \quad I_2(i, k) \\ &= (F_2(i, k) + F_2(i-1, k))h/2, \quad i = 2, \dots, N+1, \\ F_1(i, k) &= \frac{(\phi_i^k)^m \rho_i^k \alpha}{1 - \phi_i^k}, \quad F_2(i, k) = \frac{(\phi_i^k)^m}{1 - \phi_i^k}. \end{aligned}$$

Выбор веса $\sigma = 1/2$ в (11) (схема с полусуммой или симметричная), а так же аппроксимация граничных условий со вторым порядком обеспечивает глобальный второй порядок аппроксимации по времени и пространству уравнения для плотности. Алгоритм счета следующий: используя начальное значение для плотности и пористости (ϕ_i^1, ρ_i^1) , находим из (13) $p^0(1)$, далее полученное значение используем в (12) и находим значение пористости на следующем временном слое; следующим шагом будет нахождение функции плотности из уравнения (11) методом правой прогонки [5]. Повторив алгоритм M раз, найдем все искомые функции на всем временном интервале. Устойчивость вычислительного алгоритма проверялась серией расчетов на последовательностях вложенных сеток. Численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искомых величин.

В частности, когда $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $T = 86400 \text{ с} = 1 \text{ сут}$, $k = 10^{-8} \text{ м}^2$, $L = 10 \text{ м}$, $\mu = 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $R = 9.81 \text{ м/с}^2 \cdot L$, $\eta = 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $P = 10^5 \text{ Па}$, $\rho^0(x) = 1$, $\phi^0(x) = 1/2$, численное решение для пористости представлено на рисунке. 1

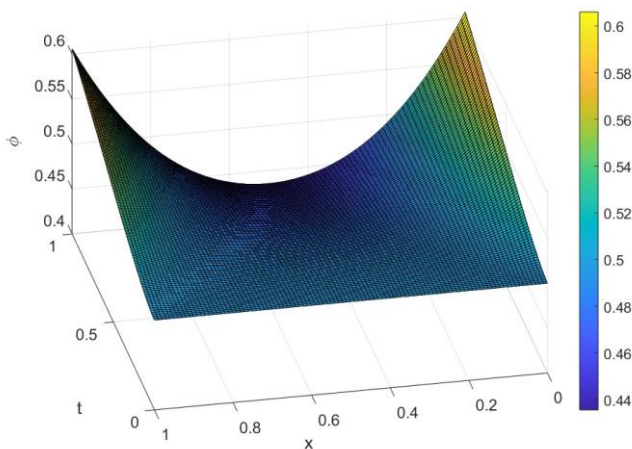


Рисунок 1 – Значение функции пористости

Библиографический список

1. Токарева М.А., Папин А.А.. Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – 141 с.
2. Fowler A. Mathematical Geoscience. – Springer-Verlag London Limited, 2011.
3. Coussy O. Poromechanics, John Wiley and Sons, Chichester, U.K., 2004.
4. Tokareva M.A., Papin A.A., On the existence of global solution of the system of equations of one-dimensional motion of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2021, V. 18, №2, pp. 1397-1422.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. – "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы [Учеб. пособие для вузов по спец."Прикл. математика"]. – 1989.

Математическое моделирование динамики биологической ткани

*Э.И. Леонова, А.А. Папин
АлтГУ, Барнаул*

В статье исследуется математическая модель динамики биологической ткани (в данном случае, опухоли). Проведен обзор литературы с похожей тематикой. Цель работы – обоснование данной модели.

Ключевые слова: *филътрация, моделирование опухоли, физический принцип максимума, автомодельное решение.*

1. Введение. Существует множество работ по моделированию раковых опухолей [1]. Модели бывают многофазные, однофазные, многоуровневые (на макро- и микроуровне), балансовые модели. В многоуровневых моделях рассматривается как клеточный цикл одной клетки, так и процесс образования опухоли в целом. В некоторых работах учитывается процесс ангиогенеза, внеклеточный матрикс и т.д. Рост опухоли может описываться уравнениями в частных производных или обыкновенными дифференциальными уравнениями. В статьях имеются результаты численного решения, но существует небольшое количество работ, где были получены качественные теоретические результаты (например, в работе [2]). В данной статье был выбран многофазный подход для моделирования.

Многофазный подход основан на уравнениях законов сохранения (массы, импульса и энергии) и наличием нескольких фаз. В данном случае этими фазами могут быть следующие виды клеток: раковые, здоровые, делящиеся, покоящиеся и т.д. Так же учитывается процесс распространения питательных веществ во всей области опухоли.

2. Модельная задача. Разрешимость. В статье опухоль рассматривается как трехфазная среда, состоящая из раковых клеток ($i = 1$), здоровых клеток ($i = 2$) и внеклеточного матрикса ($i = 3$). Процесс описывается уравнениями сохранения масс для каждой фазы, уравнениями импульса (в форме законов Дарси) и уравнением диффузии для концентрации питательных веществ [2]:

$$\frac{\partial(\phi \rho_1^0 s_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho_1^0 s_1 \vec{u}_1) = \Gamma_1(s_1, c), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_2^0s_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\rho_2^0s_2\vec{u}_2) = \Gamma_2(s_2, c), \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_3^0\vec{u}_3) = 0, \quad (3)$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{oi}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla c) = Q(s_1, c) = -d_2 c(1-c)s_1, \quad (5)$$

где s_1, s_2 – насыщенности раковых и здоровых клеток ($s_1 + s_2 = 1$); $\vec{u}_i$ – скорость i -й фазы; p_i – давления фаз; c – концентрация питательных веществ; ρ_i^0 – истинные плотности i -й фазы; ϕ – пористость среды; $\Gamma_i(s_i, c)$ – интенсивность обмена массой компонента смеси ($\Gamma_i(s_i, c) = (-1)^i d_1 s_i (1 - s_i) c$ при $s \in (0, 1)$ и $\Gamma_i(s_i, c) = 0$ вне промежутка); K_0 – тензор фильтрации; k_{oi} – фазовые проницаемости ($k_{oi} = k_{oi}(s_i) \geq 0, k_{oi}|_{s_i=0} = 0$); $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; μ_i – динамические вязкости; D – тензор диффузии; $Q(s_1, c)$ – интенсивность обмена питательных веществ ($Q(s_1, c) = -d_2 c(1-c)s_1$ при $s \in (0, 1)$ и $Q(s_1, c) = 0$ вне промежутка). В задаче (1) – (5) следующие искомые функции: $s_1, s_2, p_1, p_2, c, \vec{u}_1, \vec{u}_2$.

Используются следующие упрощения: $\rho_i^0 = \text{const}$, $\phi = \text{const}$, $\vec{u}_3 = 0$, $K_0 = \text{const}$, $\vec{g} = 0$, $\mu_i = \text{const}$, $D = 0$. Вводятся обозначения $s_1 = s, s_2 = 1 - s$. Рассматривается одномерная задача вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi\rho_1^0s)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi\rho_1^0su_1)}{\partial z} &= \Gamma_1(s, c), \\ \frac{\partial(\phi\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\phi\rho_2^0(1-s)u_2)}{\partial z} &= \Gamma_2(s, c), \\ \frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0u_3)}{\partial z} &= 0, \\ s_i\phi(u_i - u_3) &= -K_0 \frac{k_{oi}}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i^0 g \right), \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right) &= Q(s, c). \end{aligned}$$

Предполагается, что опухоль занимает полубесконечную область $z \in (-\infty, \gamma t)$, $\gamma < 0$, $t > 0$. При $z = -\infty$ раковые клетки отсутствуют ($s|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$, $u_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$), здоровые клетки неподвижны ($u_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$). При $z = \gamma t$, известны скорости ($u_1(0) = u_1^+$, $u_2(0) = u_2^+$), давление ($p_2(0) = p_2^+$) и концентрация питательных веществ ($c(0) = c^+$). Предполагается, что все искомые функции зависят от переменной $\xi = z - \gamma t$. Уравнения и граничные условия принимают вид:

$$-\gamma \frac{\partial(\phi\rho_1^0s)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\phi\rho_1^0su_1)}{\partial \xi} = \Gamma_1(s, c), \quad (6)$$

$$-\gamma \frac{\partial(\phi\rho_2^0(1-s))}{\partial \xi} + \frac{\partial(\phi\rho_2^0(1-s)u_2)}{\partial \xi} = \Gamma_2(s, c), \quad (7)$$

$$-\gamma \frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

$$v_i = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \xi} - \rho_i^0 g \right), \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$-\gamma \frac{\partial c}{\partial \xi} = -d_2 c (1 - c) s, \quad (10)$$

$$s(0) = s^+, \quad u_1(0) = u_1^+, \quad u_2(0) = u_2^+, \quad s|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad (11)$$

$$u_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad u_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad c(0) = c^+, \quad p_2(0) = p_2^+. \quad (12)$$

Из уравнений (6) и (7) следует первый интеграл вида:

$$\rho_1^0 s (u_1 - \gamma) + \rho_2^0 (1 - s)(u_2 - \gamma) = A_1 = const. \quad (13)$$

С учетом краевых условий находятся значения постоянных A_1 и γ :

$$A_1 = -\gamma \rho_2^0 > 0, \quad \gamma = \frac{\rho_1^0 s^+ u_1^+ + \rho_2^0 (1 - s^+) u_2^+}{s^+ (\rho_2^0 - \rho_1^0)} < 0.$$

Для решения уравнения (10) справедливо представление:

$$c = \frac{\bar{c} e^{\frac{-d_2}{|\gamma|} \int_0^\xi s \, d\xi}}{1 + \bar{c} e^{\frac{-d_2}{|\gamma|} \int_0^\xi s \, d\xi}}, \quad \bar{c} = \frac{c^+}{1 - c^+}.$$

Известным образом [3] система (6)-(12) может быть сведена к двум уравнениям для насыщенности и давления, которые имеют вид:

$$-K(s) \frac{dp}{d\xi} + f(s) = A_1, \quad p = p_1 - \int_s^1 \frac{\rho_2^0 k_{02}}{\mu_1 \rho_1^0 + \frac{k_{02}}{\mu_2} \rho_2^0} \frac{dp_c}{ds} ds, \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(-\gamma \phi \rho_1^0 s - a(s) \frac{ds}{d\xi} + b(s) A_1 + F(s) \right) = \Gamma_1(s, c), \quad (15)$$

$$s(0) = s^+, \quad s^+ \in [0, 1], \quad s|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad (16)$$

где $f(s) = K_0 g \left(\frac{k_{01}}{\mu_1} (\rho_1^0)^2 + \frac{k_{02}}{\mu_2} (\rho_2^0)^2 \right) - \gamma \phi (\rho_1^0 s + \rho_2^0 (1 - s))$,

$$K(s) = K_0 \left(\frac{k_{01}}{\mu_1} \rho_1^0 + \frac{k_{02}}{\mu_2} \rho_2^0 \right), \quad a(s) = -\rho_1^0 K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{\rho_2^0 k_{02}}{\frac{K(s)}{K_0}} \frac{dp_c}{ds},$$

$$b(s) = \rho_1^0 K_0 \frac{k_{01}}{K(s) \mu_1}, \quad F(s) = -\rho_1^0 K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{f(s)}{K(s)} + (\rho_1^0)^2 K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} g.$$

Определение. Слабым решением задачи (15)-(16) называется функция $s(\xi)$, удовлетворяющая условиям:

$$а) \left| a(s) \frac{ds}{d\xi} \right| \leq M = const, \quad a(0) = a(1) = 0, \quad a(s) > 0;$$

$$б) 0 \leq s(\xi) \leq 1;$$

$$в) \text{ выполняются условия (16) для функции } s(\xi);$$

г) для $\forall \eta \in C^1(\Omega), \Omega \in (-\infty, 0), \eta(-\infty) = \eta(0) = 0$ выполняется следующее интегральное тождество:

$$\left(\gamma \phi \rho_1^0 s + a(s) \frac{ds}{d\xi} - b(s) A_1 - F(s), \eta_\xi \right)_\Omega = (\Gamma_1(s, c), \eta)_\Omega.$$

Теорема. При выполнении условий а)-г) существует по крайней мере одно слабое решение. Если дополнительно $\frac{k_{01}}{s} \left| \frac{dp_c}{ds} \right| \leq \mu_0 = \text{const}$, то существует точка $\xi^* \in [-\infty, \xi_1]$ такая, что $s(\xi) = 0$ для всех $\xi \leq \xi^*$.

В работе обосновано автомодельное решение модели динамики биологической ткани.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Леонова Э.И., Папин А.А., Токарева М.А., Гридюшко Е.А. Проблемы математического моделирования возникновения и роста опухоли: учебное пособие – Барнаул: АлтГУ, 2020, Текст: электронный, 77 с.
2. Tosin A. Initial/boundary-value problems of tumor growth within a host tissue // Journal of Mathematical Biology. 2013. Vol. 66, № 1-2. P. 163--202.
3. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации: монография / А.А. Папин; АлтГУ. - Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2009. - 220 с.

Математическая модель изменения мутности воды при расчистке русла реки

Т.А. Пекарская, А.Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию движения смеси воды и твердых частиц грунта, попавших в реку во время проведения работ по расчистке русла выше по течению.

Ключевые слова: *мутность, гидравлическая крупность, математическое моделирование, модель.*

Актуальность теоретического исследования задач мутности воды при расчистке русел рек связана с их широким применением в решении важных практических задач. Увеличение мутности вызывают добыча россыпей в долинах рек, работа землеройной техники в руслах (сооружение траншей трубопроводов, русловыправительные работы, расчистка русла). Расчистка русла реки – это эффективное средство борьбы с паводками. Для расчёта, прогноза и предотвращения негативного влияния поступления дополнительного мутности необходимо создание четких, универсальных алгоритмов оценки переноса взвешенных частиц ниже хозяйственных объектов.

Задача осаждения разрабатываемого грунта определённого гранулометрического состава долгое время изучается теоретически и экспериментально [1,2].

В работе [3] рассчитывается величина добавочной концентрации взвешенных веществ (добавочной мутности), поступающих в поток в результате проведения земляных работ в русле реки без учета частиц грунта, захватываемых течением со дна реки. Математические модели, представленные в работах [4,5], позволяют учитывать захват частиц грунта со дна течением реки.

В математической модели осаждения грунта поток жидкости и поток загрязненной струи считается стационарным и имеет постоянную ширину и глубину. Грунт считается состоящим из конечного числа фракций [6]. Ширина и глубина заданные постоянные значения. В дальнейшем течениями в направлениях y и z пренебрегаем ($v_y = v_z = 0$, $v_x = v_0$). При моделировании поля скорости деформация дна не учитывается в расчётах.

Система координат выбрана так, что ось абсцисс направлена вдоль центра течения реки, ось ординат – по ширине, ось аппликат по глубине, соответственно. Начало координат находится в центре загрязненной струи. Концентрация взвешенных частиц S в потоке определяется, согласно теории турбулентной диффузии [6]:

$$v_0 \frac{\partial S}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) - U \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь D – коэффициент турбулентной диффузии, U – гидравлическая крупность [6].

$$D = \frac{gHv_0}{\rho MC},$$

$$M = \begin{cases} 0,7C + 6, & 10 \leq C < 60; \\ 48, & C > 60, \end{cases}$$

где M – зависимость от коэффициента Шези C .

Граничные условия задачи имеют вид:

$$S|_{x=0} = \frac{Q\rho}{v_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y}\bigg|_{y=-l_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y}\bigg|_{y=l_1} = 0,$$

$$D \frac{\partial S}{\partial z}\bigg|_{z=0} - US|_{z=0} = 0, \quad D \frac{\partial S}{\partial z}\bigg|_{z=l_2} - US|_{z=l_2} = 0.$$

Здесь Q – объемный расход воды, ρ – плотность грунта, v_0 – средняя скорость потока.

Введем сетку с распределенными узлами $y_i = ih_y$, $z_j = jh_z$, $x_k = kh_x$; $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$, $k = 0, \dots, X$; h_z, h_y, h_x – шаг по пространственным координатам, $2l_1$ и l_2 – длина и ширина области соответственно; N, M – число разбиений $2l_1$ и l_2 .

Уравнение (1) решаем методом переменных направлений [7]. Разностная схема для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$v_0 \frac{S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - S_{i,j}^k}{0.5h_x} = D \frac{S_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + S_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + D \frac{S_{i,j+1}^k - 2S_{i,j}^k + S_{i,j-1}^k}{h_z^2} - U \frac{S_{i,j+1}^k - S_{i,j-1}^k}{2h_z},$$

$$v_0 \frac{S_{i,j}^{k+1} - S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5h_x} = D \frac{S_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + S_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + D \frac{S_{i,j+1}^{k+1} - 2S_{i,j}^{k+1} + S_{i,j-1}^{k+1}}{h_z^2} - U \frac{S_{i,j+1}^{k+1} - S_{i,j-1}^{k+1}}{2h_z}.$$

Экскаватор проводит работы по расчистке русла реки. В результате этих работ часть грунта захватывается течением реки и переносится ниже. В данной работе представлены результаты серии расчетов изменения мутности ниже по течению на расстоянии $x=20$ м от места проведения расчистки русла. В численных расчетах использовался

следующий набор модельных параметров: $Q = 70 \text{ м}^3/\text{с}$, $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$, $v_0 = 0,6 \text{ м/с}$.

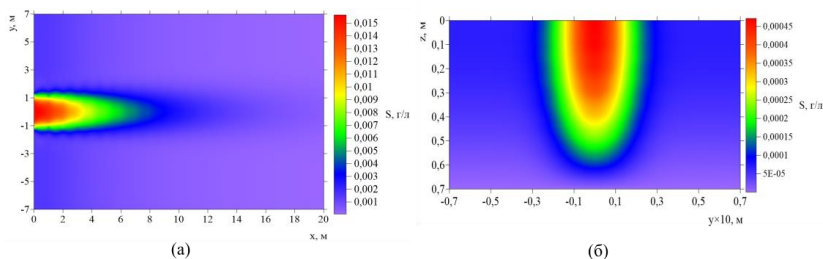


Рисунок 1 – Распределение мутности в области xy (а), распределение мутности в области yz (б): $U=0,000035 \text{ м/с}$, $x=20\text{м}$.

На рисунке 1 (а) представлено распределение мутности в русле по ширине реки (ось y) и вдоль течения реки (ось x). Мутность уменьшается вдоль центра течения реки от точки расположения экскаватора ($x=0 \text{ м}$) до $x=20 \text{ м}$ от $S=0,015 \text{ г/л}$ до $S=0,001 \text{ г/л}$. По оси ординат мутность уменьшается от центра течения к берегам реки.

На рисунке 1 (б) представлено распределение мутности в русле по ширине реки (ось y) и глубине реки (ось z). Мутность уменьшается вдоль центра течения реки при $x=20 \text{ м}$ от $S=0,00045 \text{ г/л}$ до $S=0,000005 \text{ г/л}$. По оси аппликат мутность уменьшается от поверхности реки ($z=0 \text{ м}$) до дна реки ($z=0,7 \text{ м}$).

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Н.И. Алексеевский, В.В. Иванов, Т.А. Федорова. Изменение мутности воды на участках строительства переходов трубопроводов через реки // Водное хозяйство России. 2010. № 4. – С. 42-57.
2. Промахова Е.В., Чалов С.Р. Современные технологии определения мутности воды // Маккавеевские чтения - 2014. – М.: Географ. ф-т МГУ, 2015. – С. 82-94.
3. Пекарская Т.А., Сибина А.Н. Исследование изменения мутности воды при расчистке русла реки Уса // [Электронный ресурс]: сборник

трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2022. – С. 117-120.

4. Tao, W., Wu, J. & Wang, Q. Mathematical model of sediment and solute transport along slope land in different rainfall pattern conditions// Scientific Reports 7, 2017.

5. Sibin A. N., Papin A. A. Model of internal erosion in deformable soil //AIP Conference Proceedings : 27. – Krasnoyarsk, 2021. – P. 020017.

6. РП.1.204-1-84 «Кабельные переходы связи через водные преграды с учетом требований охраны окружающей среды. Методическое руководство по проектированию». Гипросвязь. – М., 1984. – 55 стр.

7. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978 – 592 с.

Численное исследование математической модели биологической ткани как трехфазной среды с учетом питательных веществ

В.Б. Погосян, М.А. Токарева
АлтГУ, г. Барнаул

В работе приведены результаты численного исследования математической модели биологической ткани с учетом деформации внеклеточного матрикса и поступления питательных веществ в ткань.

Ключевые слова: математическое моделирование, биологическая ткань, пористость, фазовый переход, фильтрация.

Рассматривается математическая модель биологической ткани, которая представляет собой многофазную структуру. Ткань состоит из трех основных компонентов, занимающих соответствующую долю пространства: клеток, внеклеточного матрикса (ECM) и внеклеточной жидкости. В модели учитывается наличие питательных веществ в ткани [1] - [4].

При описании процесса используются уравнения баланса масс для каждой из фаз и уравнение для питательных веществ:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\mathbf{v}_0) = \Gamma_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi s \mathbf{v}_T) = \Gamma_T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi(1-s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi(1-s)\mathbf{v}_l) = \Gamma_l, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - Q, \quad (4)$$

где ϕ – пористость, s – насыщенность клеточной фазы, $(1-s)$ – насыщенность жидкости, а $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_T, \mathbf{v}_l$ – истинные скорости внеклеточного матрикса, клеток и внеклеточной жидкости соответственно, c – насыщенность питательных веществ, D – коэффициент диффузии, $\Gamma_0, \Gamma_T, \Gamma_l$ – фазовые переходы, которые включают в себя плотности фаз ($\Gamma_0 + \Gamma_T + \Gamma_l = 0$), Q – скорость потребления клетками питательных веществ. Предполагается, что плотности всех фаз одинаковые: $\rho_0 = \rho_T = \rho_l = \rho$.

Уравнения баланса импульса для каждой составляющей выглядят следующим образом:

$$\rho(1-\phi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla v_0 \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{b}_0 + \mathbf{m}_0^g, \quad (4)$$

$$\rho\phi s \left(\frac{\partial v_T}{\partial t} + v_T \cdot \nabla v_T \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_T + \mathbf{b}_T + \mathbf{m}_T^\sigma, \quad (5)$$

$$\rho\phi(1-s) \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l \cdot \nabla v_l \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_l + \mathbf{b}_l + \mathbf{m}_l^\sigma, \quad (6)$$

где $\mathbf{T}_i$ – тензор напряжений, $\mathbf{b}_i$ – внешние силы, а $\mathbf{m}_i^\sigma$ – сила взаимодействия, действующая на -ую составляющую из-за её взаимодействия с другими составляющими, которые имеют вид :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0^\sigma &= P\nabla(1-\phi) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \\ \mathbf{m}_T^\sigma &= P\nabla(\phi s) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \\ \mathbf{m}_l^\sigma &= P\nabla(\phi(1-s)) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \end{aligned}$$

где $\mathbf{M}_{ij}$ – взаимодействие между i -ым и j -ым компонентами,

$$\mathbf{T}_l = -(P\phi(1-s))\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_l,$$

$$\mathbf{T}_T = -(P\phi s)\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_T,$$

$$\mathbf{T}_0 = -(P(1-\phi))\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_0,$$

где $\hat{\mathbf{T}}_i$ – избыточное напряжение.

Предполагается, что основной вклад в силы взаимодействия вносят слагаемые, пропорциональные разнице скоростей между составляющими. Члены в $\mathbf{m}_i^\sigma$, пропорциональные скоростям массового производства Γ_i , незначительны [3]. При описании биологических процессов инерцией можно пренебречь, а также сила взаимодействия между внеклеточным матриксом и жидкостью пренебрежимо мала по отношению к силе взаимодействия между клеткой и жидкостью и, прежде всего, клеткой и ЕСМ. Кроме того, в первом приближении ЕСМ рассматривается как жесткий. Массовая сила $\mathbf{b}_T$ отражает, например, хемотаксическое или гаптотаксическое действие на клетки, а также предполагается, что $\mathbf{b}_l$ исчезает. Положим $\tilde{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{M}_{T0}^{-1}$ и рассмотрим случай, когда тензор проницаемости изотропен. Поскольку $\mathbf{M}_{T0} \ll \mathbf{M}_{lT}$, то $\tilde{\mathbf{K}}_0 \gg \mathbf{K}$. Предположим, что тензор напряжений изотропен $\hat{\mathbf{T}}_T = -\Sigma\mathbf{I}$, $\hat{\mathbf{T}}_l = 0$, $\mathbf{b}_T = \chi\nabla c$, $\Sigma(s) = s - s^0$, где $s^0 = s|_{t=0}$ – заданная функция [4]. В случае преобладания взаимодействия жидкость – клетка исходная система уравнений сводится к трем уравнениям для нахождения ϕ , s и c :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \phi s}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}_0(\phi) a(s) \nabla s) + \chi \nabla \cdot (\mathbf{K}_0(\phi) a(s) \nabla c) = \Gamma_T, \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c - Q, \end{cases}$$

где $\Gamma_T = \frac{\gamma}{\rho} \delta(s) R(\phi) g(c)$, $Q = \alpha \delta(s) R(\phi) g(c)$, $\tilde{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{K}_0(\phi) a(s)$,

$$a(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ s, & 0 < s < 1, \\ 1, & s \geq 1, \end{cases} \delta(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ s(1-s), & 0 < s < 1, \\ 0, & s \geq 1, \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \leq 0, \\ \phi(1-\phi), & 0 < \phi < 1, \\ 1, & \phi \geq 1, \end{cases} g(c) = \begin{cases} 0, & c \leq 0, \\ c, & 0 < c < 1, \\ 0, & c \geq 1. \end{cases}$$

Подобная по структуре система уравнений исследована в работе [5]. Полученная система уравнений дополняется следующими начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) = s_0(t), \frac{\partial s}{\partial x}(L, t) = s_1(t), s(x, 0) = s^0(x), \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), c(0, t) = c_0(t), c(L, t) = c_1(t), c(x, 0) = c^0(x), \end{cases}$$

где $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$, $c_0(t)$, $c_1(t)$, $c^0(x)$ – заданные функции.

Данная система уравнений была исследована численно. Была введена сетка в следующем виде: $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$. Уравнение для пористости имеет аналитическое решение, а уравнения для насыщенности клеточной фазы и питательных веществ аппроксимировались следующим образом в неявном виде с первым порядком по времени и вторым порядком по пространству:

$$\begin{aligned} \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} - \left(L_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - L_{i-\frac{1}{2}}^n \frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \\ + \chi \left(L_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{h^2} - L_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{h^2} \right) = \Gamma_{T_i}^n \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} = \frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1}}{h^2} - Q_i^n \end{aligned}$$

где $L_{i \pm \frac{1}{2}}^n = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_0(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + \tilde{\mathbf{K}}_0(\phi_i^n, s_i^n)}{2}$.

Результаты численного исследования приведены на рисунках 1-2.

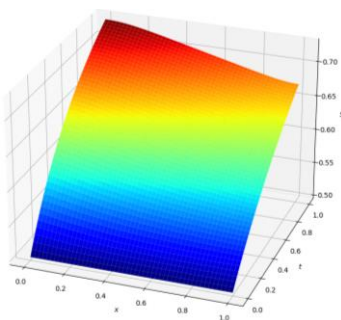


Рисунок 1 – Насыщенность
клеточной фазы

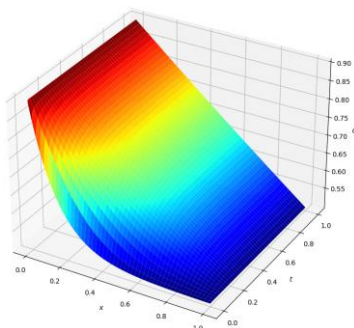


Рисунок 2 – Распределение
питательных веществ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Graziano L., Preziosi L., Mollica F., Rajagopal K.R. Modeling of Biological Materials. Mechanics in tumor growth, 2007, 357 p.
2. Preziosi, L., and Farina, A., On Darcy's law for growing porous media // Int. J. Nonlinear Mech., 2001, pp. 485–491.
3. Kowalczyk, R., Preventing blow-up in a chemotaxis model // J. Math. Anal. Appl., 2005, pp. 566–588
4. Astanin, S.V., Tosin, A. Mathematical model of tumour cord growth along the source of nutrient // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2, pp. 153-177.
5. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – 2015. – №1/2, с. 136-140.

**Многомасштабные модели
гетерофазных сплошных сред***С.А. Саженков**ИГиЛ СО РАН, Новосибирск*

Доклад посвящён исследованию трёх задач динамики гетерофазных сплошных сред методами многомасштабного анализа. Сначала рассматривается проблема импульсного управления процессом тепломассопереноса и на основании модели достаточно общего вида, поставленной на «медленной» шкале времени, конструируется корректная двухмасштабная эффективная модель, которая в своей постановке включает поставленное на «быстрой» шкале времени уравнение эволюции тепла (массы) в инфинитезимальном переходном слое, содержащее полную информацию о профиле импульсного управления. Затем рассматривается проблема разрешимости краевой задачи для регуляризованных уравнений, описывающих пространственные стационарные баротропные течения много-компонентных многоскоростных сред с достаточно общей формой уравнения состояния для давления и без каких-либо упрощений в вязких членах, кроме физически необходимых. Доказывается существование сильных обобщённых решений этой задачи. Наконец, в рамках теории двухмасштабной гомогенизации, применённой к уравнениям Навье–Стокса и Кана–Хиллиарда, на строгом математическом уровне проводится вывод двухмасштабной модели фильтрации двух смешивающихся жидкостей через пористый грунт в условиях сильной смесимости. С помощью вновь выведенной модели изучаются имеющие важное значение в приложениях вопросы о характере анизотропии проницаемости и о роли капиллярных эффектов в задачах вытеснения одной фазы в галерее пор с помощью другой.

Ключевые слова: *тепломассоперенос, многофазная сплошная среда, импульсное уравнение, краевая задача, гомогенизация.*

1. Импульсное уравнение теплопроводности с инфинитезимальным переходным слоем Вольтерра. Проводится асимптотический анализ при $\varepsilon \rightarrow 0 +$ семейства решений $\{u = u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ задачи Коши для полулинейного параболического интегро-дифференциального уравнения Вольтерра

$$\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t) + \int_0^t K_\varepsilon^\tau(t) K_\varepsilon^\tau(s) \beta(x, u(x, s)) ds, \quad (x, t) \in \Pi_\tau, \quad (1)$$

в котором $K_\varepsilon^\tau(\cdot)$ – это кусочно-гладкое неотрицательное ядро с носителем на сегменте $[\tau, \tau + \varepsilon]$ и со средним, равным единице, слабо* сходящееся (при $\varepsilon \rightarrow 0 +$) в пространстве мер Радона на $(0, T)$ к односторонней дельта-функции Дирака $\delta_{(\cdot=\tau+0)}$, $\Pi_\tau = \mathbb{R}_x^d \times (0, T)$ – пространственно-временной слой, $T > 0$ и $\tau \in (0, T)$ – два фиксированных момента времени и β – заданная сублинейная по u и достаточно гладкая вещественная функция. Начальная функция (данные Коши)

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (2)$$

является 1-периодической и принадлежит пространству Соболева

$W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}_x^d)$. Заметим, что уравнение (1) вытекает из системы

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \Delta_x u(x, t) + K_\varepsilon^\tau(t) V(x, t), \\ \frac{d}{dt} V(x, t) &= K_\varepsilon^\tau(t) \beta(x, u(x, t)), \end{aligned}$$

моделирующей управление с обратной связью, в котором функция управления V определяется по функции состояния u посредством неявного механизма, выражаемого обыкновенным дифференциальным уравнением. В зависимости от конкретной постановки в механике, функция u может играть роль, например, массовой концентрации компоненты многокомпонентной (многофазной) среды, температуры, давления.

Для фиксированных значений $\varepsilon > 0$ в случае, когда $p > d$, существование и единственность слабого решения задачи (1)-(2) гарантируются известными теоретическими положениями [1].

Основной результат работы состоит в следующем.

Установлено, что при $\varepsilon \rightarrow 0 +$ семейство $\{u = u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ слабых решений задачи (1)-(2) и семейство $\{\bar{u}_\varepsilon: \mathbb{R}_x^d \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}\}$ определённых по формуле $\bar{u}_\varepsilon(x, \bar{t}) := u_\varepsilon(x, \tau + \varepsilon \bar{t})$ ($\bar{t} \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$) перемасштабированных слабых решений задачи (1)-(2) сходятся к паре функций $(u, \bar{u})$, которая служит единственным сильным решением двухмасштабной задачи

$$\partial_t u = \Delta_x u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_x^d \times ((0, T) \setminus \{t = \tau\}),$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} = \int_0^{\bar{t}} 4K(\bar{t})K(\bar{s})\beta(x, \bar{u}(x, \bar{s}))d\bar{s}, \quad (x, \bar{t}) \in \mathbb{R}_x^d \times (0, 1),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_x^d,$$

$$\bar{u}(x, 0+) = u(x, \tau - 0), \quad u(x, \tau + 0) = \bar{u}(x, 1 - 0), \quad x \in \mathbb{R}_x^d,$$

$$u \text{ и } \bar{u} \text{ 1-периодичны по } x_i \quad (i = 1, \dots, d).$$

Отметим, что предельные соотношения $u_\varepsilon \rightarrow u$ и $\bar{u}_\varepsilon \rightarrow \bar{u}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются сильно в пространствах $L^2((0, 1)^d \times (0, T))$ и $L^2((0, 1)^d \times (0, 1))$, соответственно.

Представленное в настоящем параграфе исследование в полном виде опубликовано в [2].

2. Исследование краевой задачи динамики многокомпонентных сред. Рассматривается следующая краевая задача для регуляризованных уравнений, описывающих стационарные баротропные течения многокомпонентных многоскоростных сплошных сред:

$$-\varepsilon \Delta_x \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) + \varepsilon \varrho = \varepsilon \frac{m}{|\Omega|}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \varrho_i u_i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m}{|\Omega|} \alpha_i u_i + \frac{1}{2} \varrho_i (v \cdot \nabla_x) u_i \\ + \frac{1}{2} \operatorname{div}_x(\varrho_i v \otimes u_i) + \alpha_i \nabla_x p(\varrho) = \operatorname{div}_x \mathbb{S}_i + J_i + \varrho_i f_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla_x \varrho \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

В системе (3)-(5) ϱ — неотрицательная плотность многокомпонентной среды, α_i — объёмная доля i -й компоненты среды, $\varrho_i = \alpha_i \varrho$ — плотность i -й компоненты в среде, $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ — средневзвешенная скорость среды, u_i — скорость i -й компоненты, p — давление в среде, которое определяется плотностью ϱ , $\mathbb{S}_i$ — тензоры вязких напряжений компонент, которые определяются по закону

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^N (\lambda_{ij} (\operatorname{div}_x u_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}_x(u_j)),$$

λ_{ij} и μ_{ij} – коэффициенты объёмной и сдвиговой вязкости, соответственно, J_i – векторные поля, отвечающие за обмен импульсами между компонентами, $|\Omega|$ – мера объёма, занятого всем континуумом, m – заданная полная масса континуума, ε – заданный положительный параметр регуляризации. Уравнение (3) является регуляризованным уравнением баланса массы, -е уравнение в (4) – это регуляризованное уравнение баланса количества движения (импульса) i -й компоненты, первое из краевых условий (5) – это классическое условие прилипания, второе из условий (5) возникает как техническое следствие регуляризации и с физической точки зрения является условием непротекания.

На коэффициенты уравнений (3) и (4) накладываются некоторые дополнительные предположения, хорошо согласованные с фундаментальными положениями механики.

Для системы (3)-(5) удалось построить новые априорные оценки решений и с их помощью, применяя теорему Лерэ–Шаудера о неподвижной точке, доказать существование по меньшей мере одного сильного решения, что является основным результатом работы. Сильное решение понимается в смысле следующего определения.

Определение S. *Сильным решением задачи (3)-(5) называется неотрицательная функция $\varrho \in W_\sigma^2(\Omega)$ с некоторым $\sigma > 3$, и векторные поля $u_i \in W_\sigma^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, N$, такие, что уравнения (3) и (4) выполняются почти всюду в Ω , и почти всюду на $\partial\Omega$ верны краевые условия (5).*

Замечание. В дальнейшем планируется совершить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и его посредством обосновать разрешимость первой краевой задачи для системы стационарных уравнений баротропных течений многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости.

Представленное в настоящем параграфе исследование в полном виде опубликовано в [3].

3. Фильтрация смешиваемых жидкостей. Исследованы уравнения фильтрации двухкомпонентной смешиваемой жидкости в случае сильной смешиваемости. В рамках теории фазового поля, основанной на понятии параметра порядка, вывод таких уравнений опирается на теорию двухмасштабной гомогенизации уравнений Навье–Стокса и Кана–Хиллиарда для течения двухкомпонентной смешиваемой жидкости в перфорированной области. При сильной

смешиваемости масштабы разделяются, т. е. микро-уравнения могут быть решены независимо от макро-уравнений, хотя макро-уравнения «перевязаны» с микро-уравнениями. Установлено, что при оценке проницаемости пористой среды важную роль играют микро-уравнения. Численными методами исследован вопрос об анизотропной проницаемости для двумерных течений. Для случая одномерных течений в пористом образце установлено, что смешиваемая фильтрация может происходить даже при отсутствии перепада давления, т.е. лишь за счет капиллярных сил. Заметим, что существование решений у двухмасштабной модели сразу следует из фундаментальной теоремы о двухмасштабной сходимости в силу предельного перехода. Вопрос о единственности решения двухмасштабной модели является открытым. Также открытым является вопрос о разделении масштабов в этой модели и построении эффективной макроскопической модели, не содержащей микроскопическую переменную u . Исследование двухмасштабной модели является целью дальнейшей работы.

Представленное в настоящем параграфе исследование в полном виде будет опубликовано в [4].

Исследование представляемых в докладе задач выполнено при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020).

Библиографический список

1. *M.L. Heard, S.M. Rankin III.* Weak solutions for a class of parabolic Volterra integrodifferential equations // J. Math. Anal. Appl. 1989. Vol. 139. P. 78-109.
2. *I. Kuznetsov, S. Sazhenkov.* The impulsive heat equation with the Volterra transition layer // J. Elliptic Parabol. Equ. 2022. Vol. 8, No. 2. P. 959-993.
3. *А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин.* Стационарные решения краевой задачи для уравнений баротропного течения многокомпонентных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19, № 2. С. 959-971.
4. *В.В. Шелухин, В.В. Крутько, К.В. Трусов.* Фильтрация сильно смешиваемых жидкостей на основе двухмасштабной

гомогенизации уравнений Навье–Стокса и Кана–Хиллиарда // ПМТФ. 2023 (в печати).

Неизотермическая фильтрация воды и воздуха в поропругом льду с учетом примесей

М.А. Токарева, А.А. Папин

АлтГУ, г. Барнаул

В работе приведена математическая модель неизотермической двухфазной фильтрации в твёрдом скелете с переменной пористостью, которая описывает фильтрацию воды и воздуха в ледовом поропругом скелете с наличием примесей в жидкой фазе.

Ключевые слова: математическое моделирование, пористость, фазовый переход, двухфазная неизотермическая фильтрация, ледовый покров, примеси.

Ледовый покров представляет собой пористый скелет, в порах которого находятся вода и воздух. Для описания процесса используется следующая система уравнений [1]-[4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\varphi)\rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\varphi)\rho_i \vec{v}_i) &= I_{wi} + I_{ai}, \\ \frac{\partial(\rho_w s_w \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \varphi s_w \vec{v}_w) &= I_{iw} + I_{aw}, \\ \frac{\partial(\rho_a s_a \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \varphi s_a \vec{v}_a) &= I_{ia} + I_{wa}, \\ s_w \varphi (\vec{v}_w - \vec{v}_i) &= -K_0(\varphi) \frac{k_{01}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g}), \\ s_a \varphi (\vec{v}_a - \vec{v}_i) &= -K_0(\varphi) \frac{k_{02}}{\mu_a} (\nabla p_a - \rho_a \vec{g}), \\ \nabla \cdot \vec{v}_i &= -\varphi \left(\alpha(\theta) p_e + \beta(\theta) \frac{dp_e}{dt} \right), \\ \nabla p_{tot} &= \rho_{tot} \vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\varphi) \eta(\theta) \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x} + \left(\left\{ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x} \right\}^* \right) \right) \right), \\ (\rho_a c_a s_a \Phi + \rho_w c_w s_w \Phi + \rho_i c_i (1-\Phi)) \frac{\partial \theta}{\partial t} &+ (\rho_a c_a s_a \Phi \vec{v}_a + \rho_w c_w s_w \Phi \vec{v}_w + \\ \rho_i c_i (1-\Phi) \vec{v}_i) \nabla \theta &= \nabla \cdot (\lambda_{tot}(\Phi) \nabla \theta) - L_i I_{ia} - v I_{iw}, \\ S + \frac{\partial}{\partial t} (\phi s_w \sigma) + \nabla \cdot (\phi \vec{u}_w - D \nabla \sigma) &= 0, \end{aligned}$$

где φ – пористость, s_w, s_a – насыщенности воды и воздуха ($s_w + s_a = 1$), $\vec{v}_i, \vec{v}_w, \vec{v}_a, \rho_i, \rho_w, \rho_a$ – истинные скорости и плотности фаз, I_{lm} – интенсивность перехода массы из l-фазы в m-фазу, $K_0(\Phi)$ – тензор фильтрации, k_{01}, k_{02} – проницаемости воды и воздуха, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ – заданные параметры среды, p_i, p_w, p_a – давления льда, воды и воздуха соответственно, $p_e =$

$(1 - \phi)(p_i - p_f)$ – эффективное давление, $p_f = s_a p_a + s_w p_w$, p_{tot} – общее давление, $\rho_{tot} = (1 - \phi)\rho_i + \phi(s_a \rho_a + s_w \rho_w)$ – общая плотность, $\eta(\theta)$ – вязкость пористого скелета, * – операция транспонирования, c_i , c_w , c_a – теплоёмкости льда, воды и воздуха, L_i – удельная теплота сублимации льда, v – удельная теплота плавления льда. λ_{tot} – теплопроводность среды в целом, σ – концентрация примеси, $\vec{u}_w = \phi s_w \vec{v}_w$, $D = \tilde{\eta} + \lambda_0 |\vec{v}_w|$ – коэффициент диффузии, $\tilde{\eta} = \text{const} > 0$ – коэффициент молекулярной диффузии, $\lambda_0 = \text{const} > 0$ – параметр дисперсии, $S = -\Gamma s_w (\sigma_* - \sigma)$, $\Gamma = \text{const} > 0$, $\sigma_* = \text{const} \in [0, 1]$.

В данной постановке учитываются фазовые переходы вода-лед-воздух, принимается гипотеза локального термодинамического равновесия (температура в каждой фазе одинаковая), наличие примеси в жидкой фазе перевязано с интенсивностью перехода массы из жидкой фазы в другие.

В отсутствие примесей получены решения в квадратурах для фильтрации в тонком пороупругом слое [5], а также исследовано на устойчивость решение системы уравнений [6]. В докладе рассматриваются свойства решения неізотермической задачи с учетом примеси.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ТУБИТАК по НИР №20–58–46009.

Библиографический список

- А.А. Папин, Ю.Ю. Подладчиков, Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде, Известия Алтайского государственного университета, 85, 2015, 131-135.
- A. Fowler, Mathematical Geoscience, Springer-Verlag London Limited, 2011.
- L.S. Kuchment, P. Romanov, A.N. Gelfan and V.N. Demidov, Use of satellite-derived data for characterization of snow cover and simulation of snowmelt runoff through a distributed physically based model of runoff generation, Hydrol. Earth Syst. Sci., 14, 2010, 339–350.
- А.Н. Сибин, А.А. Папин Моделирование движения консервативной примеси в тающем снеге // Снежный покров, атмосферные осадки, аэрозоли: материалы IV Байкальской международной научной конференции -стратегической сессии (21 – 25 июня 2022 г.). – Иркутск: Изд-во ООО «Репроцентр А1», 2022. – 204 с.

A.A. Beregovykh, M.A. Tokareva, A.A. Papin Two-phase filtration in a thin poroelastic layer // AIP Conference Proceedings 2528, 020008 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0106334>

А.А. Береговых, М.А. Токарева, Папин А.А. Фильтрация воды и воздуха в пороупругом льду // МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2022. – с. 70-73.

**О применении метода конечных элементов к задаче
определения напряженного состояния в упруго-
пластической области**

А.В. Устюжанова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается задача определения пластических областей в упруго-пластическом материале. Алгоритм численных расчетов основан на методе конечных элементов.

Ключевые слова: *напряженное состояние, пластическая область, метод конечных элементов.*

В процессе нагружения напряжённое состояние в упруго-пластическом материале характеризуется возможностью возникновения упругих, пластических областей и областей упругой разгрузки [1-2].

В рамках метода последовательных нагружений бесконечно малое приращение деформаций в упруго-пластической области может быть представлено в виде суммы упругой $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластической $d\varepsilon_{ij}^p$ составляющих

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Возникновение пластических деформаций в материале обусловлено критерием $f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0$, где f – функция текучести, κ – предел текучести.

Опишем алгоритм, реализующий процесс нахождения пластических областей в упруго-пластическом материале.

В рамках метода конечных элементов расчетная область разбивается на конечные элементы [3]. Процесс нагружения исследуемой области, занятой упруго-пластическим материалом, состоит из конечного числа шагов, в общем случае, определяемого в ходе решения задачи. Исходное напряжённое состояние характеризуется точками, находящимися внутри поверхности текучести $f(\sigma_{ij}) = 0$.

На каждом шаге нагружения связь приращений напряжений с приращениями деформаций определяется для упругих элементов

упругой матрицей $[D]$. Для элементов, находящихся в пластических областях, такая связь определяется упруго-пластической матрицей $[D]^{ep}$.

Для корректировки величин очередных шагов процесса нагружения применяется метод пробных шагов с расчётами коэффициентов перегрузки для наиболее нагруженных элементов.

На каждом шаге нагружения используется информация с предыдущего шага о напряжённо-деформированном состоянии в исследуемой области. Начальные напряжения и деформации предполагаются нулевыми.

Представим общую схему численных расчётов в случае плоской прямоугольной области, которая может содержать отверстия [4].

1) Описание и ввод данных. Определение всех параметров задачи. В частности, задаются значения модуля упругости, коэффициента Пуассона, предел текучести, размеры прямоугольной области.

2) Генерация проблемно-ориентированной конечно-элементной сетки для заданной области.

Определяются массивы координат узлов построенной сетки $x(i)$, $y(i)$, $i = 1, \dots, KY$, где KY – количество узлов.

3) Определение параметров начального состояния.

Начальные перемещения и напряжения являются нулевыми:

$$u_i^{(0)}(k) = 0, \quad k = 1, \dots, KY, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(l) = 0, \quad l = 1, \dots, KE, \quad i, j = 1, 2,$$

где KE – количество конечных элементов.

4) Задание очередного шага по параметру нагружения.

Для получения необходимого расчётного шага нагружения, обеспечивающего определение упруго-пластических границ, в рамках данного шага используются пробные шаги.

5) Пробный шаг нагружения. Задание величины приращения параметра нагружения.

6) Построение матрицы жёсткости с учётом упругой или упруго-пластической связи между приращениями напряжений и деформаций в зависимости от упругого или упруго-пластического состояния каждого конечного элемента на предыдущем шаге нагружения.

7) Задание граничных условий. Модификация матрицы жёсткости основной системы конечных элементов. Внесение изменений в правые части основной системы конечных элементов.

8) Решение линейной системы уравнений методом Гаусса. Получение полей приращений перемещений в исследуемой области $du_i(k)$, $k=1,.., KY$, $i=1, 2$. Нахождение полей приращений деформаций $d\varepsilon_{ij}(l)$, $l=1,.., KE$, $i, j=1, 2$.

9) Получение полей приращений напряжений в исследуемой области $d\sigma_{ij}(l)=0$, $l=1,.., KE$, $i, j=1, 2, 3$, при этом значения девиатора напряжений $s_{ij}(l)$ и интенсивность напряжений $T(l)$ берутся с предыдущего шага нагружения.

Полные напряжения в каждом элементе находятся путём суммирования приращений напряжений для выполненных шагов нагружения:

$$\sigma_{ij}^{(m)}(l) = \sigma_{ij}^{(m-1)}(l) + d\sigma_{ij}^{(m)}(l), \quad l=1,.., KE, \quad i, j=1, 2, 3.$$

Для каждого элемента вычисляются значения среднего давления, девиатора напряжений, интенсивности напряжений, функции текучести.

Коэффициент перегрузки для каждого элемента определяется по формуле:

$$k_{\pi} = \frac{f^{(m-1)}(l) - f^{(m)}(l)}{f^{(m-1)}(l)}, \quad l=1,.., KE,$$

где $f^{(m-1)}(l)$ и $f^{(m)}(l)$ – значения функции текучести, найденные соответственно на предыдущем $(m-1)$ -ом и текущем m -ом шагах нагружения, для l -го элемента.

Выбирается наиболее нагруженный элемент, то есть элемент с наибольшим коэффициентом перегрузки.

10) Исследование изменений упруго-пластических границ. Если эти изменения превосходят допустимые или совсем отсутствуют, по сравнению с предыдущим основным шагом нагружения, то величина приращения параметра нагружения корректируется с учётом наибольшего коэффициента перегрузки и расчеты повторяются с пятого пункта.

В противном случае переходим к следующему пункту.

11) Нахождение всех характеристик напряжённо-деформированного состояния в исследуемой области.

12) Проверка выполнения полного нагружения. Если заданная величина параметра нагружения полностью исчерпана приращениями на предыдущих шагах нагружения, то численные расчеты завершены. В противном случае необходимо продолжить с четвёртого пункта.

Библиографический список

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
2. Райс Дж.Р. Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика / Труды III Международного конгресса IUTAM. – М.: Мир, 1979. – С. 439–471.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541.
4. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. Численное исследование напряжённо-деформированного состояния в окрестности системы отверстий и сдвиговых трещин // Известия АлтГУ. – Барнаул: АлтГУ, 2012. – №1/1(73). – С. 30–31.

СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА

УДК 519.8

Об одном классе моделей ограниченной рациональности

*Г.И. Алгазин
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию динамики принятия коллективных решений в условиях неполного знания и ограниченной рациональности

Ключевые слова: *ограниченная рациональность, модель коллективного поведения, сходимость, равновесие.*

Рассматривается динамическая система в дискретном времени, состоящая из взаимосвязанных целенаправленных агентов. Имеется несколько объяснений, почему агенты могут принимать решения, отличные от рациональных решений, предсказанных теорией. Среди них [1]:

- ограниченность когнитивных возможностей агентов;
- трудоемкость поиска и вычисления рациональных решений;
- отсутствие уверенности в том, что другие агенты выберут рациональные действия;
- неполная информированность агентов при принятии решений.

Поэтому имеются основания для рассмотрения «условно оптимизационных» моделей поведения. Исследованием динамики поведения агентов в условиях ограниченной рациональности занимается теория коллективного (группового) поведения.

Наиболее распространенной моделью динамики коллективного поведения является следующая модель [2]. В каждый текущий $(t + 1)$ -й момент времени каждый из агентов наблюдает действия $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$ всех агентов, которые они выбрали в предыдущий момент времени t , и выбором величины шага γ_i^{t+1} в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ корректирует свое текущее состояние q_i^t , следуя итерационной процедуре:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь: $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ – параметр, выбираемый i -м агентом, $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$ – «обстановка» i -го агента, $x_i^t(q_{-i}^t)$ – текущее положение цели i -го агента – это состояние, которое обеспечивает ему максимальное значение целевой функции в момент времени t .

Можно привести следующие доводы в пользу выбора этих моделей ограниченной рациональности:

- динамика поведения рациональных агентов рассматривается при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. От агентов, как правило, требуется только знание уже реализовавшихся во времени состояний других агентов;

- свойства динамик (1) исследованы более подробно по сравнению с другими моделями коллективного поведения, и при этом, как показывают имитационные эксперименты, они достаточно адекватно описывают поведение людей в имитационных и деловых играх;

- равновесия системы в условиях полного знания, как правило, являются и равновесиями динамик коллективного поведения.

Положительным исходом динамики считается достижение состояния, которое в той или иной мере удовлетворяющее интересам всех целенаправленных агентов. Однако, равновесие динамики коллективного поведения не всегда достижимо даже в случае, когда в модели с полным знанием оно существует.

Влияние на сходимость могут оказывать:

- начальные приближения $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$,
- величины шагов γ_i^{t+1} , выбираемые агентами в направлении текущей цели,
- число агентов на рынке (n),
- рефлексия и «интеллект» агентов.

Некоторые динамики, отличающиеся начальными состояниями, при прочих равных условиях, в одних случаях могут сходиться к равновесию, в других – расходиться. Но больший интерес представляют динамики, сходящиеся при любых начальных данных.

Как правило, если все агенты делают малые шаги, то динамики сходятся, если делают большие шаги, то расходятся. Если агенты действуют разнонаправлено, т.е. одни делают малые шаги, а другие – большие шаги, то выводы о сходимости не однозначны.

Наблюдаемая закономерность проявляется в том, что с увеличением числа агентов, чтобы обеспечить сходимость динамик (1), агентам следует уменьшать шаги.

В моделях коллективных решений под рефлексией понимаются попытки агента, связанные с предсказанием информированности и действий других агентов с целью устранения неопределенности при

принятии им решения и формировании наилучшего отклика (ответа, реакции) на их действия. В модели (1) рефлексия агента находит свое выражение при расчете его текущей цели.

Приведенные в данной статье выводы относительно сходимости моделей (1) получены на основании авторских аналитических и имитационных исследований моделей поведения агентов на рынках олигополии Курно и Штакельберга при неполной информации (см., например, [3, 4]).

Возможны различные модификации модели (1). Наиболее распространенная модификация предполагает, что агенты не могут выбирать отрицательные действия

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i^t(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i^t(q_{-i}^t) \leq 0. \end{cases}$$

Свойства таких динамик изучены в [3, 4].

Библиографический список

1. Новиков Д.А. Ограниченная рациональность и управление // Математическая теория игр и её приложения. – 2022. – т. 14. – вып. 1. – С. 49–84.
2. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
3. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Automation and Remote Control. – 2022. – vol. 83. – no. 3. – pp. 367–388.
4. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Сходимость по норме динамики коллективного поведения в рефлексивной модели олигополии с лидерами // Информатика и автоматизация. – 2023. – № 22(3). – С. 616–646. DOI:10.15622/ia.22.3.5. www.ia.spcras.ru (онлайн)

Методика стимулирования рабочей бригады с целью сокращения потерь и дефектов при эксплуатации промышленного оборудования

*Д.Т.Курушбаева
АлтГУ, г. Барнаул*

В данной статье рассмотрена методика стимулирования рабочих команд, зависимость конечного результата от активности персонала и методика расчета трудовой характеристики работников. Результатом методики выступает оптимальная доля вознаграждения персонала от их вклада в прибыль промышленного предприятия.

Ключевые слова: *бережливое производство, математическое моделирование бизнес-процессов, дополнительный доход, стимулирование работников, прибыль фирмы.*

В концепции бережливого производства одной из значимых стратегий является стратегия повышения эффективности производства [1]. Также в концепцию входит стратегия привлечения рабочих команд для решения проблем сокращения простоев оборудования при их переналадке, текущем ремонте и устранении дефектов качества производимой продукции.

При реализации этой стратегии главным является выделение зоны ответственности деятельности рабочих команд, оценки их вклада в прибыль производства, определение оптимальной доли прибыли в качестве материального вознаграждения и вопросы оформления параметров стимулирования в трудовых контрактах [1, 2].

В данной работе для решения перечисленных задач стимулирования персонала по конечным результатам в условиях промышленных предприятий предложена расчетная методика, которая существенно использует математические и кибернетические методы управления персоналом [3, 4]. В организационном аспекте взаимодействия работников и работодателей на промышленном предприятии методика стимулирования персонала разработана на основе теории активных систем [5]. В качестве предметной области рассмотрена задача стимулирования рабочих бригад, которые обеспечивают работоспособность промышленного оборудования с

целью сокращения простоев работы производственных участков и цехов в целом.

Рассмотрим показатели и термины, которые используются при описании трудовых процессов [3, 4]: **Часовая норма труда** (ЧНТ) – количественный показатель объемов работы работников на локальном рынке труда, определяется как объем работы, который среднерыночный работник выполняет в течение одного рабочего часа. **Активность работника** – при математическом моделировании поведения работника определяется объемом работы (в ЧНТ), который работник выполняет в течение рабочего дня или рабочей смены. **Математическая модель активности работника** – формула зависимости фактической трудовой активности работника (ФТА), т.е. объема работы, который работник выполнит в среднем за рабочий день при сдельной системе оплаты его труда в зависимости от условий стимулирования. При сдельной системе оплаты труда ФТА зависит от уровня расценки p , заданной работодателем [3].

Трудовая активность работников существенно зависит от их личностных и квалификационных показателей, в том числе от **потенциала трудовой активности работника** (ПТА) и **валентности**. В нашей методике и математических моделях используются следующие их определения [3]: ПТА – количественное выражение предельной трудовой активности работника (среднерыночного и индивидуального) как объема работы, который работник способен выполнить в среднем за рабочий день. Этот показатель используется при идентификации математической модели поведения работника и определяется по формуле: $ПТА = ФТА_n / \alpha$, где $ФТА_n$ – нормативная величина фактической трудовой активности данного работника; α – среднерыночный коэффициент интенсивности труда рассматриваемого локального рынка.

Валентность работника – одна из существенных характеристик работника, которая определяет его трудовую активность, наряду с продолжительностью рабочего дня (T), индексами квалификации ($k_{кв}$) и интенсивности труда ($k_{ин}$). Она оценивает степень отклика работника на денежное вознаграждение и зависит как от трудового климата организации, так и от личностных факторов вовлеченности работника в трудовой процесс. В математической модели активности работника для оценки показателя валентности (v) используется индексный метод в экономике. Его базовое значение, равное единице, принимается для характеристики среднерыночных работников. Значение индивидуального работника может быть больше ($v > 1$) или меньше ($v < 1$) базового значения.

В работе [3] феноменологически введена зависимость оптимальной активности работника от ставки оплаты труда $\Phi TA = \tilde{x}(p)$ в виде следующего выражения:

$$\Phi TA = \tilde{x}(p) = \begin{cases} \text{ПТА} - \frac{\delta}{p^m}, & \text{если } p > p_{\min} = \left(\frac{\delta}{\tilde{x}}\right)^{\frac{1}{m}}; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \delta = \frac{\Phi TA_H \cdot (1-\alpha) \cdot p_H^m}{\alpha \cdot v^m},$$

$$\Phi TA_H = k_{\text{ин}} \cdot k_{\text{кв}} \cdot T. \quad (1)$$

где m , p_H – дополнительные параметры функции активного поведения работника, которые следует определить для каждого работника на локальном рынке труда.

Рассматриваем зависимость конечного результата ДП от активности персонала. В работе [3] эта характеристика представлена следующей формулой:

$$\text{ДП} = C \cdot \Phi TA^n. \quad (2)$$

Для определения двух параметров (C, n) в нашей методике предлагается использовать аналитические и экспертные оценки значений двух экономических показателей R и R_H . Показатель R соответствует максимальной прибыли предприятия, которую может обеспечить стимулируемая рабочая бригада при их активности на уровне ПТА и R_H – обозначает норму прибыли при активности работников на уровне ΦTA_H . Тогда искомые оценки вычисляются решением системы двух нелинейных уравнений, которое можно получить программно или конечными формулами.

Рассмотрим методику расчетов параметров системы стимулирования. Рассматриваем рабочее место рабочей команды, на котором можно получать ежедневно в среднем дополнительную прибыль для промышленного предприятия в размере $\text{ДП} \in [0, R]$. Предполагаем, что персонал стимулируется из этой дополнительной прибыли. Требуется найти оптимальную долю σ^* дополнительного дохода, которую необходимо направить на стимулирование, чтобы доход предприятия был максимальным и оценить экономические показатели внедрения системы стимулирования для промышленного предприятия.

Решение по нашей методике можно получать аналитиками предприятия графическим методом с использованием графиков функций (1) и (2). Порядок решения:

- строим график зависимости объема продажи труда ΦTA от расценки по формуле (1);
- строим график зависимости (2) дополнительной прибыли от фактической трудовой активности ΦTA ;

- задаем сетку для возможных значений ФТА, которая обеспечивает заданную точность расчета;
- для каждого значения ФТА рассчитываем ДП, затраты на оплату труда и чистый доход фирмы;
- выбираем уровень ФТА*, при котором чистый доход предприятия является максимальным.

Рассмотрим порядок реализации механизма стимулирования для одного работника:

- В контракте данного работника в разделе «премирование» указываем долю вознаграждения σ^* в конечном результате от валовой прибыли фирмы, при которой активность работников будет равной ФТА*.

- Оговариваем точно способ расчета валовой прибыли и рассчитываем фактическую величину валовой прибыли, например, за год или месяц. Обозначим ее через $ДП_{\phi}$.

Вычисляем размер премии $ПР$ работникам: $ПР = ДП_{\phi} \cdot \sigma^*$. Показатели оценки и размер доли премии должны знать работники рабочей команды и быть согласны с их значениями.

С помощью компьютерной программы, реализованной на основании рассматриваемой методики расчетов механизма стимулирования, получены следующие результаты для модельного примера в условиях России (таблица 1).

Таблица 1 – Результаты системы стимулирования труда в среднем за рабочий день

№	Наименование показателей	Значение
1	Оптимальная оплата труда (расценка), руб./ЧНТ	12,61
2	Ожидаемый доход предприятия ДП, руб.	3347,58
3	Затраты на оплату труда, руб./раб.день	410,83
4	Доля вознаграждения в валовой прибыли фирмы	12,3%
5	Чистый доход предприятия, руб./раб.день	2936,74
6	Коэффициент интенсивности труда	65,0%

Достоинством методики расчетов является возможность реализации автоматного поведения в трудовых процессах [3]. Эффект автоматного поведения работников состоит в том, что без внешнего контроля и управления при внедрении системы стимулирования, предприятие получает расчетные экономические показатели. А суть

этого принцип можно описать так: «Если работник получит фактическую заработную плату больше ожидаемой оплаты труда исходя из рыночной его оценки, то он увеличит свою активность. Верно и обратное»

На практике следует ожидать реализацию автоматного поведения при дополнительных условиях. Важно, чтобы рабочая команда была «рыночно воспитанной», т.е. знала действительную стоимость своего труда на данном локальном рынке. Это нужно, что бы работники правильно оценивал равновесную заработную плату на локальном рынке труда. Кроме того, работники должны быть профессионалами в своей квалификационной группе и правильно оценивать экономический эффект своих инновационных решений. Также команда должна знать условия распределения прибыли и быть уверена в том, что договор с дирекцией удовлетворяет требованиям «обязующего соглашения» [3]. Подобные механизмы стимулирования описаны в работе [5].

Библиографический список

1. Бережливое производство: учебник / Н.С. Зинчик, О.В. Кадырова, Ю.И. Растова / Под общ.ред. Бездудной А.Г. – М.: Кнорус, 2021.
2. Егоршин А.П. Мотивация трудовой деятельности. – Н. Новгород: НИМБ, 2014.
3. Булатова Г.А., Маничева А.С., Оскорбин Н.М. Методы и математические модели управления персоналом : учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.
4. Оскорбин Н.М. Исследование систем управления: программа и конспект курса. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.
5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Идентификация активных систем / Труды международной конференции «Идентификация систем и процессы управления». – М.: ИПУ РАН, 2000.

Концепция программы «Цифровая экономика Российской Федерации»

*Нургалеева А. Р., Талочкина В. А., Тимофеев А. Г.
РЭУ им. Г. В. Плеханова, г. Москва*

Аннотация: В наше время цифровые технологии проникают во все сферы жизнедеятельности современного общества, и экономика не является исключением. В связи с этим в России была разработана концепция программы "Цифровая экономика Российской Федерации", которая предполагает создание благоприятных условий для развития цифрового бизнеса, инноваций и кибербезопасности. В статье анализируются основные положения концепции программы "Цифровая экономика Российской Федерации" и ее значение для будущего развития страны.

Ключевые слова: *цифровая экономика, развитие, информационные технологии, цифровая инфраструктура.*

The concept of the program «Digital economy of the Russian Federation»

Abstract: Nowadays, digital technologies penetrate into all spheres of life of modern society, and the economy is no exception. In this regard, the concept of the program "Digital Economy of the Russian Federation" was developed in Russia, which involves the creation of favorable conditions for the development of digital business, innovation and cybersecurity. The article analyzes the main provisions of the concept of the program "Digital Economy of the Russian Federation" and its significance for the future development of the country.

Keywords: digital economy, development, information technology, digital infrastructure.

Введение: Цифровая экономика и ее значение для России

Цифровая экономика – это новый этап развития мировой экономики, в котором информационные технологии становятся основным двигателем роста. В настоящее время цифровая экономика является одним из главных факторов конкурентоспособности страны и ее будущего развития [1].

Российская Федерация не остается в стороне от этих процессов и активно работает над созданием своей цифровой экономики. В 2018 году была принята Концепция программы "Цифровая экономика Российской Федерации", которая направлена на обеспечение перехода к инновационной экономике с использованием новейших информационных технологий [2]. Это стратегическое решение позволяет России укрепить свои позиции на мировой арене и обеспечить стабильный экономический рост в будущем.

Одной из главных целей программы является создание благоприятного инвестиционного климата для развития цифровых технологий и поддержка инноваций. Для этого планируется развитие цифровой инфраструктуры, выделение частотного спектра для беспроводной связи, разработка интернет-трафика и создание национальной киберзащиты.

Однако, не менее важным элементом данной концепции является повышение уровня цифрового образования и квалификации населения. С этой целью планируется создание новых центров образования, оборудованных передовыми технологиями, а также проведение масштабных курсов по цифровой грамотности для всех слоев общества. Такой подход обеспечит эффективное использование цифровых технологий и позволит стране успешно конкурировать на мировом рынке.

Для быстрой и эффективной реализации концепции программы "Цифровая экономика Российской Федерации" необходимо сделать ее одной из основных составляющих социально-экономического развития страны. Это позволит ускорить процессы автоматизации и оптимизации в различных отраслях экономики, повысить эффективность производства и снизить затраты.

Однако для полной реализации программы необходимо решить несколько важных вопросов. В частности, необходимо обеспечить высокую скорость интернет-соединений, интеграцию систем информационной безопасности и повышение качества дорожной сети для лучшей доступности услуг.

Подводя итог, следует отметить, что концепция программы "Цифровая экономика Российской Федерации" является важным шагом в развитии страны и ее успешном участии в глобальных экономических процессах. Реализация этой программы позволит России оставаться конкурентоспособной и успешно развиваться в современном мире.

Основные направления программы "Цифровая экономика Российской Федерации".

В России определены ключевые направления развития цифровой экономики в рамках программы "Цифровая экономика Российской Федерации", которая была утверждена правительством в 2017 году. Она содержит в себе ряд важных стратегических направлений, на которые будет направлены усилия государства для развития инфраструктуры цифровой экономики. Одним из таких направлений является создание новых технологических платформ.

Для стимулирования разработки новых технологий и инноваций и создания благоприятной среды для их реализации, планируется улучшить поддержку в данной области. Одной из мер будет разработка единой системы цифровых технологических платформ для различных отраслей экономики. Кроме того, будет создано единое информационное пространство, позволяющее эффективно обмениваться информацией между государственными органами, бизнес-структурами и общественностью. Для этого будет создана единая электронная платформа для государственных услуг, а также усовершенствована система открытых данных. Все эти меры будут направлены на создание благоприятной среды для инноваций и развития экономики.

Третье важное направление программы заключается в развитии цифровой инфраструктуры. Правительство активно работает над расширением доступа к интернету и увеличением скорости соединения, а также занимается созданием современной инфраструктуры для обработки и хранения данных.

Четвертым не менее значимым направлением является обеспечение информационной безопасности. В свете растущей угрозы кибератак и киберпреступности, правительство России уделяет особое внимание защите информации от несанкционированного доступа и использования. В рамках этого направления планируется дальнейшее усовершенствование системы киберзащиты и проведение мер по противодействию киберугрозам.

Одним из ключевых направлений программы "Цифровая экономика Российской Федерации" является формирование новых цифровых компетенций. Его основная задача заключается в обеспечении высококвалифицированных специалистов в сфере цифровой экономики. Для достижения этой цели будут проводиться различные мероприятия, направленные на поддержку образования и науки, а также создание условий для развития технического потенциала страны.

Кроме того, программа направлена на повышение эффективности процессов в сфере цифровой экономики, формирование благоприятной инфраструктуры и защиту информационных ресурсов от угроз. Реализация всех предложенных направлений позволит России занять лидирующие позиции в мировой экономике и стать одним из ключевых игроков на рынке цифровых технологий.

Меры по созданию инфраструктуры цифровой экономики.

Одной из ключевых задач программы "Цифровая экономика Российской Федерации" является создание эффективной инфраструктуры цифровой экономики. Для достижения этой цели требуется решить множество вопросов, связанных с развитием информационных технологий и обеспечением улучшенного доступа к ним.

Первоочередным шагом будет создание широкополосной сети доступа в интернет по всей территории страны. В рамках программы планируется выделение дополнительных средств на развитие инфраструктуры связи и поддержку операторов связи в расширении покрытия 4G и 5G сетей. Это позволит обеспечить быстрый и стабильный доступ к интернету для всех желающих и создать условия для развития цифровых технологий во всех регионах России.

В рамках программы развития цифровой экономики предусмотрено создание центров обработки данных (ЦОД). Эти центры являются неотъемлемой частью инфраструктуры цифровой экономики и позволяют хранить, обрабатывать и передавать большие объемы данных, обеспечивая при этом безопасность их хранения и обработки.

Кроме того, важной задачей является создание электронных платформ для бизнеса. Это поможет ускорить процессы и уменьшить затраты на оформление документации, а также обеспечит возможность удаленной работы.

В рамках программы "Цифровая экономика Российской Федерации" ставится задача развития систем онлайн-образования, что позволит повысить доступность и качество образования для всех слоев населения. Создание онлайн-курсов и платформ для дистанционного обучения является одним из важнейших шагов на пути к развитию современной образовательной инфраструктуры.

Кроме того, создание электронной системы государственного управления - не менее важная задача. Она позволит сократить время на рассмотрение документов и повысить прозрачность процесса принятия решений, что существенно ускорит развитие экономики страны.

В целом, меры по созданию инфраструктуры цифровой экономики имеют ключевое значение для развития отрасли в России и являются необходимым условием для устойчивого экономического роста и процветания страны.

Для успешной реализации новых технологий и сервисов необходима соответствующая инфраструктура, способная обрабатывать большие объемы данных и обеспечивать быстрый доступ к интернету. Поэтому государственная политика должна придать приоритет развитию инфраструктуры цифровой экономики.

Программа "Цифровая экономика Российской Федерации" и ее роль в развитии отраслей экономики.

В рамках программы "Цифровая экономика Российской Федерации" осуществляется поддержка развития отраслей экономики на основе новых технологий и цифровых решений. Основная цель программы - создание условий для перехода к инновационной экономике, повышение производительности труда, конкурентоспособности предприятий и улучшение качества жизни граждан.

Программа включает несколько ключевых направлений, охватывающих все отрасли экономики. Одним из них является разработка и внедрение цифровых технологий в промышленность. Это позволяет существенно повысить эффективность производственных процессов, значительно сократить затраты на производство и улучшить качество продукции.

Еще одно важное направление программы – это развитие цифровой инфраструктуры. Создание высокоскоростных интернет-соединений по всей стране позволит расширить доступность онлайн-услуг для граждан и бизнеса, а также обеспечит возможность удаленной работы и онлайн-образования. Развитие цифровой инфраструктуры также способствует росту экономики и повышению конкурентоспособности страны в глобальном масштабе.

Программа направлена на развитие цифровой экономики в малом и среднем бизнесе путем создания электронных торговых площадок, онлайн-маркетинга и других инструментов для расширения возможностей предприятий и выхода на новые рынки. Кроме того, ключевым направлением программы является разработка системы обмена данными между государственными органами и бизнесом, что ускорит процессы взаимодействия и повысит прозрачность действий государственных органов. Важным элементом программы является поддержка стартапов и инновационных проектов, создание условий

для развития новых технологических компаний и проектов, чтобы Россия заняла лидирующие позиции в отраслях, связанных с цифровой экономикой.

Программа "Цифровая экономика Российской Федерации" является ключевым инструментом перехода к инновационной экономике и повышения конкурентоспособности России в мировом сообществе. Ее реализация позволит ускорить развитие отраслей экономики, создать новые рабочие места и улучшить качество жизни граждан.

Программа ориентирована на внедрение современных цифровых технологий в различные сферы деятельности. Это позволит значительно увеличить производительность труда и оптимизировать бизнес-процессы, способствуя ускорению темпов экономического развития страны.

Ожидаемые результаты и перспективы реализации программы "Цифровая экономика Российской Федерации".

Ожидаемые результаты и перспективы реализации программы "Цифровая экономика Российской Федерации" связаны с улучшением экономических показателей, созданием новых рабочих мест и увеличением благосостояния граждан. Таким образом, программа имеет большой потенциал для повышения качества жизни населения и укрепления экономической позиции России на мировой арене.

Целью программы является не только повышение конкурентоспособности российских компаний в мировой экономике, но и создание условий для развития инновационной экономики, поддержки стартапов и привлечения зарубежных инвестиций. Кроме того, еще одним важным результатом данной программы должно стать улучшение качества жизни граждан России. Внедрение цифровых технологий может положительно повлиять на многие аспекты повседневной жизни людей: от образования и здравоохранения до коммуникаций и досуга.

Одной из главных перспектив программы является возможность создания новых рабочих мест. Внедрение цифровых технологий, безусловно, требует наличия квалифицированных специалистов. Квалифицированных специалистов, что приведет к увеличению спроса на соответствующие профессии и повышению заработной платы в этой области.

Помимо этого, программа предполагает формирование единой цифровой экосистемы в России. Это означает создание инфраструктуры, которая позволит эффективно использовать

современные технологии во всех сферах жизни страны – от бизнеса до государственного управления.

Важным аспектом программы является также развитие кибербезопасности. С ростом числа цифровых угроз необходимо обеспечить защиту информации и персональных данных граждан и компаний. Программа предусматривает реализацию мер по укреплению киберзащиты как на уровне государства, так и на уровне бизнеса.

Одной из перспектив программы является также превращение России в лидера разработки и производства цифровых технологий. В рамках этой задачи предусмотрено создание условий для инновационной деятельности, развития высокотехнологичных отраслей, а также поддержки малого и среднего бизнеса в сфере ИТ.

В целом, реализация программы "Цифровая экономика Российской Федерации" позволит стране стать на новый уровень развития и раскрыть свой потенциал в области цифровых технологий. Это приведет к укреплению экономики, повышению конкурентоспособности компаний и повышению качества жизни граждан России.

Библиографический список

1. Цифровая экономика и ее влияние на конкурентоспособность предпринимательских структур/ Бабкин Александр Васильевич Чистякова Ольга Владимировна. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovaya-ekonomika-i-ee-vliyanie-na-konkurentosposobnost-predprinimatelskih-struktur> (Дата обращения: 05.05.2023)
2. Распоряжение правительства Российской федерации. Режим доступа: <http://static.government.ru/media/files/9gFM4FHj4PsB79I5v7yLVuPgu4bvR7M0.pdf> (Дата обращения: 05.05.2023);

**Моделирование процессов методом
конфлюэнтного анализа**

*Н.М. Оскорбин, М.А. Сапаров, Ш.А. Сафарова
АлтГУ, г. Барнаул*

В данной статье рассмотрена методика сравнительного исследования точности оценок параметров в задачах конфлюэнтного и регрессионного анализов. С использованием технологии имитационного моделирования разработана компьютерная модель в предположениях регрессионного и конфлюэнтного анализа, в результате обработаны модельные данные с ошибками измерения всех переменных и произведен анализ полученных результатов исследования с точными значениями коэффициентов линейной модели.

Ключевые слова: математическое моделирование процессов, метод наименьших квадратов, регрессионный анализ, конфлюэнтный анализ, компьютерное моделирование.

В данной работе решается проблема создания компьютерной модели для исследования точности в задачах прогноза и оценки параметров методами наименьших квадратов (МНК) и конфлюэнтного анализов на основе результатов вычислительных экспериментов в среде Excel. В нашей работе ошибки наблюдения входных и выходных переменных являются случайными, поэтому для решения задачи моделирования процессов необходимо применять статистические методы, использующие метод наименьших квадратов.

В литературе наиболее известным методом статистического моделирования является регрессионный анализ. Теоретически этот метод обоснован для случая, когда входные переменные процесса измеряются с ошибками существенно меньшими ошибок измерения выходной переменной. Для линейного процесса при достаточно большом числе наблюдения N в литературе получены функции распределения оценок вектора параметров a и оценок выходной переменной моделируемого процесса. В этих условиях методами математической статистики можно при фиксированном значении входных переменных и заданном уровне доверительной вероятности

найти доверительный интервал для среднего значения выходной переменной исследуемого процесса:

Задача математического моделирования процессов в общем случае при наличии ошибок наблюдений за входными переменными и выходной переменной формулируется следующим образом: найти функцию $y = F(x, a)$ причинно-следственной связи выходной переменной от входных с точность до A – множества возможных значений параметров a ($a \in A$).

Тогда можно оценить ожидаемые значения выходной переменной при известном значении вектора x_0 решением двух задач математического программирования:

$$y_0^H = \min_{a \in A} F(x_0, a); \quad y_0^V = \max_{a \in A} F(x_0, a). \quad (1)$$

Конфлюэнтный анализ определяется как совокупность методов математического моделирования процессов в условиях, когда входные переменные $x \in R^n$ являются количественными (случайными или неслучайными) и наблюдаются в каждом опыте с ошибками [1, 2]. По этому условию метод конфлюэнтного анализа отличается от методов классического регрессионного анализа.

С учетом предположений относительно ошибок, таблица наблюдений $\{Z_1^j, \dots, Z_n^j, V^j\}, j = 1, \dots, N$ за всеми переменными процесса определяется так:

$$Z_i^j = x_i^j + \varepsilon_{xi}^j; \quad V_i^j = y + \varepsilon_{yi}^j; \quad M[\varepsilon_{xi}^j] = M[\varepsilon_{yi}^j] = 0; \quad D[\varepsilon_{xi}^j] = d_i; \quad D[\varepsilon_{yi}^j] = d_y.$$

Связь входных и выходной переменных предполагаем заданной: $y = a_1 x_1, \dots, a_n x_n$, а задачу конфлюэнтного анализа ограничиваем оценкой истинных значений коэффициентов приведенного уравнения.

Метод наименьших квадратов в данном случае позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от расчетных (теоретических) значений минимальна. При числе входных переменных равном 2 эта задача запишется в виде:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i + \varepsilon_{yi} - a_1(x_{1i} + \varepsilon_{x_{1i}}) - a_2(x_{2i} + \varepsilon_{x_{2i}}))^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Для определения минимума функции двух переменных вычисляются частные производные этой функции по каждому из оцениваемых параметров и приравниваются к нулю, т.е. $S'_{a_1} = 0$; $S'_{a_2} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i + \varepsilon_{y_i} - a_1(x_{1i} + \varepsilon_{x_{1i}}) - a_2(x_{2i} + \varepsilon_{x_{2i}}))(x_{1i} + \varepsilon_{x_{1i}}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i + \varepsilon_{y_i} - a_1(x_{1i} + \varepsilon_{x_{1i}}) - a_2(x_{2i} + \varepsilon_{x_{2i}}))(x_{2i} + \varepsilon_{x_{2i}}) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим метод оценки истинных значений параметров моделируемого процесса. Пусть без потери общности средние значения переменных в таблице наблюдений являются нулевыми. Тогда согласно [2] оценки истинных коэффициентов моделируемого процесса находятся решением следующей системы уравнений:

$$a_i(R_{ii} - d_i) + \sum_{k=1, k \neq i}^n a_k R_{ik} = R_{iy}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

В приведенной системе n уравнений коэффициентами выступают ковариации соответствующих переменных, вычисленные по таблице наблюдений $\{Z_1^j, \dots, Z_n^j, V^j\}, j = 1, \dots, N$.

Вычислительные эксперименты по исследованию средней точности оценок методом конфлюэнтного анализа и сравнению с точностью оценок МНК проведены для числа наблюдений N , равных 20 при 15 повторности и числа переменных n , равных 2. Входные переменные моделируемого процесса генерировались функцией СЛЧИС() в интервале $[-100; 100]$ и предварительно центрировались относительно нулевого значения. Значение выходной переменной y вычислялось с коэффициентами $a_1 = 1$; $a_2 = 2$. Переменными при исследовании выступали уровни дисперсий нормально распределенных ошибок наблюдений, приведенные в следующей таблице. Погрешности оценок параметров уравнения определялись как модули разности их истинных значений. В приведенной таблице указаны средние значения ошибок по 15 вычислительных экспериментов.

№ п/п	Дисперсии ошибок			Ошибки МНК		Ошибки КА	
	d_1	d_2	d_y	$Mo[a_1]$	$Mo[a_2]$	$Mo[a_1]$	$Mo[a_2]$
1	0	0	0,25	0,73%	0,83%	0,73%	0,83%
2	0,5	0,5	0,25	3,40%	4,10%	2,56%	2,79%
3	1,0	1,0	0,5	6,29%	5,75%	4,86%	3,00%
4	1,5	1,5	1,0	6,87%	7,87%	4,18%	2,99%

Как результат экспериментов можно сделать вывод о том, что метод конфлюэнтного анализа эффективнее метода наименьших квадратов, причем эффективность становится выше при увеличении

дисперсии ошибок. Следовательно, метод конfluence анализа является полезным для решения задач моделирования процессов по реальным данным.

Библиографический список

1. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 125с.

2. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 264с.

УДК 004.9

**Автоматизация извлечения данных:
тренды NDVI, инструменты Google Earth Engine и
Python**

*Полосин Г. В., Понькина Е. В.
АлтГУ, г. Барнаул,*

Аннотация. В данной статье представлена проблема сложности извлечения данных различных спутниковых систем и актуальный способ её решения в виде специальной программы, обеспечивающей автоматизацию выгрузки спутниковых данных с расчетом необходимых индикаторов на основе инструментов *Google Earth Engine*. Используя возможности *Google Earth Engine* и различных библиотек Python была разработана программа для вычисления NDVI и выгрузки массивов данных для участков территории, заданных набором полигональных объектов.

Ключевые слова: *google earth engine, python, NDVI, анализ спутниковых снимков.*

**AUTOMATION OF DATA EXTRACTION:
NDVI TRENDS, GOOGLE EARTH ENGINE AND PYTHON TOOLS**

*Polosin G.V., Ponkina E. V.
Altai State University, Barnaul*

Abstract. This article presents the problem of the complexity of extracting data from various satellite systems and the actual way to solve it in the form of a special program that automates the uploading of satellite data with the calculation of the necessary indicators based on *Google Earth Engine* tools. Using the capabilities of *Google Earth Engine* and various Python libraries, a program was developed for calculating NDVI and uploading data arrays for areas of the territory specified by a set of polygonal objects.

Keywords: *google earth engine, python, NDVI, satellite imagery analysis.*

В настоящее время всё более актуальной проблемой в анализе спутниковых снимков является получение и выгрузка результатов в нужном пользователю формате, а также создание собственных наборов данных. Данная проблема вынуждает пользователей

прибегнуть к поиску спутниковых данных в специализированных приложениях, что отнимает много времени, вынуждая изучать много дополнительной информации. Как итог, вместо того, чтобы быстро получить данные и провести необходимые расчёты, пользователь тратит много времени на овладение функционалом сторонних приложений. Например, чтобы вычислить показатель NDVI по данным определенного спутника в необходимом пользователю временном интервале, зоне интереса и по видам землепользования, потребуется запросить отдельно спутниковые снимки и определить специальные полигоны для отделения зон землепользования. Затем потребуется вычислить значения NDVI, структурировать их по полигонам зон землепользования и выгрузить результаты в нужном формате. Формат данных для обработки должен удовлетворять требованиям дальнейшего прикладного использования этих данных (например, временной ряд или панельные данные). Подобные задачи часто возникают на практике, а открытые и доступные решения в настоящее время в открытом доступе отсутствуют.

Целью работы является разработка программы, обеспечивающей автоматизацию выгрузки спутниковых данных с расчетом необходимых индикаторов на основе инструментов *Google Earth Engine*.

Требования к программе:

- 1) Возможности выбора временного диапазона выгрузки данных, в том числе по отдельным месяцам.
- 2) Возможность выбора целевой территории или целевых объектов мониторинга, к которым могут относиться сельскохозяйственные поля, или участки, участки сенокошения и выпаса скота и т.п. Целевые объекты должны быть заданы в виде полигонов.
- 3) Выгрузка снимков для выбранных спутниковых систем с учетом требований качества данных, в частности процент облачности и т.д.
- 4) Расчет статистики обеспеченности данными по периодам наблюдения, например, расчет количества снимков по годам на каждый объект и количество точек данных.
- 5) Расчет NDVI по всем доступным данным.
- 6) Выгрузка полного набора данных в виде датасета, где каждая строка представляет пиксел наблюдения, а столбцы значения NDVI по датам, тип объекта и прочие обязательные атрибуты по выбору пользователя. Также необходимо выгрузить координаты пикселей и информацию о разрешении раstra, проекции и географической системе координат.

Для разработки данной программы использован сервис Google Earth Engine. Сервис содержит сотни коллекций сырых и предобработанных данных, полученных с различных спутниковых систем, которые могут быть использованы для решения разных практических и научных задач. Практически все данные, предоставляемые сервисом, являются открытыми. Данный сервис позволяет быстро получать доступ любому набору данных как из собственной коллекции, так и пользовательского набора источников. При помощи специального API подключения, данный сервис позволяет загружать и анализировать данные в пользовательских приложениях на языке программирования Python. Использование возможностей Python позволяет повысить производительность по работе с данными, а также подключить функции анализа и моделирования.

Используя возможности Google Earth Engine и различных библиотек Python была разработана программа для вычисления NDVI и выгрузки массивов данных для участков территории, заданных набором полигональных объектов. В качестве тестовой территории использована территория бассейна реки Селенга, охватывающая часть территории Республики Бурятия и Монголии. Для расчета NDVI использовались наборы данных спутниковых систем Landsat 4, 5, 7, 8, 9, типа Surface Reflectance за период апрель - август 1995 – 2022 гг. Тестовые объекты включают три вида землепользования (пашня, пастбище и земли населенных пунктов) и два вида водных объектов (озеро, река и пойменные земли). Точки выборки генерируются для исследования трендов NDVI случайным образом внутри заданных полигонов. Каждой точке выборки назначается соответствующие атрибуты (тип землепользования, страна, регион, район, координаты). Выгрузка итогового датасета осуществляется в виде csv-файла, который в последствии может быть обработан средствами статистического анализа и моделирования.

Полученное решение в перспективе позволяет представить данную программу в виде разработки онлайн системы для поиска и фильтрации спутниковых снимков, извлечения данных с автоматизированной их разметкой по известным атрибутам, извлеченным из векторных слоев.

Библиографический список

1. API reference. (б.д.). Получено из Pandas 2.0.0 documentation: <https://pandas.pydata.org/docs/reference/index.html#api>
2. API Reference. (б.д.). Получено из Google Developers: <https://developers.google.com/earth-engine/apidocs>
3. Earth Engine Data Catalog. (б.д.). Получено из Google Developers: <https://developers.google.com/earth-engine/datasets/catalog>
4. Java Script and Python Guides. (б.д.). Получено из Google Developers: <https://developers.google.com/earth-engine/guides>

**Исследование забрасываемости сельскохозяйственных
участков личных подсобных хозяйств на примере
Алтайского края**

А.А. Сабаев

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию забрасываемости участков личных подсобных хозяйств на примере Алтайского края, с использованием вегетационных индексов, построенных на основе мультиспектральных спутниковых снимков Sentinel-2A.

Ключевые слова: *забрасываемость сельскохозяйственных земель, мультиспектральные спутниковые снимки, вегетационные индексы, статистический анализ.*

Забрасываемость участков личных подсобных хозяйств (ЛПХ) имеет различные аспекты. С одной стороны, увеличение площади заброшенных участков ЛПХ является индикатором социальных и экономических изменений в сельских территориях, таких как увеличение оттока населения, снижение экономической привлекательности содержания и обработки участка ЛПХ, особенности поведения современного сельского населения. С другой стороны, не распашка участка ЛПХ приводит к накоплению сухой растительной массы, возрастанию рисков распространения пожаров в сельских территориях. В тоже время, отсутствие глубокой культивации приводит к накоплению углерода в почве и снижению выброса парниковых газов. Заброшенные участки личных подсобных хозяйств также влияют на распространение сорных трав, становятся местом обитания грызунов и диких животных (включая бездомных собак) (Фокин, 2016).

Целью данного исследования является нахождение различий в вегетационных индексах между используемыми и заброшенными участками личных приусадебных хозяйств, выработки методики классификации объектов по набору спутниковых данных на предмет культивации или не культивации земельного участка.

В качестве тестовых были выбраны сто участков: 25 заброшенных и 25 используемых участков дачных кооперативов в

окрестностях с. Берёзовка (на западе от г. Барнаула) и 25 заброшенных и 25, используемых участков дачных кооперативов в окрестностях Новогорского района г. Новоалтайска. Выборка участков производилась визуально, по снимкам сверхвысокого разрешения, представленных в программе Google Earth, по данным за июль 2019 г.

На основе спутниковых данных Sentinel-2A произведена их обработка по вегетационным индексам NDVI (Rouse et.al., 1974; Терехин, 2017) и EVI (Huete et.al., 2002), а также по индексу влажности NDMI (Wilson, Sader, 2002). В последствии был получен датасет с данными по каждому участку позволяет выполнить автоматизированную обработку данных и разработать программу классификации объектов.

По результатам работы разработана программа ЭВМ в среде Python, позволяющая в автоматизированном режиме загрузить спутниковые данные для выбранных полигональных объектов, сформировать датасет и выполнить предобработку (фильтрации, анализ дескриптивных свойств, анализ распределения данных).

Библиографический список

1. Терехин, Э.А. Распознавание залежных земель на основе сезонных значений вегетационного индекса NDVI, Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 719-725.
2. Фокин В.Я. Социальные контрасты сельской культуры в условиях ликвидации селообразующих предприятий, Дискуссия. 2016. №3 (66). – С. 96-102.
3. Huete, A., Didan, K., Miura, T., Rodriguez, E.P., Gao, X., Ferreira, L.G., Overview of the radiometric and biophysical performance of the MODIS vegetation indices, Remote Sensing of Environment, Vol. 83, Issues 1–2, 2002, P.195-213
4. *Rouse, J.W, Haas, R.H., Scheel, J.A., and Deering, D.W. 'Monitoring Vegetation Systems in the Great Plains with ERTS.' Proceedings, 3rd Earth Resource Technology Satellite (ERTS) Symposium, Vol. 1, P. 48-62 (1974).*
5. *Wilson, E.H., Sader, S.A. Detection of forest harvest type using multiple dates of Landsat TM imagery. Remote. Sens. Environ., 80(3), P. 385-396 (2002).*

СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

УДК 004.94

Математическое моделирование и визуализация динамического взаимодействия твердых тел

В.В. Березиков, Г.В. Кравченко
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена построению математической модели взаимодействия твердых тел. Рассмотрены методы обнаружения столкновений между твёрдыми телами в двух фазах. Для визуализации физической симуляции взаимодействия твёрдых тел написана компьютерная программа.

Ключевые слова: *математическое моделирование, столкновение твердых тел, визуализация взаимодействия твердых тел.*

Наиболее общим явлением, наблюдаемым в природе, является взаимодействие материальных тел. В результате взаимодействия меняются скорости, их кинетические энергии. О таком взаимодействии говорят, как о столкновениях тел.

Моделирование динамики столкновения твердого тела является важной частью многих современных компьютерных инструментов в широком спектре областей применения, таких как, анимационное программное обеспечение для цифрового производства, проверка робототехники и т.д.

В работе изучается ударное взаимодействие твёрдых тел с последующим изменением их скоростей. Рассматривается модель твёрдого тела с шестью степенями свободы. Модель включает в себя выполнение законов Ньютона, сохранения энергии и импульса. Каждый момент времени на тела действует сила тяжести, а также меняется положение и ориентация тел в зависимости от их скоростей [1, 2].

Изучены методы обнаружения столкновений между твёрдыми телами в двух фазах. В широкой фазе алгоритм проверяет потенциальное столкновение пары твёрдых тел [3]. Вокруг каждого

твёрдого тела пары описывается сфера и проверяется пересечения этих сфер по формуле: $(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 \leq (R_a + R_b)^2$, где индексы a и b означают индекс твёрдого тела из пары, которую необходимо проверить на столкновение; R_a , R_b – радиус сферы, описанной вокруг твёрдого тела с индексом a и b соответственно. Если сферы не пересекаются, то данная пара твёрдых тел не пересекается.

В узкой фазе алгоритм на основе теоремы разделяющей оси позволяет вычислить нормальный вектор, вдоль которого нужно разрешить столкновение и глубину проникновения твёрдых тел из пары друг в друга [4]. Для вычисления точек контакта поверхностей твёрдых тел используется алгоритм обрезки полигонов: Sutherland-Hodgman algorithm [5].

На основе вычисленных точек контакта поверхностей твёрдых тел и их скоростей до соударения с помощью метода последовательных импульсов вычисляются скорости после соударения с учётом коэффициента упругости материалов твёрдых тел [6].

Если известна линейная скорость u_0 и угловая скорость w_0 до соударения обоих тел, то линейная скорость после соударения для пары тел вычисляется по формулам:

$$\vec{u}_1^a = \vec{u}_0^a + \frac{\vec{j}}{m_a}, \quad \vec{u}_1^b = \vec{u}_0^b - \frac{\vec{j}}{m_b}, \quad (1)$$

а угловая скорость после соударения для пары тел:

$$\vec{w}_1^a = \vec{w}_0^a + I_a^{-1} \cdot (\vec{r}_a \times \vec{j}), \quad \vec{w}_1^b = \vec{w}_0^b - I_b^{-1} \cdot (\vec{r}_b \times \vec{j}), \quad (2)$$

где r – направляющий вектор от центра масс твёрдого тела до точки контакта в системе отчёта твёрдого тела.

Величина импульса вычисляется по формуле:

$$j = \frac{-(1+Rest) \cdot (\vec{u}_0^a - \vec{u}_0^b + \vec{w}_0^a \times \vec{r}_a - \vec{w}_0^b \times \vec{r}_b) \cdot \vec{n}}{\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right) + \left[(I_a^{-1} \cdot (\vec{r}_a \times \vec{n})) \times \vec{r}_a + (I_b^{-1} \cdot (\vec{r}_b \times \vec{n})) \times \vec{r}_b\right] \cdot \vec{n}}, \quad (31)$$

где $Rest = e_a \cdot e_b$.

При $Rest = 1$ – абсолютно упругое столкновение; при $Rest = 0$ – абсолютно пластическое столкновение.

Введем обозначения:

$$v^{ab} = (1 + Rest) \cdot (\vec{u}_0^a - \vec{u}_0^b + \vec{w}_0^a \times \vec{r}_a - \vec{w}_0^b \times \vec{r}_b) \cdot \vec{n};$$

$$M = \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right) + \left[(I_a^{-1} \cdot (\vec{r}_a \times \vec{n})) \times \vec{r}_a + (I_b^{-1} \cdot (\vec{r}_b \times \vec{n})) \times \vec{r}_b\right] \cdot \vec{n}.$$

Тогда (3) переписывается как: $j = \frac{-v^{ab}}{M}$.

Для n точек контакта получим систему линейных уравнений с ограничениями (MLCP):

$$\begin{cases} -v_1^{ab} = M_1 \cdot j_1 \\ -v_2^{ab} = M_2 \cdot j_2 \\ \dots \\ -v_n^{ab} = M_n \cdot j_n \\ j_i \geq 0; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Для решения этой системы выбран итерационный метод Sequential Impulse. Он не решает систему целиком, а последовательно обрабатывает ограничение взаимопроникновения в каждой точке контакта. На k -ой итерации вычисляется величина импульса Δj_{ki} , которое обеспечивает выполнение i -ого ограничения. Учитывая вычисленную величину импульса Δj_{ki} , по формулам (1) – (2) вычисляются новые скорости твёрдых тел, которые участвуют в следующей итерации. С каждой итерацией $\sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n \Delta j_{ki}$ будет приближаться к j .

Для визуализации физической симуляции взаимодействия твёрдых тел разработана компьютерная программа.

На рисунке 1 представлен результат работы программы – падение твёрдых тел под действием силы тяжести с ускорением свободного падения (0, -9.8, 0, 0); углы вращения Эйлера (в радианах) первого твёрдого тела (0, 0, 0, 0), второго твёрдого тела (0, 0, 12, 0); масса падающих тел 1 кг, коэффициент упругости материала твёрдых тел 0.65.

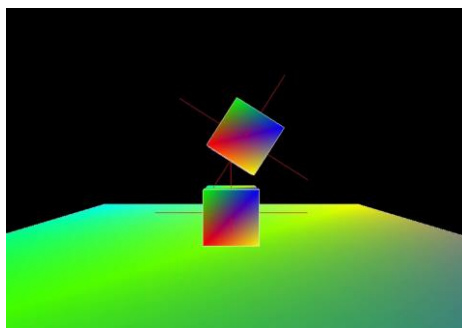


Рисунок 1 – Падение твёрдых тел под действием силы тяжести

Таким образом, построена модель твёрдого тела без деформации с шестью степенями свободы. Столкновение твёрдых тел проверяется на каждом временном шаге. На основе положения, ориентации, скоростей тел разрешается столкновение для каждой пары твёрдых тел с учётом массы, тензора инерции и коэффициента упругости материала каждого тела из пары.

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: «Высшая школа», 1986.
2. Hecker C. Physics, part 3: Collision response. – Game Developers Magazine, pp. 11–18, March 1997.
3. Собинов Д.И., Коробицын В.В. Алгоритмы обнаружения столкновений // Математические структуры и моделирование, 2010. – Вып. 21. – С. 82-95.
4. Eberly D. Dynamic Collision Detection using Oriented Bounding Boxes, 1999.
5. Visualizing the Sutherland Hodgman algorithm. – URL: <https://www.haroldserrano.com/blog/visualizing-the-sutherland-hodgman-algorithm>.
6. Catto E. Physics for Game Programmers: Understanding Constraints. – GDC, 2014.

Методы интеллектуального анализа данных в задачах оценки качества образования (на основе официальных данных Всероссийских проверочных работ Алтайского края)

*А.А. Величкова, Т.В. Михеева
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена применению методов интеллектуального анализа данных в задачах оценки качества образования на основе официальных данных результатов ВПР по Алтайскому краю.

Ключевые слова: *интеллектуальный анализ данных, корреляция, классификация, регрессия, кластеризация, логистическая регрессия, деревья решений, метод k ближайших соседей, ансамблевые методы, случайный лес, метод градиентного спуска метод k-средних.*

Образовательные организации несут ответственность за качество предоставляемых услуг, поэтому одним из показателей качества образования в организациях является успеваемость учащихся.

Отсюда возникает необходимость достоверной информации о реальных результатах деятельности, а также о росте или снижении уровня образовательного процесса. Для этого ежегодно в России проводятся различные итоговые контрольные работы по отдельным предметам.

Целью проведения всероссийских проверочных работ (далее - ВПР) является своевременная диагностика уровня освоения образовательных программ, а также уровня достижения образовательных результатов с учетом требования ФГОС. В 2022 году согласно приказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки (Рособрнадзор) от 16.08.2021 № 1139 был проведен мониторинг качества подготовки обучающихся общеобразовательных организаций в форме ВПР по отдельным предметам в 4-8 и 10-11 классах (весенний период) и в 5-9 классах (осенний период).

Данная работа посвящена оценке качества подготовки обучающихся общеобразовательных организаций Алтайского края методами интеллектуального анализа данных на основе результатов ВПР. Целью данной работы является оценка уровня образования по

региону, муниципальным районам и образовательным организациям методами интеллектуального анализа данных. Исследование выполнено на основе официальных данных результатов ВПР учащихся 4-8 классов образовательных организаций Алтайского края

Перед применением методов интеллектуального анализа данных был проведен анализ структуры данных. На рисунке 1 представлен дескриптивный анализ.

	Класс	Код школы	Код	Вариант	Отметка за предыдущий период	Итого баллов	Оценка за ВПР	Процент выполнения	Разница отметок
count	110371.000000	110371.000000	110371.000000	110371.000000	110224.000000	110371.000000	110371.000000	110371.000000	110224.000000
mean	5.932899	3384.348461	67258.263520	1.489150	3.680260	26.612543	3.307508	57.106957	0.372215
std	1.402663	1503.418276	14965.191341	0.499885	0.672064	9.901293	0.861797	20.767880	0.653084
min	4.000000	28.000000	40001.000000	1.000000	2.000000	0.000000	2.000000	0.000000	-3.000000
25%	5.000000	3274.000000	50130.000000	1.000000	3.000000	20.000000	3.000000	46.000000	0.000000
50%	6.000000	3867.000000	70008.000000	1.000000	4.000000	27.000000	3.000000	57.000000	0.000000
75%	7.000000	4281.000000	80029.000000	2.000000	4.000000	33.000000	4.000000	72.000000	1.000000
max	8.000000	6066.000000	91470.000000	2.000000	5.000000	51.000000	5.000000	100.000000	3.000000

Рисунок 1 – Дескриптивный анализ

Показатель максимального значения столбца «Разница отметок», равный 3, говорит о том, что ребенок за четверть имеет оценку 5, а за работу ВПР – 2, что говорит о сильном завышении оценок в школе. Mean определяет среднее арифметическое значение, рассчитанное как разница суммы всех значений к их общему числу.

Далее была применена кластеризация для нахождения классов, по которым могут разбиваться данные. Сравнение методов кластеризации по оценкам метрик представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Оценка качества построенных модели кластеризации различными методами

Алгоритм	Число кластеров	ARI	AMI	V-measure	Silhouette	Значимый столбец
KMeans	3	0,72	0,67	0,67	0.54	Оценка за ВПР
Agglomerative Clustering	3	0,81	0,88	0,88	0,53	Оценка за ВПР
Bisecting KMeans	10	0.43	0.76	0.76	0,41	Процент выполнения

Лучшим алгоритмом оказался алгоритм агломеративной кластеризации, показавшим наибольшие оценки по всем метрикам. Важным признаком для предсказания целевой переменной стала оценка за ВПР.

Задача классификации применялась для нахождения признаков, по которым были разбиты данные. В качестве класса была взята целевая переменная «Отметка за предыдущий период». Данные были разбиты на 4 группы в соответствии с отметкой, полученной исходя из итогового балла. Данный атрибут показывает итоговый результат освоения школьной программы по предмету. В таблице 2 представлено сравнение методов классификации по оценке F1 и важному признаку по русскому языку, а в таблице 3 – по математике.

Таблица 2 – Оценки построенных моделей классификации по столбцу «Отметка за предыдущий период» по русскому языку

Метод	Оценка F1	Важный признак
LogisticRegression	0,65	-
DecisionTreeClassifier	0,67	Процент выполнения
KNeighborsClassifier	0,72	-
RandomForestClassifier	0,69	Код школы
XGBClassifier	0,74	Процент выполнения

Таблица 3 – Оценки построенных моделей классификации по столбцу «Отметка за предыдущий период» по математике

Метод	Оценка F1	Важный признак
LogisticRegression	0,63	-
DecisionTreeClassifier	0,66	Процент выполнения
KNeighborsClassifier	0,68	-
RandomForestClassifier	0,68	Код школы
XGBClassifier	0,71	Процент выполнения

Исходя из полученных результатов можем сделать вывод, что для многоклассовой классификации лучше всего работают ансамблевые методы, а также метод k-ближайших соседей.

Задача регрессии схожа с задачей классификации, только в качестве целевой переменной идет не категориальная, а

количественная величина. В качестве целевого значения был использован столбец «Процент выполнения», принимающий значения от 0 до 100.

В качестве предикторов были взяты остальные столбцы таблицы за исключением целевого значения и столбцы «Итого баллов» и «Оценка за ВПР», явно влияющие на целевую переменную. Результаты оценок построенной модели по целевой переменной «Процент выполнения» на основе русского языка представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Оценки построенных моделей регрессии по столбцу «Процент выполнения» по русскому языку

Метод	MAE	MSE	RMSE	R2	Важный признак
LinearRegression	5,59	50,61	7,11	0,86	-
DecisionTreeRegressor	6,36	71,88	8,48	0,80	Оценка за четверть
KNeighborsRegressor	14,04	314,48	17,73	0,14	-
RandomForestRegressor	5,05	41,17	6,42	0,89	Оценка за четверть
XGBRegressor	4,98	38,43	6,20	0,90	Оценка за четверть

Плохую оценку показал метод k-ближайшего соседа (KNeighborsRegressor). Лучшим методом оказался метод градиентного спуска (XGBRegressor), показавшим наименьшие ошибки и наибольшую оценку R2. Важным признаком для предсказания целевой переменной стала отметка за четверть, полученная в школе.

Результатом выполнения работы является разработанная программа для оценки качества образования методами интеллектуального анализа данных. Для реализации вычислений разработан программный код на высокоуровневом языке Python с дополнительными библиотеками.

Разработанная программа может служить основой формирования плана исследования в задачах оценки качества образования на основе анализа результатов ВПР, а также для обоснования рекомендаций образовательным организациям на основе количественных оценок, полученных в результате проведенного анализа.

Библиографический список

1. Баймуратов, И. Р. Методы автоматизации машинного обучения – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 40 с.
2. Брантон, С. Л., Куц Дж. Н. Анализ данных в науке и технике / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2021. – 574 с.
3. Скиена, Стивен С. Наука о данных: учебный курс. : Пер. с англ. – СПб.: ООО «Диалектика», 2020. – 544 с.

Разработка приложения для уменьшения порога входа и оптимизации работы системного администратора

*И. М. Калинин
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена разработке приложения автоматизации работы системного администратора.

Ключевые слова: *desktop приложение, active directory, системное администрирование.*

В настоящий момент процесс информатизации занимает все сферы труда. Переходя в цифровую среду, у работников могут быть проблемы в освоении цифровых компетенций. По этой причине, а также по причине группового управления, в организациях используются домены и контроллеры доменов.

Самым популярным контроллером домена является Windows Active Directory [1] – это очень крупная и универсальная система управления доменом, однако, как и в любой другой системе, в ней есть недочёты. Из-за громоздкости Active Directory некоторые связи между функциями, не были указаны явно. Поэтому при её администрировании могут возникать ошибки, источник которых неизвестен. Поиск источника займёт не малое время вне зависимости от сложности проблемы.

Для устранения подобных ситуаций было решено разработать приложение, которое сможет оптимизировать выполнение многих часто возникающих задач с решением всех связанных зависимостей и выводением всех ошибок, связанных с невыполненными требованиями.

Таким образом, цель разработки приложения заключается в создании программы, предоставляющей возможность управлять Active Directory через удобный интерфейс и фиксировать не соблюденные зависимости.

В ходе работы были проанализированы сторонние приложения администрирования Active Directory, такие как Wireshark, Clonezilla и AccessChk. Однако, все эти приложения основаны на мониторинге процессов системы или на выполнении узко специализированных задач и не специализированы под Active Directory.

Целевой аудиторией разрабатываемого приложения станут начинающие системные администраторы или администраторы, часто взаимодействующие с Active Directory. Выбор категории прежде всего обусловлен желанием снизить порог входа для начинающих системных администраторов, а также ускорить работу уже опытных администраторов.

Функционал приложения:

1. Создание, редактирование и удаление учётных записей пользователей, компьютеров и групп.
2. Удалённая установка программ.
3. Создание наборов настроек прав групп пользователей, основанных на популярных методологиях разработки.
4. Создание общих ресурсов.
5. Просмотр и фиксация логов определённых событий.
6. Управление встроенными инструментами Active Directory.

Управление приложением происходит через графический интерфейс, переключаясь по разделам которого можно редактировать соответствующие сущности Active Directory.

Всего планируется добавить четыре следующих раздела:

1. Роли.
2. Права.
3. Удалённый доступ.
4. Аудиты.

Количество разделов в процессе разработки может меняться, объединяясь или напротив добавляя новые необходимые функции.

Обнаружение зависимостей будет происходить по заранее прописанным требованиям к установке различных комплексных задач. То есть, сначала производится проверка возможности выполнения задачи, затем будет предпринята попытка автоматического устранения недостающих зависимостей и в случае если зависимости не были исправлены программа выведет ошибку администратору.

Подключение к Active Directory для редактирования осуществляется при помощи библиотеки C# DirectoryServices [2]. Для данной библиотеки не нужно локальное расположение приложения на контроллере домена, что упрощает выполнение задач, связанных с удалённым доступом.

Для хранения информации используется СУБД Microsoft SQL Server. Выбор обусловлен средой разработки приложения WPF, который не требует от пользователя установки дополнительного ПО при использовании указанной СУБД. WPF в свою очередь основан на

языке С#, что хорошо подходит для библиотеки общения с контроллером.

В результате была разработана первая версия приложения для оптимизации работы системного администратора. В функционале уже присутствует добавление, удаление и редактирование учётных записей пользователей. Имеются как уже готовые настройки пользователей, так и создаваемые самим пользователем шаблоны. В последующей версии планируется доработать функцию создания общих ресурсов и удалённой установки программ.

Библиографический список

1. Microsoft. (22 12 2022 г.). Обзор доменных служб Active Directory. Получено из Microsoft: <https://learn.microsoft.com/ru-ru/windows-server/identity/ad-ds/get-started/virtual-dc/active-directory-domain-services-overview>
2. Microsoft. (12 05 2023 г.). System.DirectoryServices Пространство имен. Получено из Microsoft: <https://learn.microsoft.com/ru-ru/dotnet/api/system.directoryservices?view=dotnet-plat-ext-7.0>
3. Викулина Д.А., М. С. (2012). Современные технологии создания desktop-приложений. Получено из Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»: <https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennye-tehnologii-sozdaniya-desktop-prilozheniy/viewer>

**Выявление центров опорного каркаса хозяйства на
основе анализа данных дистанционного зондирования
сибирского региона в ночное время**

*И.И. Кашкаров, Д.Ю. Козлов, А.К. Волкова, А.Н. Дунец
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена категоризации населённых пунктов по уровню освещённости на снимке сибирского региона в ночное время с помощью библиотек языка программирования Python. Космический снимок для территории исследования был подобран с условием отсутствия облачности и сделан в безлунную ночь, получен на основе измерений радиометра VIIRS, расположенного на борту метеорологической спутниковой платформы SNPP.

Ключевые слова: *обработка изображения, категоризация объектов, бинаризация.*

Категоризация населённых пунктов по уровню освещённости позволяет определить степень развития населённых пунктов и их социально-экономический потенциал.

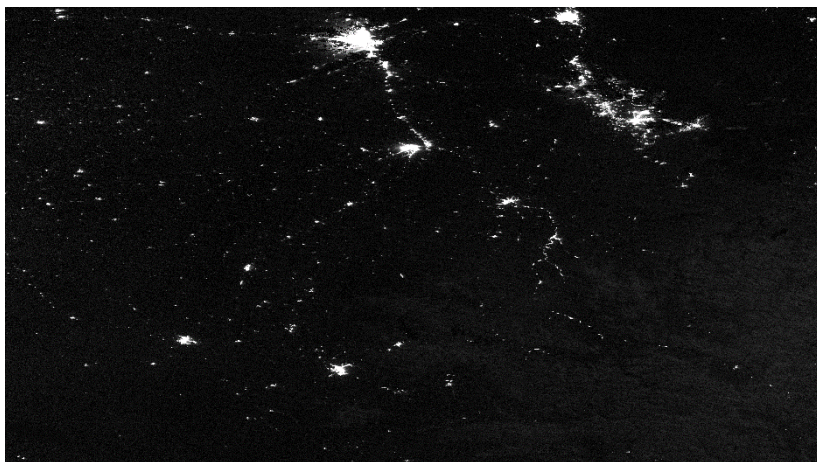


Рисунок 1 – Исходный снимок сибирского региона

В данной статье представлена категоризация населённых пунктов по уровню освещенности при помощи алгоритмов обработки изображений и анализа данных на примере снимка сибирского региона в ночное время (рисунок 1).

Переведя изображения в оттенки градации серого, строим гистограмму (рисунок 2) и проводим бинаризацию изображения по пороговому значению.

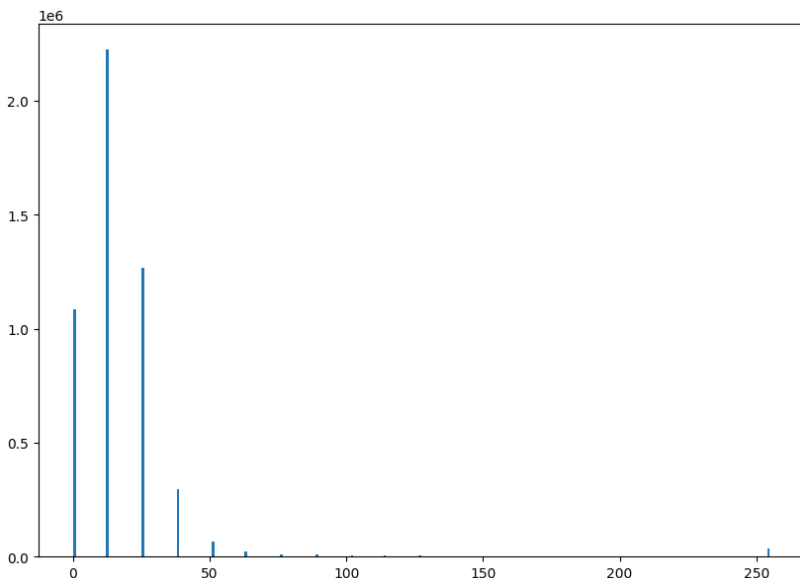


Рисунок 2 – гистограмма исходного изображения

На полученном бинаризованном изображении используем морфологические операции – эрозию и дилатацию, затем на изображении находятся белые области и, выделив их в отдельное изображение, считаются площади областей в пикселях. Затем заполняется таблица, состоящая из номеров, площадей и координат объектов. По таблице выбираются интервалы распределения населенных пунктов по категориям, и информация о категории добавляется в таблицу (таблица 1).

Таблица 1 – Часть полученной таблицы

№	Площадь в пикселях	Категория	Координаты (x,y)
1166	12161	5	(1304, 62)
775	3349	4	(2351, 374)

1241	3269	4	(2058, 9)
613	2325	4	(1443, 498)
821	2269	4	(2202, 346)
86	1557	4	(1188, 1307)
153	1232	4	(636, 1204)
734	1115	4	(2538, 407)

Присваивая цвет каждой категории и используя данные из таблицы, мы выводим исходное изображение, выделяя населенные пункты в цвета соответствующих категорий (рисунок 3).

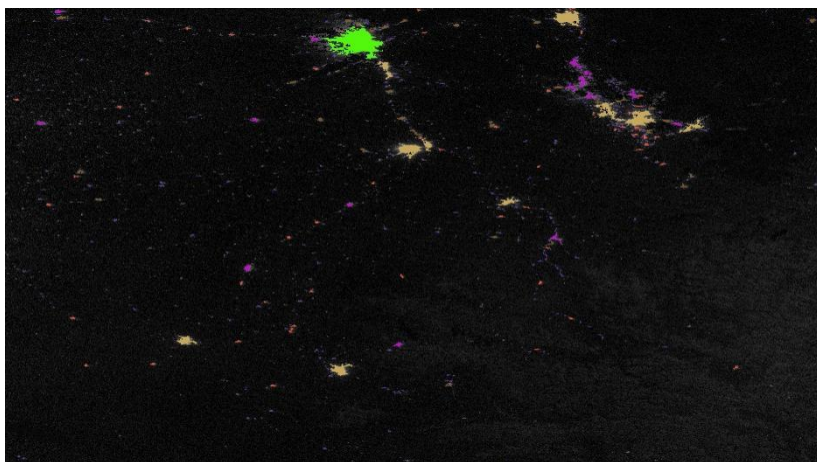


Рисунок 3 – Исходное изображение с выделенными населенными пунктами цветами присвоенным их категориям

Таким образом, можно быстро и точно категоризировать населенные пункты по уровню освещенности на ночных снимках, что может быть полезно для многих приложений, включая градостроительство, экологический мониторинг и прогнозирование социально-экономического развития региона.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-35-90071.

Библиографический список

1. Шагалова П.А., Ерофеева А.Д., Орлова М.М., Чистякова Ю.С., Соколова Э.С. Исследование алгоритмов предобработки изображений для повышения эффективности распознавания медицинских снимков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева № 1 (128).

2. Минаев Д.П., Алексеев В.А., Корсунский Н.А. Метод выделения границ объектов на сложноструктурируемых изображения с использованием морфологических операторов // Программная инженерия: современные тенденции развития и применения: сборник материалов 3-й Всероссийской конференции, посвященной 55-летию ЮЗГУ, Курск, 2019. – С. 144-150.

3. Manisha Bhagwat, R. K. Krishna & Vivek Pise. Simplified Watershed Transformation // International Journal of Computer Science & Communication, Vol. 1, No. 1, January-June 2010, pp. 175-177

4. Живрин Я. Э., Алкзир Н.Б. Методы определения объектов на изображении // Молодой ученый. — 2018. — № 7 (193). — С. 8-19.

**Обработка, анализ и распознавание
объектов на фотоснимках фотоловушек**

А.В. Ваганов¹, К.С. Печененко², Л.А. Хворова²

¹Южно-Сибирский ботанический сад, г. Барнаул;

²АлтГУ, г. Барнаул

Исследование посвящено способам обработки, анализа и распознавания объектов животного мира на фотоснимках фотоловушек и направлено на повышение скорости обработки фотоснимков и повышение достоверности распознавания объектов.

Ключевые слова: *фотоловушка, распознавание объектов, методы машинного обучения, нейронная сеть.*

Фотоловушка – автономный фото-видеорегиистратор с внутренней памятью, в котором присутствует датчик определения движения. Фотоловушки, в основном, используются на особо охраняемых природных территориях для регистрации и мониторинга видов животных и птиц. Большинство камер настроены на работу от датчика движения, а часть камер – на периодическую принудительную съемку. Количество бесполезных (шумовых) и некачественных снимков зависит от места установки камеры: в удачных местах их менее 1%, в ветреных местах с обилием кустарниковой растительности (но где поставить необходимо по условиям методики) таких снимков может быть до 99%. Качество снимков зависит также от настроек чувствительности камеры.

В настоящее время в заповедниках способ обработки, анализа и распознавания объектов по фотоснимкам с фотоловушек – ручной – давно устаревший, трудоемкий и малоэффективный. Поэтому для повышения скорости обработки фотоснимков и повышения достоверности распознавания объектов предлагается разработанный авторами эффективный способ [1].

В настоящее время для обработки фото и видеопотоков, в основном, используются нейронные сети. Нейронные сети являются одним из эффективно применяемых подходов для распознавания, предсказания и классификации объектов. За последние годы глубина применяемых нейронных сетей увеличилась, приведя к большей точности в отношении правильных ответов для различных задач

машинного распознавания образов, при этом размеры ядер свертки уменьшились.

Задачей данного исследования являлась разработка автоматического способа анализа и обработки больших массивов изображений с фотоловушек от исходных фотоснимков до их каталогизации по видам животных.

Процесс исследования состоял из четырех этапов (блоков), которые связаны между собой и выполняются последовательно. Каждому из этапов соответствует определенный алгоритм.

На первом этапе осуществляется качественная обработка больших массивов фотоснимков/изображений с фотоловушек с автоматической классификацией изображений по признаку дефекта, удалением некачественных фотографий. Для этого решается задача бинарной классификации, т.е. осуществляется сортировка изображений на содержащие дефект – им присваивается метка/класс «Defect» и не содержащие дефект – присваивается метка/класс «Correct».

Фотографии с дефектами классифицируются по типу дефекта: изображения с поврежденными пикселями – с меткой «Broken_pixels», пересвеченные изображения – с меткой «Overexposed», изображения с потерей резкости – с меткой «Blurred». Тип дефекта определяется по числовому значению интенсивности каждого пикселя изображения, которые образуют матрицу. Далее дается вероятностная оценка класса, к которому относится изображение.

На втором этапе осуществляется каталогизация качественных изображений с помощью глубокой сверточной нейронной сети: формируются классы «Empty», не содержащие распознаваемых объектов животного мира, и «Animal», содержащие изображения животных.

На третьем этапе осуществляется сортировка исходных изображений по поддиректориям в операционной системе, исходя из меток изображений, которые они получают в результате первых двух этапов.

На четвертом этапе генерируется отчет в виде табличного файла .csv, в который записываются имена файлов с изображениями и метки, соответствующие содержанию изображений. Табличный отчет используется для вычисления описательных статистик по входящему набору изображений, которые в дальнейшем используются для научной работы и ведения архива.

По результатам исследования разработан программный комплекс, который работает локально на вычислительной машине и не требует вмешательства оператора. Разработка осуществлена на языке

программирования Python версии 3.8. В таблице 1 приведены формулировки решаемых задач и используемые библиотеки Python для обработки изображений и машинного обучения.

Таблица 1. Использование библиотек Python

Применение	Используемая библиотека
Для вычисления статистик по изображению	библиотека компьютерного зрения OpenCV
Для оценки качества работы алгоритмов	scikit-learn
Для группировки и анализа исходных данных	библиотеки pandas и numpy

Заключение. Современная тенденция исследований с использованием фотоловушек такова: сведений о животных с труднодоступных мест для исследований становится все больше; увеличивается среднее количество устройств в ООПТ, занятых в подобных исследованиях; в разы возрастают и объемы получаемых данных (фотографии в 4К разрешении), которые сотрудники в научных отделах ООПТ порой не в силах обработать, как следствие – потеря ценной информации в отсутствии автоматизации процесса сортировки. Такая ситуация порождает следующие четыре проблемы.

Во-первых, поскольку каталогизация изображений проходит достаточно медленно, идентификация изображений отстает от получения новых, и многие из них остаются не идентифицированными.

Во-вторых, ручная обработка данных пользователем – достаточно утомительный процесс, что вызывает неизбежные ошибки в данных.

В-третьих, несовместимое/непоследовательное хранение данных и отсутствие единообразия в принятых названиях усложняют и запутывают поиск, классификацию и интерпретацию данных.

В-четвертых, затраты на выдерживание темпа приобретения и управления данными, поступающими с существующих фотоловушек, замедляются установкой дополнительных новых камер (и, соответственно, получением новых фотографий).

Данное изобретение позволит справиться с этими четырьмя проблемами: позволит обрабатывать большие массивы данных и предоставит возможность системной каталогизации изображений.

Работа выполнена в рамках внутриуниверситетского гранта для научно-педагогических работников ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет» по программе «Приоритет-2030»:

«Виртуальная лаборатория для обработки и анализа данных по биоразнообразию видов растений и животных» [2], 2022, 2023 гг.

Библиографический список

1. Панарин Р.Н., Соловьев А.А., Хворова Л.А. Применение технологий искусственного интеллекта и компьютерного зрения при решении задач автоматизации обработки и распознавания биологических объектов // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2022. – №1 (123). – С. 101–107.

2. Ваганов А.В., Хворова Л.А., Кротова О.С., Покалякин З.В. Виртуальная лаборатория для обработки и анализа данных по биоразнообразию видов // Сб. трудов межд. конф. «Информация и образование: границы коммуникаций» INFO'22, Горно-Алтайск, 5–8 июля 2022 г. С. 88–90.

Frontend-разработка цифровой информационной системы для работы с многоязычными текстами деловой документации

*Ю.Е. Поломошнова, Т.В. Михеева, Ю.А. Алябышева
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена frontend-разработке цифровой информационной системы для работы с многоязычными текстами деловой документации.

Ключевые слова: *информационная система, frontend, HTML, CSS, Java script, AngularJS.*

Большие объемы информации в бумажном виде значительно усложняют их чтение, дальнейшую обработку, поиск. Решением данной проблемы стало создание цифровой информационной системы. Информационная система – это система, предназначенная для хранения, поиска и обработки информации. Если работа требует информационного оснащения, то необходимо предусмотреть легкий, быстрый поиск информации, а также систематизацию новой информации.

Целью данной работы является проектирование и разработка клиентской части информационной системы официально-деловых текстов рамках проекта «Роль русского языка как языка перевода официально-деловых текстов на территории Большого Алтая». Проект направлен на закрепление за русским языком статуса языка перевода официально-деловой документации на территории стран Большого Алтая в целях интеграции и развития региона, а также включения тюркоязычных народов в мировое сообщество посредством русского языка.

Одной из задач проекта является разработка и представление в цифровом виде базы параллельных шаблонов документов на нескольких языках. Использование такой базы документов будет направлено на привлечение иностранных партнеров и клиентов предприятиями Алтая. При необходимости подписания документа на русском языке носителем иного языка наличие соответствующего параллельного текста на ином языке значительно облегчит понимание исходного русского документа.

Для работы с разработанной информационной системой пользователь должен зарегистрироваться. На рисунке 1 представлена форма регистрации/авторизации, также имеется функция восстановления пароля.

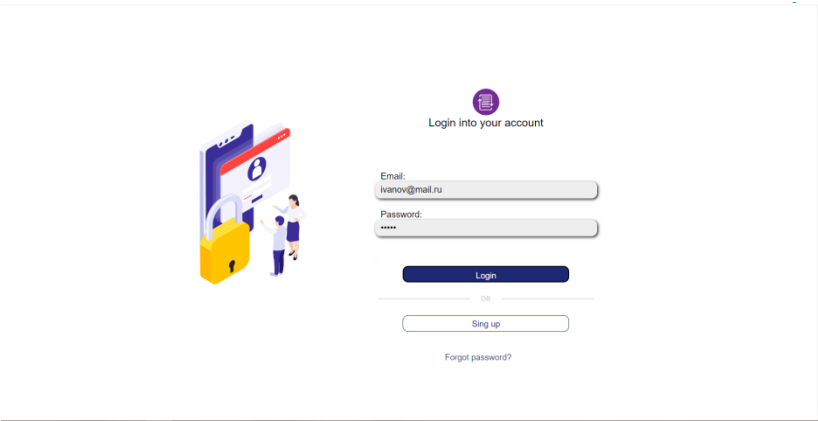


Рисунок 2 – Авторизация

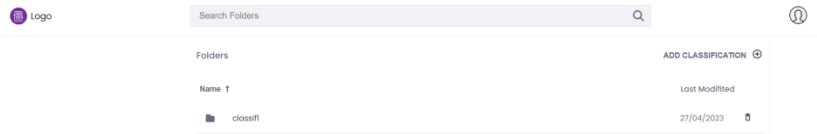


Рисунок 3 – Классификации

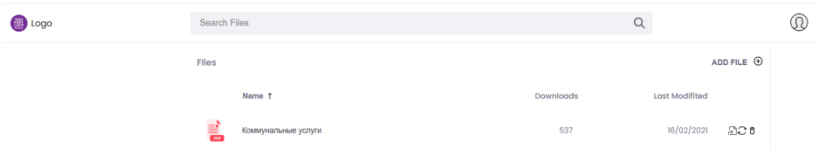


Рисунок 4 – Документы

Пользователь может просматривать документы, относящиеся к определенным классификациям (рис. 2). Документы можно

просматривать на нескольких языках, скачивать (рис. 3). Добавлять новые документы и удалять может только пользователь, обладающий такими правами.

Для разработки данной информационной системы были использованы такие языки программирования, как HTML, CSS, JavaScript и фреймворк AngularJS.

С помощью HTML и CSS была выполнена верстка страниц информационной системы. HTML – это содержание и разметка страницы, а CSS – внешний вид и позиционирование. С помощью JavaScript и AngularJS выстраивается логика и появляется интерактивность.

Данная информационная система официально-деловых текстов, обеспечит хранение, систематизацию, быстрый поиск шаблонов документов.

Библиографический список

1. Гончаров, А.Ю. Web-дизайн: HTML, JavaScript и CSS: карманный справочник / А.Ю. Гончаров. - М.: КУДИЦ-Образ, 2021. - 367 с.
2. Дакетт, Д. HTML и CSS. Разработка и дизайн веб-сайтов (+CD) / Д. Дакетт. - Москва: Высшая школа, 2019. - 480 с.
3. Информационные системы и технологии / Под ред. Тельнова Ю.Ф.. - М.: Юнити, 2017. - 544 с.

Особенности построения хранилища, интегрированных данных научно-производственного предприятия

Ф.А.Попов, А.В.Кодолов

*АО «Федеральный научно-производственный центр
«Алтай», г. Бийск*

В работе на примере АО «ФНПЦ «Алтай» рассмотрены вопросы и особенности создания хранилища интегрированных данных в структуре цифровой платформы, представленной совокупностью цифровых данных, моделей и инструментов, интегрированных в единую информационно-управляющую систему предприятия.

Ключевые слова: *цифровая трансформация научно-производственного предприятия, цифровая платформа, система хранения интегрированных данных, хранилище данных.*

В контексте статьи хочется напомнить, что 24 августа 2023 г. исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося советского ученого, результаты исследований которого составили то, что сегодня мы называем информационными и цифровыми технологиями, академика В.М.Глушкова [1].

Работы, по смыслу и содержанию идентичные современному понятию цифровой трансформации предприятий, выполнялись с начала 1970-х годов в г. Бийске на базе Алтайского НИИ химической технологии (позднее – АО «ФНПЦ «Алтай»). Работы в области информатизации и автоматизации производственных процессов проводились в соответствии с итеративной формулой <НИР, ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ИЗГОТОВЛЕНИЕ, ИСПЫТАНИЯ>, причем все эти процессы рассматривались во взаимодействии в рамках Единого Информационного Пространства (ЕИП) предприятия [2,3].

В настоящее время эти работы возобновлены в рамках Стратегии цифровой трансформации предприятия и предусматривают: создание на единого хранилища данных (ХД), построенного на основе онтологической модели данных; интегрированной информационно-управляющей системы (ИУС); возможности информационной поддержки всех этапов ЖЦ изделий. В том числе создается ЕИП управления производством и ЖЦ выпускаемых изделий, ключевой компонентой которого являются данные системы процессов

испытания изделий [4,5]. В итоге предусматривается формирование цифрового паспорта предназначенного для передачи в эксплуатацию изделия, с сохранением его оригинала в БД спроектированных и отработанных изделий.

Данная Стратегия разработана с учетом следующих основных положений:

- На предприятии существует множество систем БД, поддерживаемых различными подразделениями и не имеющих информационно-логической связи между собой. Очевидно, что создание единого ХД, интегрированной ИУС является актуальной и насущной проблемой [2-4,6];

- Проведение цифровой трансформации предполагает создание соответствующей цифровой платформы, представляющей собой совокупность данных, моделей и инструментов, информационно и технологически интегрированных в единую АСУ предприятием. В целом речь идет о внедрении цифровых технологий в сквозной процесс деятельности предприятия, включающий не только научно-производственные этапы, но и сопутствующую финансовую и организационную деятельность [2,4,7,8].

Интегрированная цифровая система управления при этом призвана обеспечить создание единого пространства данных для принятия управленческих решений и повышения операционной эффективности. Ее внедрение должно обеспечить рост качества научных исследований, продукции и сервисов, увеличение числа своевременно выполненных заказов, уменьшение затрат на закупку сырья и материалов, сокращение складских запасов предприятия, повышение рентабельности производства, сокращение сроков оборачиваемости оборотных средств, рост производительности труда.

Потребности производства обуславливают создание комплекса решений, обеспечивающих переход на использование технологий цифрового моделирования и виртуализации при разработке, создании, испытании и эксплуатации изделий и систем. Соответственно, предполагается создание единого цифрового пространства для конструкторских, технологических, производственных подразделений и эксплуатирующих организаций с отказом от бумажного документооборота. При этом внедрение системы управления ЖЦ основных изделий позволяет: сократить сроки создания новых изделий, повысить качество выпускаемой продукции и услуг, снизить трудоемкость обслуживания готовых изделий как в процессе их эксплуатации, так и их последующей утилизации, сократить время простоя оборудования, обеспечить переход к управлению основными

управленческими и под-держивающими процессами организации на основе достоверных дан-ных.

Современная инфраструктура хранения и представления данных, централизация сервиса хранения и добычи данных обеспечивают при этом повышение скорости принятия решений. Соответственно, единое ХД при этом предусматривает: создание БД для хранения всей собранной в процессе производства изделий информации, с возможностью последующей интеграции ее с данными, обусловленными процессами проектирования, подготовки к производству, испытания и хранения этих изделий; возможность восстановления истории производства изделия с целью ее анализа на предмет исключения аварийных ситуаций и брака, а также для формирования паспорта готового изделия; создание автоматизированного архива данных для сохранения всей истории развития и функционирования производства изделий.

Основными структурными компонентами ИУС являются; *централизованное ХД* - предметно-ориентированная интегрированная база зависимых от времени данных, построенная по технологии OLAP и предназначенная для подготовки отчётов и анализа с целью поддержки принятия решений техническими специалистами и руководством; *технологическая база данных реального времени*, формируемая средствами OLTP, предусматривающая синхронизацию, репликацию и резервирование данных для обеспечения отказоустойчивости системы управления; *база нормативных документов*, определяющих условия и регламент работы производства; *витрины данных*, ориентированные на представление необходимой информации техническим специалистам и руководству предприятия; *комплексы АРМ* обслуживающего персонала, технических специалистов и руководства, оснащенные интеллектуальными пользовательскими интерфейсами; *подсистемы* централизованного контроля, программно-логического и интеллектуального управления, сбора и передачи данных [2,3,6-8].

В целом все данные, формируемые в процессе создания изделий, после соответствующих преобразований сохраняются в структуре рассматриваемого хранилища и используются в дальнейшем как при создании новых изделий, так и при формировании цифрового паспорта изделия при завершении процесса его создания. При этом рассматриваемое хранилище, являясь центральной частью системы поддержки процессов создания изделий, разрабатывается с учетом необходимости интеграции данных подсистем в рамках ЕИП предприятия, с обеспечением его импортнезависимости.

В совокупности единое ХД в структуре ИУС является основой *информационной платформы*, источником всех данных по текущему состоянию производства, необходимых для работы руководству предприятия, техническим специалистам, производственным службам.

Библиографический список

1. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики. – М. : Наука, 1987. – 552 с.
2. Жарков А.С., Звольский Л.С., Литвинов А.В., Попов Ф.А. Проблемы создания интегрированных АСУ для производств спецхимии и пути их решения. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2014.–188 с.
3. Попов Ф.А., Груздев Г.П., Галигузов С.Н. Информационно-поисковая система в системе автоматизированного проектирования изделий машиностроения // Автоматизация проектирования. –1977. – № 1. – С. 51-56.
4. Абрамов Д.Г., Кодолов А.В., Попов Ф.А., Овчинников А.А. Проблемы и пути цифровизации управления предприятием отрасли спецхимии // Южно-Сибирский научный вестник.–2022.–№ 1(41).– С. 3-9.
5. Курбатов А.В., Кондрашов Д.А., Драничников И.А., Попов Ф.А. Информационно-измерительная система прочностных испытаний на этапе стендовых испытаний изделий из высокоэнергетических материалов // Южно-Сибирский научный вестник. –2021.–№ 3 (37).– С. 14-18.
6. Попов Ф.А., Максимов А.В. Подходы к проектированию баз данных для автоматизированных систем // Известия Алтайского государственного университета. –2003. – № 1 (27). – С. 050-053.
7. Попов Ф.А., Ануфриева Н.Ю. Интеллектуализация пользовательских интерфейсов информационных систем //Вестник Томского государственного университета. 2007.- №300(1).- С.130-133.
8. Абрамов Д.Г., Кодолов А.В., Попов Ф.А. Особенности построения пользовательских интерфейсов для автоматизированных систем управления производствами спецхимии // Автоматизация в промышленности. – 2018. – №6. – С. 52-57.

Об одном способе моделирования распространения инфразвукового сигнала

В. Ю. Сафонова

ФГБОУ ВО «Горно-Алтайский государственный университет», г. Горно-Алтайск

Работа посвящена одному из способов моделирования распространения инфразвукового сигнала, полученного в результате организации инструментальных наблюдений за нерегулярными природными явлениями.

Ключевые слова: *инфразвук, моделирование, распространение сигнала*

Достаточно часто люди сталкиваются с задачей обнаружения местоположения эпицентра всевозможных стихийных бедствий. Один из методов обнаружения и идентификации катастрофических явлений основывается на инфразвуковом мониторинге окружающей среды.

В данной работе рассматривается один из способов моделирования распространения инфразвукового сигнала и нахождения его источника. Мы предполагаем, что для локальных инфразвуковых источников распространение инфразвука приближается к траектории прямой видимости и что скорость звука является равномерной и изотропной. А также, подразумевается, что потенциальные источники инфразвука находятся на уровне земли, поэтому можно аппроксимировать ось z [1].

Расстояние от источника инфразвука (предполагаемого катастрофического явления) до i -го микрофона для известных координат источника можно отыскать применив следующую формулу:

$$R_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad (1)$$

Время распространения инфразвуковой волны t_i от источника инфразвука до микрофона с номером i зависит от скорости звука $V_{зв}$:

$$t_i = \frac{R_i}{V_{зв}} \quad (2)$$

Разность хода инфразвуковой волны для пары микрофонов рассчитывается по следующей формуле:

$$t_{ij} = \frac{R_i - R_j}{V_{3B}} \quad (3)$$

Важно, чтобы для каждой пары микрофонов было соблюдено соотношение:

$$R_i - R_j - V_{3B} * t_{ij} = 0. \quad (4)$$

Как правило, в дальнейших расчетах используется знакопостоянный функционал оценки суммарной погрешности следующего вида:

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (R_i - R_j - V_{3B} * t_{ij})^2 \quad (5)$$

При известных координатах источника инфразвука и отсутствии погрешности измерений функционал Φ_2 обращается в ноль.

Критерием правильности подбора координат, в случае если координаты источника инфразвука неизвестны, является минимизация функционала Φ_2 . В нашем случае нам известны числа, соответствующие задержкам срабатывания микрофонов (t_{ij}) и координаты микрофонов ($x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$, $z_1 \dots z_n$). Далее для функционала, приведённого ниже, находятся координаты минимума (x , y , z), которые и будут соответствовать координатам источника инфразвука [2]:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \right. \\ \left. - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} \right. \\ \left. - V_{3B} * t_{ij} \right)^2 \quad (6) \end{aligned}$$

Рассмотрим пример. Для эксперимента, проходящего на улице при температуре 20°C скорость звука $V_{3B} = 343,1$ м/с.

Случай 1. Координаты источника заранее известны (1 клетка = 1 метр). На рисунке 1 точками А = (4.98, 6.24), В = (1.72, 1.2), С = (8.2, 1.22) обозначены узлы первого уровня сети. Точка D = (4.14, 2.94) – источник инфразвукового сигнала.

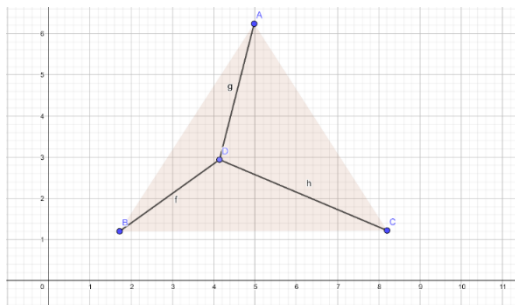


Рисунок 1 – Модель расположения узлов первого уровня сети

Тогда расстояние от источника инфразвука до узлов А, В и С можно найти, воспользовавшись формулой (1), соответственно, получив: $g \approx 3.40523$, $f \approx 2.98060$ и $h \approx 4.40931$. Умножаем на единичный отрезок и имеем в итоге: $g = 17.02615$ м, $f = 14.903$ м, $h = 22.04655$ м

Время распространения инфразвука от источника инфразвука до каждого из микрофонов вычисляется по формуле (2): $t_1 \approx 0.04962$ с, $t_2 \approx 0.04343$ с, $t_3 \approx 0.06425$ с.

Разность хода инфразвука для трёх пар микрофонов найдём, применив формулу (3): $t_{12} = 0.00618$ с; $t_{13} = -0.01463$ с; $t_{23} = -0.02082$ с.

Соотношение (4) для каждой пары микрофонов соблюдается. Незначительные отклонения от нуля можно объяснить погрешностью измерений. Знакопостоянный функционал (5) при известных координатах источника инфразвука и отсутствии погрешности измерений должен обращаться в ноль. В данном случае, функционал стремится к нулю, поскольку имеет место некоторая погрешность измерений.

Случай 2. Координаты источника заранее неизвестны. Здесь точка D – предполагаемый источник инфразвуковой волны.

Если координаты источника инфразвука неизвестны, их надо тем или иным способом подобрать. Процесс нахождения координат сводится к нахождению минимума функции (6).

Значение разности хода инфразвука t_{ij} возьмём из таблицы 1.

Таблица 1 – Значение разности хода инфразвука t_{ij} для трёх пар микрофонов

Пара микрофонов	Величина задержки
1–2	0.00618 с

1–3	-0.01463 с
2–3	-0.02082 с

Находим минимум функционала. Получаем точку $E = (4.95546, 2.68155)$. Расстояние между точкой E и точкой D – источника инфразвукового сигнала составляет 4,27718 м.

Поскольку, именно второй случай отражает картину, с которой мы сталкиваемся на практике, имеет смысл построить модель, в которой на реальные задержки наложен небольшой аддитивный шум.

Рассмотрим варианты моделей, в которых к значениям разности хода инфразвука добавлен аддитивный шум величиной в 5% и 10%.

При аддитивном шуме величиной в 5% находим минимум функционала (6) и получаем точку $F = (4.85699, 2.70829)$. Расстояние между точкой F и точкой D – источника инфразвукового сигнала проиллюстрировано на рисунке 3 и составляет 3,76751 м.

При аддитивном шуме величиной в 10% получаем точку $G = (4.75781, 2.73655)$. Расстояние между точкой G и точкой D – источника инфразвукового сигнала проиллюстрировано на рисунке 2 и составляет 3,25223 м.

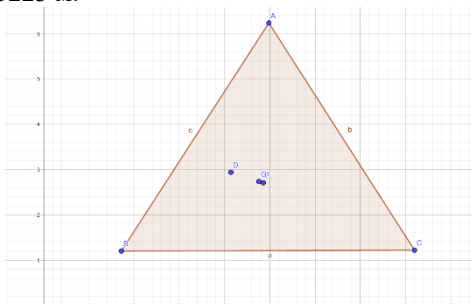


Рисунок 2 – Расположение точек D , F и G в модели

Как можно заметить, из-за воздействия шума рассчитанные координаты источника и расстояния между реальным и рассчитанным расположением источника сильно изменились, что, собственно, отражает сложность определения задержек в реальном эксперименте. Именно поэтому в дальнейшем мы решили определять их путем построения взаимнокорреляционных функций.

Библиографический список

1. Lam A. 3D sound-source localization using triangulation-based methods / Alice Lam. – The University of British Columbia. – 2015. – 120 p.
2. Львов А. В. Триангуляционная система определения координат источника звука / А.В. Львов, М.Н. Агапов, А.И. Тищенко // Ползуновский вестник Раздел III. Новые приборы и методы измерений. – 2010. – №2. – С. 159-162

Разработка регистра носителей генетических тромбофилий и прогнозирование риска их возникновения у жителей Алтайского края

*М.Г. Тримбач, Р.К. Клименко, Л.А. Хворова
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена разработке регистра носителей генетических тромбофилий и прогнозированию риска их возникновения у жителей Алтайского края.

Ключевые слова: *регистр, тромбофилии, риск возникновения тромбофилий, методы машинного обучения.*

Первая задача исследования связана с разработкой регистра носителей генетических тромбофилий на территории Алтайского края и его внедрением в инфраструктуру территориального Минздрава и является результатом совместного научного проекта с Алтайским государственным медицинским университетом.

Основными задачами проекта со стороны АлтГУ являются: составление алгоритма первичной выборки, предоставление инструмента для просмотра и редактирования данных регистра медицинским специалистам: гематологам, сотрудникам КГБУЗ "Алтайская краевая клиническая больница", обеспечение возможности получения данных о пациентах, подлежащих дообследованию и диспансерному наблюдению.

Пациента в регистр вносит врач. Список пациентов в Системе представлен на рисунке 1.

Носители генетических тромбофилий на территории Алтайского края

ДОБАВИТЬ ПАЦИЕНТА				
Пациент	Дата рождения	МО наблюдения	Уровень риска	Статус
 	23.08.1968 (54 года)			Диспансеризация
 	31.08.1979 (43 года)			Диспансеризация
 	27.05.1980 (42 года)			Диспансеризация

Рисунок 1 – Список пациентов

У каждого пациента в списке есть детальная страница с формой для внесения данных при создании регистра и при интерпретации гематологом. Каждому пациенту Система присваивает один из трех факторов риска: зеленый, оранжевый или красный. Каждый уровень определяется по набору базовых данных, которые уже присутствовали в медицинской системе в момент добавления пациента, либо по набору данных сосудистых событий и анамнеза, которые внес врач в форме детальной страницы пациента.

Вторая задача исследования – применение методов и алгоритмов машинного обучения для анализа, автоматической категоризации и прогнозирования уровней риска возникновения тромбофилии у жителей Алтайского края.

Тромбозы играют одну из главных ролей в развитии заболеваний сердечно-сосудистой системы, которые стоят на первом месте в инвалидизации и преждевременной смертности населения. Продолжающийся рост заболеваемости и поражение людей все более молодого возраста делает сердечно-сосудистые заболевания (ССЗ) важнейшей медико-социальной проблемой здравоохранения, а достаточно широкая распространенность тромбофилий делает данное исследование актуальным и практически значимым.

Информационное обеспечение исследования – это данные региональной медицинской информационной системы АРМ «Поликлиника» – медицинские карты пациентов, содержащие обезличенные оригинальные медицинские записи, копии предшествующего медицинского обследования, результаты клинко-инструментального и лабораторного обследования пациентов, позволяющие воссоздать ход клинического исследования и оценить его.

После предварительной обработки данных были реализованы следующие методы машинного обучения (ML): Дерево решений (класс DecisionTreeClassifier библиотеки sklearn), K-ближайших соседей (класс KNeighborsClassifier библиотеки sklearn), Логистическая регрессия (класс LogisticRegression библиотеки sklearn), Нейронная сеть (класс MLPClassifier библиотеки sklearn).

Используя методы ML, каждый человек был отнесен к одной из трёх категорий риска, соответствующих цветам светофора: зеленый – 1; жёлтый – 2; красный – 3.

Таблица 1. Отчет о классификации методами машинного обучения

Метод машинного обучения	accuracy	F1 score
--------------------------	----------	----------

Дерево решений	0,74	0.75
К-ближайших соседей	0,62	0.59
Логистическая регрессия	0.76	0.76
Нейронная сеть	0.87	0.87

Результатом работы каждого метода является отчет о проведенной классификации (табл. 1).

Сравнение результатов классификации проведено по доле правильных ответов – параметр (*accuracy*). Из таблицы 1 можем сделать вывод, что метод Нейронная сеть проводит классификацию точнее. Параметр – ассигасу (доля правильных ответов) – равен 87%.

Заключение. Внедрение информационных технологий в систему здравоохранения позволит медицинским учреждениям не только улучшить качество обслуживания, работать быстрее и эффективнее, но и приведет к росту научных исследований, связанных с применением сквозных цифровых технологий для решения медицинских задач. Новые разработки в области поддержки принятия врачебных решений, в том числе с использованием методов анализа данных и машинного обучения, ведутся как российскими, так и зарубежными учеными. Выполняя комплексный анализ деперсонализированных данных из электронных медицинских карт, алгоритмы машинного обучения выявляют заболевания, определяют факторы риска, прогнозируют осложнения и дают индивидуальные рекомендации пациентам.

Система сбора и визуализации статистических данных по работе роутеров корпоративной сети

*А.С Шнайдер, О.Н. Половикова
АлтГУ, г. Барнаул.*

Статья описывает результаты исследования по разработке и реализации сервиса визуализации статистических данных роутеров в меш сетях, анализ их статистических параметров и возможности построения по ним прогнозов.

Ключевые слова: *веб-приложение, визуализация данных, случайный лес, RandomForestRegressor, Django, Chart.js, анализ данных, API-интерфейс.*

Цель разрабатываемой системы основании собираемых с роутеров данных визуализирует собираемые данные за выбранный пользователем промежуток времени и интервале в удобном формате – в виде графиков.

В настоящее время тема визуализации данных становится все более популярной. По данным исследования CISCO, 90% всей информации в Интернете – визуальные данные [1, 2]. Популярность визуализации данных обоснована статистикой: около 60% людей воспринимают визуальную информацию быстрее чем любую другую. Человеку куда проще понять, что ему хотят сказать, если представить данные в виде графиков, схем или иных графических элементов. Именно поэтому все чаще у заказчиков появляются запрос на визуализации данных.

В ходе работы были проанализированы многие библиотеки, направленные на визуализацию данных: C3 [3], D3 [4], anyChart [5], amCharts [6]. Анализ их особенностей позволил сделать выбор на библиотеке Chart.js, обладающей широкими функциональными возможностями и при этом бесплатной.

В ходе исследования были проанализированы результаты нескольких статистических моделей: ARIMAX, Random Forest regressor, K-neighborhood regressor. После оценки результатов их работы был выбран Random Forest regressor как самый точный (на тестовых данных коэффициент детерминации~0.6).

Перед непосредственной разработкой проекта было рассмотрено несколько сервисов с подобным функционалом. Среди них следует выделить Omada Controller [7], который обладает схожим

функционалом, но визуализирует параметры работы маршрутизаторов. Google Data Studio [8] показывает различные запрашиваемые пользовательские данные. По результатам выполненного исследования определён основной функционал разрабатываемого сервиса:

- 1) Возможность выбора произвольного промежутка времени.
- 2) Возможность выбора одного из трех интервалов: 5 минут, 15 минут, 1 час, 1 день.
- 3) Переключение между роутерами.
- 4) Переключение между вкладками Performance и Speed Statistic.

Требования к работе системы:

- 1) Минимизация нагрузки на серверные ресурсы. Это важно для таких сервисов, где за продолжительный промежуток времени может накопиться большое количество данных, и вопросы о хранении и форматирования данных становятся актуальными.
- 2) Адаптация интерфейса под потребности пользователей. Например, обеспечение взаимодействия с пользователем без перезагрузки страницы, возможность выбирать любой роутер пользователя без переходов на другие страницы

Статистическими параметрами работы системы являются: скорость загрузки, скорость отдачи, кол-во пользователей, загрузка CPU, кол-во используемой памяти.

После анализа тестового набора данных была установлена корреляция между скоростью загрузки на сервер и скоростью загрузки на клиента, скоростью загрузки на клиента и загруженностью CPU. Поэтому следует сделать вывод, что на реальных данных уместно использовать методы прогнозирования.

В результате выполненного исследования разработан и интегрирован сервис визуализации статистических параметров роутеров. Проанализированы возможности моделей прогнозирования на параметрах работы роутеров. Планируется провести анализ реальных значений параметров. Если коэффициент детерминации покажет зависимость между параметрами работы роутеров, в этом случае следует рассмотреть возможность добавления к графикам прогноза.

Библиографический список

1. “Современные инструменты визуализации” url:
<https://4brain.ru/blog/sovremennyye-instrumenty-vizualizacii/>.
2. “Что такое визуализация данных?” url:
<https://www.oracle.com/cis/business-analytics/what-is-data-visualization/>
3. Страница C3. url: <https://c3-lang.org>
4. Страница D3. url: <https://d3js.org>
5. Страница anychart. url: <https://www.anychart.com>
6. Страница amcharts. url: <https://www.amcharts.com>
7. Эмулятора Omada Controller. url: <https://emulator.tp-link.com/EmulatorV5.0>
8. Страница Google Data Studio <https://lookerstudio.google.com/>

СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

УДК 004.8

Разработка и реализация игровой модели с динамическим построением контента на основе нейронной сети

*Д.Е. Арасланова, О.Н. Половикова
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья описывает результаты исследования по разработке и реализации игровой модели с динамическим построением контента на основе нейронной сети YOLO.

Ключевые слова: обучающая компьютерная игра, нейронная сеть, распознавание образов, персонализация контента, генерация контента.

Цель разрабатываемого проекта заключается в создании прикладной программы для изучения английского языка.

В настоящий момент процесс информатизации образования направлен на решение одной из фундаментальных задач – индивидуализации учебного процесса [1, с. 13]. Однако разработка игры, которая будет удовлетворять потребности большого количества людей, представляет собой непростую задачу. Обычно такие проблемы решаются с помощью создания шаблонов сложности, чтобы игрок мог выбрать ту сложность, которая ему наиболее удобна. При использовании нейронных сетей процесс индивидуализации может стать намного более гибким [2]. Поэтому нейронные сети постепенно начинают использоваться для разработки игр. Их используют, например, для создания 3D-моделей игровых персонажей, для оптимизации игровых текстур или для генерации внутриигровых заданий, а также для управления неигровыми персонажами.

В ходе работы проанализированы игровые модели обучения такие как, Duolingo, Anki и Games to learn English, определен необходимый функционал для разрабатываемой игры. В основе модели наполнения контента игры используется идея: тематические элементы

определяются пользователем и формируются за счёт распознавания образов на загружаемых графических файлах. В качестве инструмента для распознавания образов используется нейросеть.

При разработке компьютерной игры, как и для любого другого проекта, нужно определить целевую аудиторию. Целевой аудиторией данной обучающей компьютерной системы являются дети дошкольного возраста и учащиеся младших классов общеобразовательной школы. Прежде всего, выбор этой возрастной категории обусловлен тем, что ведущий деятельностью в этом возрасте является игра. Игра пробуждает интерес, любопытство, стимулирует мыслительную деятельность и создает положительную мотивацию к обучению [3, с. 221].

Разработанное игровое приложение реализует следующие возможности:

1. Создание, удаление, выбор, просмотр и редактирование информации пользователя;

2. Просмотр, выбор и прохождение заданий или тестов;

3. Возможность просмотра результатов всех пройденных тестов;

4. Получение игровой валюты за пройденные тесты и возможность потратить ее в игровом магазине;

Обучение английскому языку происходит в ходе выполнения различных заданий, конкретное содержание каждого задания генерируется исходя из элементов, которые распознала нейросеть. Ниже перечислены основные виды заданий:

1. Викторина. Задание представляет собой набор вопросов с несколькими вариантами ответов. Для выполнения этого задания требуется выбрать правильный ответ на заданный вопрос.

2. Сопоставление. Необходимо поместить каждое ключевое слово рядом с его определением.

3. Пропущенное слово. Это задание, в котором нужно вставить слова в пустые места в тексте.

4. Беспорядок. Требуется расставить слова в каждом предложении в правильном порядке.

5. Анаграмма. Предлагается перетасовать буквы в их правильное место, чтобы составить слово или фразу.

Процесс подготовки игры включает следующую цепочку этапов:

1. Пользователь выбирает шаблон задания, которое он хочет выполнять.

2. Игрок загружает свое или одно из предлагаемых изображений.

3. Нейронная сеть находит объекты на выбранном изображении.

4. Далее, на основе найденных объектов, формируется выбранный тип задания.

Таким образом, была разработана и реализована компьютерная игра для обучения английскому языку, с использованием нейронной сети для распознавания графических объектов. Задания генерируются по шаблонам, но с учётом распознанных элементов. В последующем планируется создать больше шаблонов для построения заданий. Доработать систему поощрений за счёт расширения способов получения вознаграждений. Так же следует уделить внимание на развитие игрового магазина.

Библиографический список

1. Соболева Е. В., Соколова А. Н., Исупова Н. И. и др. Применение обучающих программ на игровых платформах для повышения эффективности образования // Вестник НГПУ. 2017. №4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-obuchayuschih-programm-na-igrovyyh-platformah-dlya-povysheniya-effektivnosti-obrazovaniya>
2. Дубенко, К. И. Возможное применение нейронных сетей в играх в будущем / К. И. Дубенко // Наука, образование и культура. – 2018. – № 10(34). – С. 12-13. – EDN YSGECT.
3. Выготский Л. С. Игра и ее роль в психическом развитии ребенка// Вопросы психологии № 6.-1966.

Цифровые образовательные технологии на уроках математики

А.Е. Афанасьева

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

Статья посвящена использованию цифровых образовательных ресурсов на уроке математики на различных этапах урока. Рассмотрены различные онлайн сервисы по созданию интерактивных упражнений.

Ключевые слова: *цифровые образовательные ресурсы, методика обучения математике, интерактивные задания.*

На сегодняшний день человечество не может представить себе современную жизнь без цифровых технологий. С каждым годом все больше и больше внедряются цифровые образовательные технологии, которые учитель может применять на своих уроках.

Цифровые образовательные технологии в образовании – это одно из современных средств обучения, представленное в электронном формате, применение которого направлено на повышение эффективности учебного процесса и выполнения основных задач обучения и воспитания.

Существуют различные онлайн сервисы для создания интерактивных игр, обучающих приложений и упражнений. Например, одним из популярных таких приложений является ресурс LearningApps. Также есть похожие сервисы такие как Квестодел, Удоба, OnlineTestPad, Wordwall и многие другие [1, 2]. Использование игровых приложений облегчает работу учителя, так как сайты предлагают шаблоны для создания обучающих упражнений, способствующие меньшему затрат времени при подготовке к уроку.

Wordwall – платформа для создания интерактивных упражнений, основанный на бесплатной версии. Онлайн сервис имеет множество шаблонов: «Анаграмма», «Кроссворд», «Привести в порядок», «Флэш-карты» и так далее. Данный ресурс можно использовать на уроке математики на различных этапах. Например, на этапе определения темы занятия, можно воспользоваться упражнением «Анаграмма». На рисунке 1 представлено применение упражнения по теме «Теорема

Пифагора». Перед обучающимися стоит задача определения темы урока путем составления словосочетания из букв. Упражнение игрового характера направлено на развитие познавательных процессов у обучающихся [3].

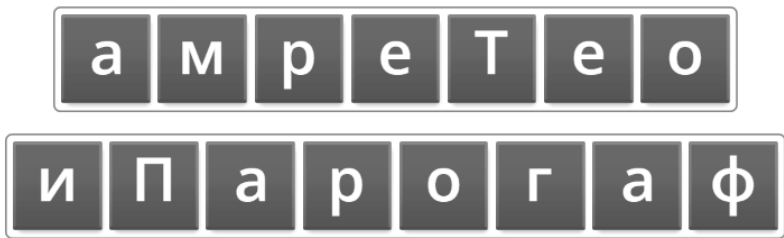


Рисунок 1 – Упражнение «Анаграмма»

Онлайн сервис LearningApps аналогичен предыдущему ресурсу Wordwall. В LearningApps есть шаблон «Слова из букв», который можно применить на этапе повторения изученного материала или закрепления темы. Упражнение заключается в отыскании слов из букв, формирующее у обучающихся навык поиска информации [4]. На рисунке 2 представлен фрагмент урока на тему «Теорема Пифагора».

Развитие мышления на уроках математики (Выполнила Афанасьева Анастасия)

с	е	ш	ц	ю	з	я	м	п	у	г
с	д	и	х	р	ф	н	с	э	н	е
г	и	п	о	т	е	н	у	з	а	о
э	ь	т	е	о	р	е	м	а	т	м
ю	ц	щ	ф	п	б	м	м	а	р	е
с	м	о	ч	и	я	к	а	т	е	т
п	ы	х	к	э	с	в	т	д	у	р
л	ш	п	ц	ю	и	а	ш	ь	г	и
о	р	ъ	с	э	д	д	д	э	о	я
п	и	ф	а	г	о	р	ъ	ц	л	к
а	ъ	б	с	р	н	а	а	е	ь	п
ц	ъ	х	н	я	т	т	ы	я	н	у
к	ы	н	ш	ц	т	щ	т	щ	и	х
т	ж	ь	я	ф	ц	т	к	м	к	й

1. ГЕОМЕТРИЯ
2. СУММА
3. ТЕОРЕМА
4. ГИПОТЕНУЗА
5. ПИФАГОР
6. КАТЕТ
7. ТРЕУГОЛЬНИК
8. КВАДРАТ

Рисунок 2 – Упражнение «Слова из букв»

Цифровой ресурс Квестодел также можно использовать на уроках математики. Квестодел автоматически генерирует ребусы на любое слово или фразу. Так, например, на геометрии можно воспользоваться генератором ребусов и зашифровать фразу «Теорема Пифагора». На рисунке 3 представлен пример ребуса. Применение ребусов на уроках математики способствует формированию логического и наглядно-образного мышления [3].

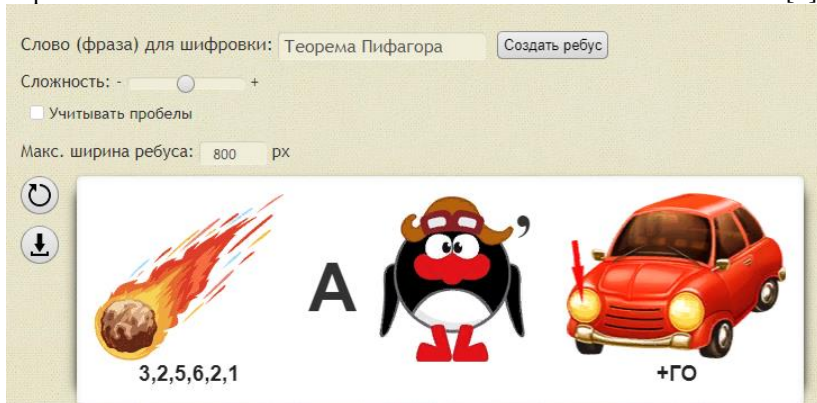


Рисунок 3 – Упражнение «Ребусы»

Таким образом, использование цифровых образовательных ресурсов позволяет сэкономить время учителя при подготовке к занятиям, а также их применение на уроках вызывает интерес у обучающихся, развивает логическое мышление, наглядно-образное мышление.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору НИР «Разработка методического сопровождения научно-исследовательской деятельности будущих учителей математики с использованием цифровых образовательных технологий» заявка № ШК-07-2023/1 от 20.04.2023 г.

Библиографический список

1. Табачук Н.П. Онлайн калькуляторы и программы в математическом образовании // Проблемы внедрения и оценка эффективности: материалы XXXV международного научного

семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Ульяновск: Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, 2016. – С. 289-293.

2. Шумакова Е.О. Использование электронных образовательных ресурсов в преподавании математики // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. материалы III Всероссийской научно-практ. конф. – Тверь: Тверской государственный университет, 2022. – С. 258-263.

3. Шумакова Е.О., Водомесова О.В. Особенности преподавания математики с использованием информационных технологий // В сборнике: Математическое образование в цифровом обществе. Материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. 2019. С. 308-310.

4. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" / Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 5. – С. 45.

Распознавание слов рукописного текста на примере школьных тетрадей

*Н.Ю. Глухов, Д.Ю. Козлов
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена применению компьютерного зрения для решения задачи распознавания слов рукописного текста. Решение данной задачи описывается несколькими этапами: сегментация слов, распознавание текста слов. Цель модели сегментации слов – предсказать полигоны слов. Цель модели распознавания слов – предсказать текст на полигоне, предсказанном моделью сегментации.

Ключевые слова: *Instance Segmentation, detectron2, optical character recognition, CTC loss, computer vision*

Введение

В настоящее время ряд форм документов, использующихся в документообороте различных организаций, предполагает частичное или полное заполнение прописью, от руки. Цифровизация документооборота касается и таких документов тоже, но с ними различные OCR-системы испытывают гораздо больше сложностей, чем с обычным печатным текстом, соответственно, и смысл написанного из этих источников извлечь гораздо труднее. Данная работа посвящена проблеме распознавания рукописного текста, извлеченного из школьных тетрадей, в которых, по понятным причинам, такого текста гораздо больше, чем в обычных документах.

Сегментация слов

Первый этап проекта – сегментация слов на изображении. Основной целью данного этапа является получение предсказаний полигонов для слов. Для выполнения сегментации была использована библиотека «detectron2» [1], из которой была взята уже предобученная модель Mask_RCNN [2].

Исходный датасет [3] для обучения модели сегментации слов содержит достаточное количество изображений школьных тетрадей с различным почерком учеников и координаты масок каждого слова для каждого изображения.



Рисунок 5 – Пример изображения из датасета с наложенными масками



Рисунок 6 – Пример работы модели сегментации, обученной на описанном датасете

На рисунках 1-2 приведены примеры сегментационных масок слов и результаты работы модели сегментации.

Распознавание текста слов

Второй этап проекта заключается в непосредственном распознавании текста с изображений сегментированных слов.

Датасет [4] для обучения модели распознавания содержит большой объём изображений вырезанных слов и csv-файл, в котором каждому названию изображения сопоставлен текст на данном изображении.

Этап распознавания реализован с помощью модели CRNN [5] с функцией потерь CTC Loss. Модель CRNN на выходе будет давать матрицу вероятностей предсказанного текста, после чего из этой матрицы будут выбираться буквы для каждой позиции слова, которые являются наиболее вероятными для нее (greedy-search-подход).

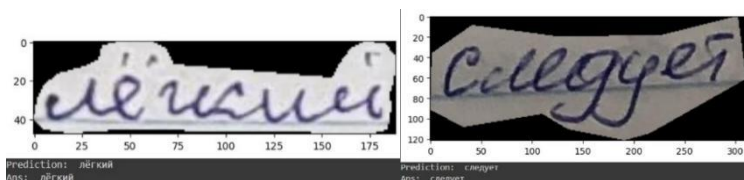


Рисунок 7 – Пример работы обученной модели распознавания

Третий (заключительный этап) связан с объединением работы модели сегментации, которая предсказывает границы слов, и модели распознавания текста с изображений, которые были вырезаны по полигонам, предсказанным моделью сегментации.

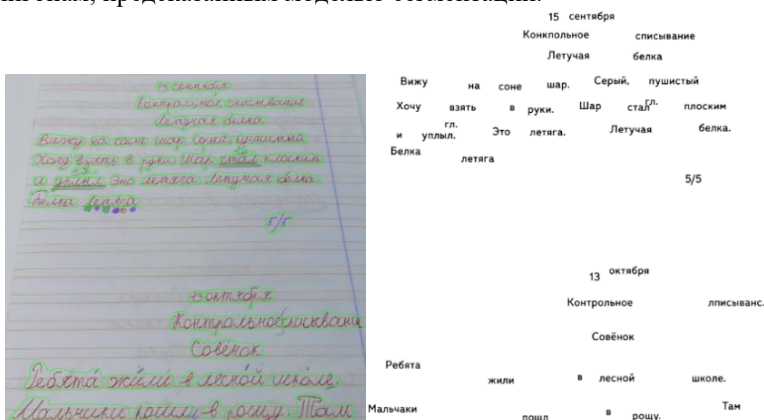


Рисунок 4 – Пример совместной работы модели сегментации и модели распознавания

Результат работы модели сегментации и модели распознавания приведен на рисунке 4.

Метрика

Метрикой оценки качества является расчёт коэффициента CER (Char Error rate). Коэффициент ошибки в распознавании символов считается по следующей формуле:

$$CER = \frac{\sum_{i=1}^n dist_c(pred_i, true_i)}{\sum_{i=1}^n len_c(true_i)},$$

где $dist_c$ – расстояние Левенштейна [6] для токенов-символов, len_c – длина строки в символах.

Значение CER может находится в диапазоне от 0, где 0 – наилучшее значение CER, до 1, где 1 – наихудшее значение CER.

Значение коэффициента CER составило 0,31 для валидационной выборки датасета, который был использован для обучения модели сегментации. Значение CER=0,31 говорит о том, что в работе двух моделей есть неточности. Они возникают прежде всего в работе модели сегментации: если модель сегментации пропустила слово, соответственно, оно не проходит через модель распознавания.

Заключение

В ходе выполнения работы была разработана модель сегментации слов на изображениях и модель распознавания текста слов. Таким образом, решение, представленное в этой работе, может частично решать проблему распознавания рукописного текста.

Библиографический список

1. detectron2 [Электронный ресурс] / github.com – URL: <https://github.com/facebookresearch/detectron2>
2. Mask R-CNN: архитектура современной нейронной сети для сегментации объектов на изображениях [Электронный ресурс] / habr.com – URL: <https://habr.com/ru/articles/421299/>
3. Dataset for segmentation [Электронный ресурс] / drive.google.com –URL: https://drive.google.com/drive/folders/1Ow2JPIwT_wOrb1NVBd9blB9Lml_o15xdT?usp=sharing
4. Dataset for recognition [Электронный ресурс] / drive.google.com – URL: https://drive.google.com/drive/folders/1S2ig_jRDOPBYQlBJK1u_12sVO3_9_Ah8s?usp=share_link
5. Снова о распознавании рукописного текста, на этот раз с помощью CRNN [Электронный ресурс] / habr.com – URL: <https://habr.com/ru/articles/720614/>
6. Damerau-Levenshtein distance [Электронный ресурс] / wikipedia.org – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Damerau-Levenshtein_distance

Проектирование датасета для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте

А.В. Графова, Е.М. Скурыдина

АлтГПУ, г. Барнаул

Статья посвящена проектированию датасета для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте с помощью методов машинного обучения. Показаны методы, библиотеки и метрики, позволяющие реализовать результаты спроектированного датасета для дальнейшего прогнозирования.

Ключевые слова: *проектирование датасета, киберспорт, алгоритмы машинного обучения.*

Киберспорт является одной из самых быстро растущих и динамично-развивающихся отраслей в мире развлечений, привлекающей миллионы зрителей и игроков со всего мира [1-2]. Соревнования в киберспорте проходят на высоком уровне профессионализма и предъявляют к игрокам высокие требования. Предсказание результатов соревнований в киберспорте имеет большое практическое значение для букмекерских контор, телекомпаний, спонсоров, команд и игроков. Машинное обучение может быть эффективным инструментом для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте, что делает данную тему актуальной для исследования.

Однако, киберспорт постоянно эволюционирует, и это создает новые проблемы для моделей машинного обучения. Одним из основных проблемных аспектов в киберспорте являются неожиданные ситуации, такие как болезни игроков, технические проблемы, изменения в составе команды, эксперименты с «драфтами» и стратегиями игры. Все эти факторы могут значительно повлиять на исходы соревнований и могут быть сложными для учета в моделях прогнозирования. Необходимо спроектировать датасет таким образом, чтобы недостаток актуальных данных и неучтенные факторы привели к достаточно точным прогнозам результатов соревнований в киберспорте.

Целью данной работы является разработка датасета для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте с

использованием методов машинного обучения с помощью языка программирования Python.

Для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте с использованием моделей машинного обучения целесообразна подготовка соответствующего обучающего датасета. Для корректного обучения модели следует подготовить достаточное количество данных, которые должны быть репрезентативными и сбалансированными. Требуется выбрать важные признаки, а слабые и неинформативные отбросить, чтобы не перегружать вычислительные ресурсы. Информационные признаки должны обладать хорошей вариативностью и соответствующей корреляцией друг к другу. На основе перечисленных положений был спроектирован набор данных, включающий следующие столбцы: Duration, Kills_Score0, Kills_Score1, Winner, 0_Team и 1_Team. Каждый из этих признаков имеет свою значимость и важность при анализе и предсказании результатов соревнований в киберспорте.

Столбец Duration указывает длительность матча, что может быть важно для анализа производительности игроков и команд. Длительность матча может быть связана с тактическими аспектами игры и влиять на результаты.

Столбцы Kills_Score0 и Kills_Score1 указывают на количество «убийств», совершенных игроками. «Убийства» являются одним из ключевых параметров в киберспорте, так как они позволяют определить эффективность игроков и их вклад в общий результат команды. Анализ этих признаков может помочь выявить сильные и слабые стороны команд и игроков.

Столбец Winner указывает на победителя матча, а также является целевым признаком в данном наборе данных. Он содержит информацию о победителе соревнования. Анализ этого признака позволяет понять, какие факторы и условия могут влиять на результаты и исходы соревнований в киберспорте. Прогнозирование победителя на основе данного признака должно стать основным результатом.

Выбранные столбцы в наборе данных достаточно полно описывают характеристики матчей и игроков, необходимые для решения задачи прогнозирования результатов соревнований в киберспорте.

Для достижения оптимальных результатов в анализе данных необходимо провести их предварительную обработку, включая удаление шумов и заполнение пробелов.

Для проверки репрезентативности и сбалансированности данных, а также полноты отобранных признаков были выбраны несколько

алгоритмов машинного обучения, которые позволяют эффективно работать с классификационными задачами. В представленном арсенале моделей присутствуют следующие алгоритмы: адаптивный бустинг (AdaBoost), случайный лес (Random Forest), экстремальный градиентный бустинг (XGBoost) и k ближайших соседей (k-NN) [3-5]. Каждая из этих моделей имеет свои особенности и преимущества, и позволяет в результате сделать вывод о качестве спроектированного датасета.

Проведем сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения, используя следующие параметры: время обучение и метрики оценки качества модели, такие как Accuracy и F1-score (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения

№	Метрики	Алгоритмы			
		AdaBoost	Random Forest	XGBoost	k-NN
1	Accuracy	0,94	0,95	0,95	0,83
2	F1-score	0,95	0,96	0,96	0,86
Время обучения		0,28	0,05	0,08	0,01

Сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения показал, что в целом датасет сбалансирован и репрезентативен. Но при проверке на тестовых данных результаты оказались менее качественными. Это говорит о необходимости увеличения количества данных в датасете. Также следует подобрать модель с гиперпараметрами, оптимизированными в зависимости от специфики представленных данных и требуемого качества классификации.

В дальнейшем работа будет продолжена в направлении подбора модели для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте.

Библиографический список

1. Плешаков В.А. Размышления о киберспорте в России // Спорт, туризм и гостеприимство в образовательном пространстве: инновации и перспективы развития. сборник материалов международной научно-практической конференции. Московский государственный университет спорта и туризма. Москва, 2022. – С. 256-264.
2. Реди Е.В. Киберспорт. История зарождения. Критика общества // Рефлексия. – 2023. – №1. – С. 30-33.

3. Лакшаман В., Робинсон С., Мунн С. Машинное обучение. Паттерны проектирования: пер. с англ. – СПб.: БХВ – Петербург, 2022. – 448 с.
4. Рашка С. Python и машинное обучение: пер. с англ. А. В. Логунова. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 418 с.
5. Шарден Б., Массарон Л., Боскетти А. Крупномасштабное машинное обучение вместе с Python: пер. с англ. А. В. Логунова. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 358 с.

**Элементы автоматизации контроля успеваемости
студентов на основе анализа цифровых следов
на образовательной платформе**

*А.С. Маничева, В.В. Журавлева, Д. Абдрахманова
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию данных, источником которых послужила система управления обучением Moodle, применительно к автоматизации контроля успеваемости студентов на основе анализа цифровых следов.

Ключевые слова: образование, Moodle, машинное обучение, модель дерева решений, цифровые следы.

Большинство ВУЗов используют образовательные платформы в процессе обучения. Примером может служить система управления обучением Moodle (Модульная объектно-ориентированная динамическая обучающая среда).

С неуклонным ростом потребности в онлайн-обучении для преподавателей, руководителей образовательных программ и дирекции институтов, факультетов становится все более важным собирать данные для отслеживания и контроля успеваемости студентов в автоматическом режиме. Система Moodle повышает эффективность образовательных процессов в ВУЗах и позволяет аккумулировать информацию о цифровых действиях пользователей (цифровых следах). Технологии анализа цифровых следов используются в исследованиях, посвященных решению задач классификации и предсказания в разных сферах деятельности [1–5].

В системе Moodle, внедренной в образовательный процесс Алтайского государственного университета, имеется возможность выгрузки данных о действиях пользователей (просмотр элемента курса, загрузка материалов по заданию и т.д.).

В общем виде алгоритм контроля успеваемости студентов на основе анализа цифровых следов на образовательной платформе может быть представлен следующими шагами:

1. Задание параметров выгрузки данных (выбор студентов, дисциплин).

2. Предобработка данных (выбор типов действий, преобразование формата отдельных данных).
3. Использование предварительно обученной модели классификации студентов по степени успеваемости.

Модель классификации основана на методе дерева решений и предсказывает, к какому из двух классов причисляется студент: «успевающий» или «неуспевающий». Класс «успевающих» включает студентов, имеющих положительную аттестацию не менее, чем по 85% дисциплинам из комплекса заранее определенных дисциплин.

Для тестирования описанного алгоритма контроля успеваемости студентов были выгружены из системы Moodle данные по действиям студентов института математики и информационных технологий за первые три года обучения (2019-2022 гг.) следующих направлений подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки». Были выбраны: 1) дисциплины (в количестве 21 штука), общие для всех трех направлений и преподаваемые на первых трех курсах; 2) типы основных действий (9 вариантов).

Количество студентов в выборке составило 94 человек. Для каждого студента определялся цифровой след по конкретной дисциплине как количество действий заданных типов. Таким образом, общее число признаков равно произведению числа дисциплин на число типов действий плюс идентификатор направления подготовки и составило 190.

Применение модели дерева решений дало следующие результаты:

- точность модели на обучающей выборке составила 0,96;
- точность предсказания на тестовой выборке составила 0,70.

Полученная точность предсказания может быть обусловлена тем, что ряд курсов имеет вспомогательный характер и направлен на очное обучение.

В дальнейшем планируется повышение точности модели и ее использование для автоматизации контроля успеваемости студентов совместных образовательных программ магистратуры, являющихся иностранными гражданами.

Библиографический список

1. Журавлева В. В., Маничева А. С., Фещенко А. В., Берестов А. В. Исследование различимости цифровых следов у различных групп школьников на территории Алтайского края // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. – 2020. – Т. 1, № 4. – С. 121-125.
2. Журавлева В.В., Маничева А.С. Проблемы классификации бинарных данных на примере анализа цифровых следов старшеклассников // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XV Всероссийской с международным участием школы-симпозиума АМУР-2021. – Симферополь-Судак, 14-27 сентября 2021. – Симферополь, 2021. – 504 с. – 173-174 с.
3. Zhuravleva V., Manicheva A., Kozlov D. Parallel Computing in Problems of Classification of Teenagers Based on Analysis of Digital Traces // «Communications in Computer and Information Science» (CCIS), 2021. V 1526, P. 215-226. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94141-3_17.
4. Мантуленко В.В. Перспективы использования цифрового следа в высшем образовании // Наука, образование, культура. – 2020. – № 3. – С. 32-42.
5. Курзаева Л.В., Савва Л.И., Назарова Е.К., Корнев Р. Анализ цифрового следа обучающихся для мониторинга групповых проектов в системе дистанционного обучения в вузе // Мир науки. Педагогика и психология. – 2021. – Т. 9. – № 5. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/57PDMN521.pdf>

Проектирование и разработка информационной системы для обучения шахматам

Осыкин Д.А., Половикова О.Н.

АлтГУ, г. Барнаул

В данной статье представлено описание процесса проектирования и разработки сервиса, предназначенного для обучения детей шахматам. Сервис разработан при помощи средств и технологий игрового движка Unity. Созданная шахматная программа содержит все необходимые компоненты: представление шахматной доски, методы поиска и листовую оценку. Игра делится на два блока: учебный и блок свободной игры. В учебном блоке пользователям предлагается набор тестов и практических заданий, а в блоке свободной игры пользователь играет с компьютером, у которого имеется случайные количество и типы фигур.

Ключевые слова: *компьютерные шахматы, игра, уровни сложности, задания, листовая оценка, альфа-бета отсечение.*

Шахматы всегда были и остаются одной из самых популярных игр. Они имеют чёткие правила и обеспечивают достаточную вариативность партий, что поддерживает интерес миллионов шахматистов. Люди играют в шахматы с глубокой древности, и до недавнего времени способы реализации этой игры не менялись. С появлением компьютеров возникла идея перевести эту древнюю игру в программу, чтобы повысить удобность партий. После реализации шахматной доски появился вопрос – а можно ли создать виртуального шахматиста? Чёткие правила шахмат позволяют задать точные алгоритмы поиска ходов, поле всегда одинаково и его уже научились реализовывать. Так возникли компьютерные шахматы.

Компьютерные шахматы – термин, означающий совокупность программного обеспечения и специальных компьютеров для игры в шахматы. Программы для реализации компьютерных шахмат называются шахматными программами, а компьютеры для игры в шахматы зовутся шахматными компьютерами. *Шахматной программой* называют компьютерную программу, предназначенную для расчета шахматных вариантов. *Шахматным компьютером*

называют специализированное устройство для игры в шахматы. Обычно используется для развлечения и практики игроков в шахматы при отсутствии партнера-человека, в качестве средства для анализа различных игровых ситуаций, для соревнования компьютеров между собой.

На данный момент в русскоязычном пространстве компьютерные шахматы представлены в основном локализованными зарубежными программами – например, lichess [4]. Российские сервисы представлены в значительно меньшем количестве и разнообразием возможностей. Следует отметить, что в открытом доступе очень мало программных продуктов и сервисов для обучения именно новичков шахматам. Поэтому задача по разработке сервиса «компьютерные шахматы» является актуальной и требует решения.

Особенности реализации

Базовые компоненты шахматной программы реализованы следующим образом:

- Представление шахматной доски выполнено в виде *магических битбордов*. Каждая клетка доски хранится в одном бите 64-битного числа, а для цвета и типов фигур созданы отдельные переменные.
- Методы поиска представлены *альфа-бета отсечением* с модификацией «поиск спокойствия».
- Листовая оценка реализована в программном коде на основе сантипешечной оценки.

Разрабатываемая шахматная программа включает два модуля: *учебный* и *модуль свободной игры*. В **учебном модуле** игроку предлагается выполнить несколько заданий и различные тесты, посвященные особым шахматным ситуациям. Каждому заданию предшествует небольшая лекция, рассказывающая о теме урока. Для окончания урока требуется выполнить предложенное задание три раза либо успешно завершить тест. В процессе выполнения задания оцениваются полученные результаты пользователя и на их основе выставляется оценка за урок. Уроки можно *проходить* повторно.

Тесты представляют собой наборы заданий с возможностью подсказок в случае возникающих затруднений. Каждое тестовое задание содержит либо два, либо четыре вопроса. Количество подсказок ограничено – каждый тип подсказки можно использовать только один раз. Представленные типы подсказок:

- Убрать половину неправильных вариантов.
- Право на ошибку – в случае неправильного ответа игроку даётся возможность повторно ответить на вопрос.

Все задания были составлены на основе рекомендаций из [5].

Список представленных практических заданий – *передвижение фигур, срубание фигур, двойной удар, связка.*

Список представленных тестовых заданий – *цугцванг, мат в два хода, мат королю, ничейные ситуации, определи фигуру.*

Модуль свободной игры доступен из главного меню, и он позволяет сыграть в шахматы с компьютером, который имеет случайные количество и варианты фигур. Количество фигур и доступные компьютеру варианты фигур определяются уровнем сложности. Всего уровней сложности компьютера шесть: *пешка, офицер, конь, ладья, ферзь и король*. Максимально доступный тип фигуры ограничен уровнем сложности – так, компьютер с уровнем сложности *конь* не может иметь ферзя. Исключением из этого правила является король – он всегда присутствует у обоих игроков. Количество фигур имеет начальный диапазон от 2 до 4 фигур. Каждый новый уровень сложности увеличивает этот диапазон на 3. Так, у *ладьи* может быть от 11 до 13 фигур. *Король* является особым уровнем сложности – на этом уровне компьютер всегда имеет полное количество фигур.

В результате выполненного исследования спроектирован и разработан сервис «шахматная программа», предназначенный для обучения детей данной игре. Представленное количество практических и тестовых заданий охватывает начальный уровень игры и обеспечивает пошаговое знакомство с шахматами, используя доступный лекционный материал. Модуль свободной игры позволяет сыграть с компьютером в различных начальных позициях, что способствует развитию навыков у игроков. Интеграция с современными шахматными нейронными сетями является одним из перспективных направлениями развития представленного сервиса.

Библиографический список

1. Stockfish – Open Source Chess Engine: [сайт] – URL: [https://www.stockfishchess.org] (дата обращения: 04.10.2022)
2. AlphaZero: Shedding new light on chess, shogi and Go | DeepMind: [сайт] – URL: [https://deepmind.com/blog/article/alphazero-shedding-new-light-grand-games-chess-shogi-and-go]
3. The Computer Chess World Champion – Shredder Chess: [сайт] – URL: [https://www.shredderchess.com/]
4. lichess.org. Бесплатные шахматы онлайн: [сайт] – URL: [https://lichess.org/]
5. Славин И.Л. – Учебник-задачник шахмат, Правда Севера, Т.1, 1998.

6. Как компьютер играет в шахматы? / Хабр: [сайт] – URL: [\[https://habr.com/ru/articles/390821/\]](https://habr.com/ru/articles/390821/)
7. Шахматы на C++: [сайт] – URL: [\[https://habr.com/ru/articles/682122/\]](https://habr.com/ru/articles/682122/)
8. Шахматные алгоритмы, которые думают почти так же, как человек, только лучше / Хабр: [сайт] – URL: [\[https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/544040/\]](https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/544040/)
9. А.В. Лысенко, Е.Я. Гик – Оценка позиции. Компьютерные шахматы, Физкультура и спорт, 1990.
10. Unity, платформа разработки в реальном времени: [сайт] – URL: [\[https://unity.com/ru\]](https://unity.com/ru)

«Код будущего» - первые результаты проекта

Л.Л.Смолякова,

АлтГУ, Барнаул

В статье рассмотрены основные аспекты программы обучения школьников основам программирования на языке Python на базе учебных материалов компании Яндекс. Рассмотрены цели реализации программы, планируемые результаты обучения

Ключевые слова: *«код будущего», программирование, образование.*

В рамках федерального проекта «Развитие кадрового потенциала ИТ-отрасли» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации реализует проект «Код будущего» по предоставлению школьникам 8 – 11 классов возможности прохождения дополнительного двухлетнего курса обучения современным языкам программирования. Яндекс выступает одним из провайдеров на его базе ведутся занятия в АГУ . Курсы направлены на изучение современных языков программирования. Минимальный объем составляет 144 академических часа (2 раза в неделю по 90 минут), освоить которые предстоит за два года в рамках четырех модулей. На курсах школьники смогут не только получить углубленные знания и навыки в области программирования, которые пригодятся для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ, участия в олимпиадах и хакатонах, но и принять участие в разработке учебного проекта. По итогам обучения школьник получит сертификат.

Цели проекта «Код будущего»

1. Подготовка будущих кадров для отечественных высокотехнологичных компаний
2. Углубление знаний и навыков в области программирования (в том числе для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ)
3. Помощь в ранней профориентации
4. Предоставление возможности освоить первую ИТ-специальность еще в школе.

В АГУ реализована, на данный момент одна программа: Знакомство с Python — это облегченная программа, подготовленная Яндекс Учебником. Она идеальна для самого первого

знакомства с языком программирования Python. На этой программе дети погружаются в несложное программирование, изучая математические основы информатики. Важно сказать, что обучение по ней идет в самом медленном и приятном темпе. Это очень выверенная методически программа.

Курс построен в виде путешествия, каждая тема состоит из теоретического и практического урока. Преподаватель работает с учащимися и студентами более 30 лет. Поэтому реализация данной программы осуществляется на хорошем уровне, используется большая база собственных задач, благодаря которой, учащиеся решают большое количество практических задач и повышают свой уровень и самооценку. Данный курс методически хорошо построен, хотя в нем есть недочеты, но Яндекс ведет большую работу с практическими преподавателями и недочеты исправляются своевременно.

Курс состоит из 4 модулей, каждый модуль завершается тестированием и творческим проектом. Вот программа первого года обучения:

Модуль 1. Линейные и разветвлённые алгоритмы

- Знакомство с Python. Команды input() и print() 2 урока
- Параметры sep, end. Переменные. Комментарии 2 урока
- Целочисленная арифметика в Python. Решение задач 4 урока
- Условный оператор. Логические операции and, or, not 4 урока
- Проектная работа «Калькулятор» 4 урока

Модуль 2. Циклические алгоритмы

- Переход на модуль 1 урок
- Повторение пройденного. Вложенные условия 2 урока
- Типы данных int, float, str. Функции min(), max(), abs() 2 урока
- Циклические алгоритмы. Цикл for. Функция range() 5 уроков
- Задачи с циклами. Цикл while. Операторы break, continue 5 уроков
- Проектная работа «Продвинутый калькулятор» 4 урока
- Проектная работа «Случайный фильм» 5 уроков
- Проектная работа «Плейлист» 4 урока

Модуль 3. Основные структуры данных

- Опрос 1 урок

- Повторение пройденного. Задачи с условиями, циклами 2 урока
- Работа со строками. Индексация, срезы, методы строк 4 урока
- Основы работы со списками. Вывод элементов списка 4 урока
- Методы списков. Списочные выражения. Решение задач 5 уроков
- Проектная работа «Персональный помощник» 2 урока
- Проектная работа. Игра «Быки и коровы» 1 урок
- Проектная работа «Текстовый квест» 1 урок
- Решение задач 1 урок

По мере продвижения от модуля к модулю, проекты становятся все более сложными и разнообразными. В нашем классе обучаются учащиеся 8 класса, причем со слабой «информационной» подготовкой, но благодаря правильно подобранным дидактическим материалам, грамотными консультациями преподавателя к концу года учащиеся научились, в основном, самостоятельно выполнять задания учебника и преподавателя. У обучаемых появилось желание участвовать в дополнительных мероприятиях Яндекса: опросах, олимпиадах. Благодаря опросам провайдера, преподаватель имеет возможность анализировать их результаты и корректировать свою методику преподавания: разбирать те уроки, в которых многие учащиеся допустили ошибки, разбирать как индивидуально, так и в коллективе.

Автор рекомендует приступать к изучению основ как можно раньше, тогда при хорошей базовой подготовке уже с 7-8-го класса можно серьезно заниматься и непосредственно программированием. Это позволит не просто создавать свои интересные проекты, но и начать рабочую карьеру раньше сверстников. Раннее погружение в программирование позволяет развить критическое мышление, способность анализировать, выстраивать понятную модель поведения, находить решения в нестандартных ситуациях. Все эти навыки пригодятся ребятам не только в образовании, но и в жизни за стенами школ и университетов.

Согласно планам федерального проекта «Развитие кадрового потенциала ИТ-отрасли», к 2030 году проект «Код будущего» позволит обучить программированию не менее 1,2 миллионов школьников.

Библиографический список

1. Официальная страница проекта «Код будущего»
<https://futurecode.ru/>.
2. Смолякова Л.Л., Половикова О.Н., Пиянзин А.И. Профессиональная направленность курса по программированию для бакалавров с учетом государственных приоритетов развития цифровой экономики. Мир науки, культуры, образования. № 3 (76) июнь 2019.

Классификация комментариев к посту на портале sports.ru и анализ их тональности

М.А. Юрьев, Д.Ю. Козлов

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Статья посвящена классификации и анализу тональности комментариев к посту на портале sports.ru. Сначала выполнялся парсинг этих комментариев, а затем проводился анализ тональности комментариев, результаты которого визуализированы с помощью графика распределения комментариев.

Ключевые слова: парсинг, датасет, TF-IDF, векторайзер.

В настоящее время для многих компаний важно оценивать отношение клиентов к их услугам и продукции. Очень пристальное внимание в связи с этим привлечено к различным онлайн-площадкам, на которых оставляются отзывы клиентов. Соответственно, актуальной становится задача оценки тональности этих отзывов. Еще одной актуальной задачей является оценка тональности комментариев, на видеохостингах [1], или, например, на спортивных сайтах.

Парсинг комментариев и имен пользователей

```
#Создаем списки для результатов парсинга
scrapped = []
scrapped2 = []

with webdriver.Chrome(executable_path = r'c:\temp\chromedriver.exe') as driver: #Инициализируем экземпляр webdriver
    #указываем время ожидания в секундах и url адреса жметей
    wait = webdriver.support.ui.WebDriverWait(driver, 1)
    driver.get("https://www.sports.ru/hockey/1115007425-nxl-boston-primet-tampu-rejndzher-v-gostyax-u-floridy-pittsburg-proti.ht
    for item in tqdm(range(30)): #Задаем количество прокруток для загрузки комментариев
        wait.until(webdriver.support.expected_conditions.visibility_of_element_located(
            (By.TAG_NAME, 'body'))).send_keys(webdriver.common.keys.Keys.END)
        time.sleep(4) #указываем время ожидания в секундах после каждой прокрутки

    for nickname in wait.until(webdriver.support.expected_conditions.presence_of_all_elements_located(
        (By.CLASS_NAME, "comment-author_nick"))): #Получаем имена пользователей по названию класса "comment-author_nick"
        scrapped.append(nickname.text) #Добавляем имена пользователей в список

    for comment in wait.until(webdriver.support.expected_conditions.presence_of_all_elements_located(
        (By.CLASS_NAME, "comment-content"))): #Получаем комментарии по названию класса "comment-content"
        scrapped2.append(comment.text) #Добавляем тексты комментариев в список

comments = scrapped2
nicknames = scrapped

C:\Users\79133\AppData\Local\Temp\ipykernel_32868\1242457234.py:4: DeprecationWarning: executable_path has been deprecated, please pass in a Service object
    with webdriver.Chrome(executable_path = r'c:\temp\chromedriver.exe') as driver: #Инициализируем экземпляр webdriver
100% [30/30 [02:10:00:00, 4.37s/it]
```

Рисунок 1 – Парсинг комментариев и имен пользователей.

В представленной статье как раз рассматривается распределение тональности комментариев к новости из хоккейного раздела на портале sports.ru [2].

Для начала нам необходимо получить комментарии с помощью парсинга (см. фрагмент программного кода на рисунке 1). Для этого воспользуемся Python библиотекой Selenium, которая позволит автоматизировать действия в браузере .

Далее проведем обработку комментариев: оставим в текстах комментариев только кириллические символы, приведем их к нижнему регистру и удалим различные предлоги и местоимения, которые не полезны для нашей задачи. Для реализации всего вышеизложенного напишем пару функций, программный код которых представлен на рисунках 2 и 3.

```
def clear_text(text:str) -> str:
    """
    Функция получает на вход строку текста

    Удаляет с помощью регулярного выражения
    все не кириллические символы и приводит
    слова к нижнему регистру

    Возвращает обработанную строку
    """
    clear_text = re.sub(r'[^\A-\R\W]+', ' ', text).lower()
    return ' '.join(clear_text.split())
```

Рисунок 2 – Удаление не кириллических символов и приведение слов к нижнему регистру.

```
def clean_stopwords(text:str, stopwords:list):
    """
    Функция получает:
    * text -- строку текста
    * stopwords -- список слов для исключения из текста

    Возвращает строку текста с исключенными стоп словами
    """
    text = [word for word in text.split() if word not in stopwords]
    return ' '.join(text)
```

Рисунок 3 – Удаление лишних слов.

После этого используем функции для обработки текстов комментариев (Рисунок 4).

```
start_clean = time.time()
comments_df['text_clean'] = comments_df['comment'].apply(lambda x: clean_stopwords(clear_text(str(x)), stopwords))
print('Обработка текстов заняла: ' + str(round(time.time() - start_clean, 2)) + ' секунд')
Обработка текстов заняла: 0.03 секунд
```

Рисунок 4 – Обработка текстов комментариев.

Для классификации комментариев по эмоциональной окраске воспользуемся датасетом [3], содержащим набор текстов, размеченных на два класса – positive и negative.

Теперь преобразуем наши тексты в числовые вектора с помощью модели TF-IDF, которая позволит снизить вес для часто встречаемых слов и повысить вес для более редких слов (Рисунок 5).

```
#Предварительно разделим выборку на тестовую и обучающую
train, test = train_test_split(labeled_tweets, test_size = 0.2, stratify = labeled_tweets['label'], random_state = 12348,)

#Инициализируем векторизер и укажем размер n-грамм
counter_idf = TfidfVectorizer(ngram_range=(1,1))

#Получаем словарь и idf только из тренировочного набора данных
count_train = counter_idf.fit_transform(train['text_clear'])

#Применяем обученный векторизер к тестовому набору данных
count_test = counter_idf.transform(test['text_clear'])

#Инициализируем модель с параметрами по умолчанию
model_lr = LogisticRegression(random_state = 12345, max_iter = 10000, n_jobs = -1)

#Подбираем веса для слов с помощью fit на тренировочном наборе данных
model_lr.fit(count_train, train['label'])

#Получаем прогноз модели на тестовом наборе данных
predict_count_proba = model_lr.predict_proba(count_test)
```

Рисунок 5 – Расчет векторного представления текстов.

Классифицируем собранные незамеченные комментарии: векторизуем их, а затем будем подавать эти числа в готовую модель для получения вероятности негативности комментариев (Рисунок 6).

```
tox = []
for i in range(len(comments)):

    source = comments_df.iloc[i:i+1,0:2]
    text_clear = source['text_clear'].values[0]
    text = source['comment'].values[0]

    tf_idf_text = counter_idf.transform([text_clear])

    toxic_proba = model_lr.predict_proba(tf_idf_text)

    tox.append(toxic_proba[:,0])
```

Рисунок 6 – Определение вероятности негативности комментариев.

```
#Убираем ограничение для вывода полной таблицы
pd.set_option('display.max_rows', None)
pd.set_option('display.max_columns', None)
pd.set_option('display.max_colwidth', None)

#Создаем таблицу
finallytable = pd.DataFrame({'Имя пользователя':slovnicknames.keys(), 'Количество комментариев':slovnicknames.values(), 'Количество положительных комментариев':slovnicknames.values(), 'Количество негативных комментариев':slovnicknames.values(), 'Количество нейтральных комментариев':slovnicknames.values()})
#Сортируем её по количеству комментариев, оставленных пользователями
finallytable.sort_values(by='Количество комментариев', ascending=False)
```

	Имя пользователя	Количество комментариев	Количество положительных комментариев	Количество негативных комментариев	Количество нейтральных комментариев
20	hhlg	43	30	5	8
2	Барн	30	25	3	2
5	e1ther - e1ther	29	23	4	2
35	ИванниИванов	27	18	3	6
22	Фанат Ференцвароша	18	15	2	1
24	CLB_B2	13	11	1	1
51	Суворов Антон	13	10	2	1
56	Юрий Богданов	10	10	0	0
19	Бена_Финитас	9	6	3	0
52	СЮ-МО И ТАМПА-ЧЕМПИОН	7	4	2	1

Рисунок 7 – Таблица, отражающая классификацию комментариев.

После этого произведем подсчет негативных комментариев для каждого отдельного пользователя, и представим результат табличной форме, сортируя по количеству оставленных пользователем комментариев (Рисунок 7), а на рисунке 8 отобразим распределение комментариев по оценке негативности.

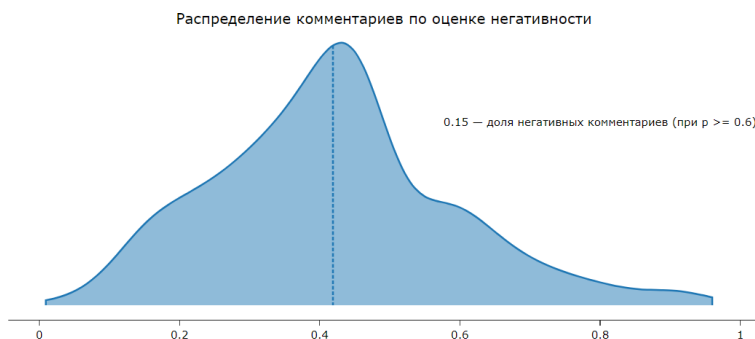


Рисунок 8 – Распределение комментариев по оценке негативности.

Таким образом, удалось создать программный код, способный после парсинга и обработки классифицировать комментарии на основе их тональности.

Библиографический список

1. Сравнительный анализ тональности комментариев в YouTube (осторожно, ненормативная лексика) [Электронный ресурс] – URL: <https://habr.com/ru/post/599445/>
2. Портал Sports.ru [Электронный ресурс] – URL: <https://www.sports.ru/>
3. Набор данных постов в Twitter [Электронный ресурс] – URL: <https://study.mokoron.com/>

СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

УДК 377.1

Цифровизация профессионального образования на примере платформы Stepik

Д.А. Андреева

*Южно-Уральский государственный гуманитарно-
педагогический университет, г. Челябинск*

Статья посвящена вопросу компьютеризации и технологизации образования на различных его ступенях. Рассмотрены причины цифровизации профессионального образования. Приведен пример интегрирования российской онлайн-платформы Stepik в образовательный процесс.

Ключевые слова: *цифровизация образования, профессиональное образование, цифровые образовательные ресурсы, Stepic.*

Современный мир развивается и преобразовывается очень быстрыми темпами. Научно-технический прогресс ежедневно бросает новые вызовы различным сферам нашей жизни, подталкивая их к адаптации и цифровизации. Образование, как наиболее фундаментальный социальный институт, представляющий собой совокупность учреждений и организаций, выполняющих функцию просвещения и воспитания, также неизбежно сталкивается с этим процессом. Так компьютеризация и технологизация являются основными тенденциями и направлениям развития современного образования.

Большое количество исследований современных методистов и педагогов посвящено вопросу цифровизации начального, основного и среднего уровней образования [3]. Это не удивительно: современных школьников едва ли можно представить без гаджетов в руках. Согласно текущим федеральным государственным образовательным стандартам, обучение информатике в школе начинается со 2-го (а по углубленной программе – даже с 1-го) класса. Таким образом, государство пытается урегулировать работу школьников с персональными компьютерами, смартфонами и другими цифровыми

устройствами; сделать это взаимодействие ребенка и цифрового устройства более осознанным, продуктивным и здоровым.

Тем не менее, подобное раннее знакомство учеников с техникой приводит к их пресыщению от определенных программ и функций. Так обучающихся школ 21-го века уже не заинтересуешь интерактивными презентациями в Power Point или видео-уроками с YouTube, Rutube и иных видео-хостингов. Дети и подростки ожидают от уроков яркости, динамичности и ощущения полного погружения в тот материал, который им преподносит педагог. Кроме того, важно помнить и о большом количестве учебного материала, который должен быть изложен в рамках одного академического часа. Так педагоги по всей стране и за рубежом сталкиваются с проблемой эффективного, результативного и «свежего» использования цифровых образовательных ресурсов (далее – ЦОР), программ и платформ.

Удивительно, но с подобной проблемой сталкиваются педагогические работники не только начального, основного и среднего образовательного звена. В последние годы о необходимости постижения цифровых трансформаций в образовании говорят и преподаватели высших учебных заведений (далее – ВУЗ). Это объясняется рядом причин. Во-первых, сегодняшние студенты – это вчерашние школьники, сохранившие мировоззрение и привычки, заложенные в школьные годы. Студенты, также во многом зависимые от гаджетов, зачастую не желают вести конспекты, участвовать в семинарах и выполнять лабораторные работы по традиционной схеме – с использованием одних лишь тетрадей, учебников и специальным оборудованием. Во-вторых, сегодняшние студенты – это завтрашние молодые рабочие кадры. От такого, какие навыки будут развиты у абитуриентов и магистрантов ВУЗов, зависит качество и результативность их работы в различных сферах и отраслях профессий. Особенно актуален этот вопрос для студентов педагогических ВУЗов – будущих учителей основного и дополнительного образования, которые придут в школы в годы еще большего технического развития и будут взращивать новое поколение.

В последние годы педагоги различных уровней образования озабочены поиском качественных, бесплатных и функциональных онлайн-платформ отечественного производства. Одним из наиболее распространенных и проверенных временем ЦОРов является Stepik — российская образовательная платформа и конструктор бесплатных и платных открытых онлайн-курсов и уроков.

Особенно активное пользование платформой пришлось на 2019-2020 годы, когда мир захватила пандемия. В России известен ряд

случаев, когда студенты коммерческой формы обучения, оказавшиеся на карантине, резко высказывались об ухудшении уровня обучения и неудобстве его реализации. Тогда преподаватели и начали внедрять в свои дистанционные занятия различные ЦОРы. Stepik привлек педагогов российских ВУЗов приятным интерфейсом, несложной регистрацией, большим количеством готовых курсов и возможностью с легкостью создавать собственные курсы даже при низком уровне владения цифровыми компетенциями (страница редактора курса представлена на рисунке 1). Кроме того, платформа порадовала функционалом, который позволил максимально приблизить дистанционный формат обучения к очному. Это и формат комбинирования теоретического материала с практическими заданиями, необходимыми для отработки знаний, и возможность проверки «неудачных» попыток решения заданий, и установка «дедлайна» для выполнения тестов, контрольных работ и так далее [2].

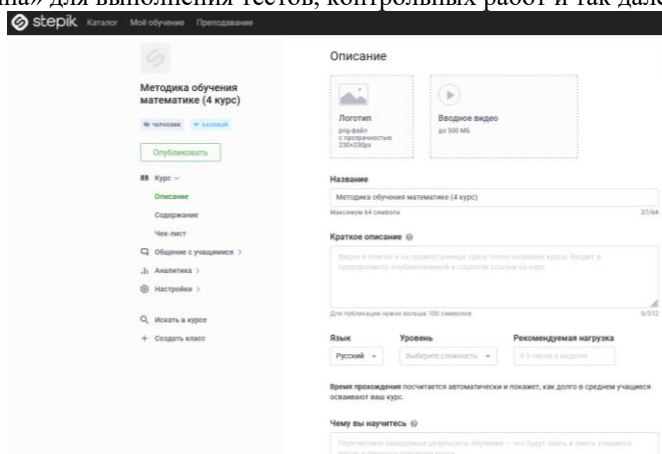


Рисунок 1 – Пример создания курса на платформе Stepik

Стоит отметить, что благодаря Stepik у студентов всех регионов России появилась возможность пройти некоторые онлайн-курсы, организованные такими авторитетными высшими учебными заведениями России, как СПбАУ, МФТИ, СПбПУ и др.

Исследования, проведенные среди студентов высших учебных заведений, подтверждают положительное влияние интеграции платформы Stepik в процесс обучения на успеваемость студентов, их более активное вовлечение в учебный процесс и понимание материала

[1]. Именно поэтому платформа продолжает свое активное внедрение в процесс обучения и после окончания пандемии.

Таким образом, в современном мире процесс цифровизации обучения неизбежно охватывает все ступени образования – от начального до профессионального. Различные онлайн-сервисы и платформы позволяют пользователю с любым уровнем цифровых компетенций без определенных усилий создавать информативные и интерактивные курсы, которые позволят не только провести занятие в дистанционном формате, но и сделать очное занятие в ВУЗе более увлекательным для студентов и, что самое важное, современным, отвечающим текущим запросам и научно-технического уровня развития государства.

Библиографический список

1. Абдрафикова А.Р., Абдуллин А.И. Эффективность внедрения и использования Интернет-ресурсов на основе информационно-коммуникационных технологий (на примере Интернет-ресурсов Duolingo, LinguaLeo, Eliademy и Stepic) // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 06 (60). – С. 112–114.

2. Замулин И.С. Основные исторические этапы и аспекты становления современного дистанционного образования и некоторые платформы его реализации // Вестник Хакасского государственного университета им. Н. Ф. Катанова. – 2019. – № 1. – С. 109–113.

3. Садыков Т.М. История развития интерактивных технологий // Проблемы современного образования. – 2016. – № 4. – С. 158–161.

Генераторы задач и их использование для контроля знаний по высшей математике

Н.В. Баянова¹, В.В. Лодейщикова²

¹Алтайский государственный университет, г. Барнаул;

*²Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

В статье анализируется роль генераторов задач в работе преподавателя ВУЗа. Описывается опыт применения генераторов задач при изучении курса высшей математики.

Ключевые слова: *генератор задач, электронные образовательные ресурсы, высшая математика.*

Генератором задачи, как правило, называется программа, которая создает условие задачи. В работе [1] указаны четыре типа генераторов по технологии создания: программируемые, параметрические, предметно-ориентированные и выбирающие.

Программируемые генераторы требуют написания программы. Параметрические генераторы полноценной программы не требуют, в них задается текст условия задачи и в него вставляются параметры, которые в дальнейшем заменяются на конкретные числа при получении окончательных условий. Здесь важным является возможность указания диапазона различных значений параметров и ограничения на них. Это необходимо для того, чтобы задача имела смысл и одинаковую сложность для всех формируемых вариантов.

Предметно-ориентированные генераторы могут быть созданы без программирования. В данном случае получается узкий класс задач. Например, можно найти в сети Интернет достаточно много генераторов задач по математике для средней школы. Выбирающие генераторы - генераторы, которые не создают условие сами, а выбирают одно из заранее предложенных условий, введенных вручную. В этом случае различные условия могут быть предложены несколькими пользователями.

Использование генераторов для контроля знаний по высшей математике позволяет создать для каждого студента индивидуальный набор задач и уменьшить возможность списывания во время текущего контроля знаний и промежуточной аттестации. Опыт использования

генераторов задач для контроля знаний по высшей математике у студентов младших курсов описан в работе [2].

В некоторых случаях, электронные образовательные ресурсы позволяют преподавателям, не знакомым с программированием, создавать задачи с уникальным условием для каждого студента. В качестве примера можно привести LMS ILIAS. Для генерации заданий можно при формировании теста использовать тип вопроса – вычисляемый вопрос. Данная LMS позволяет не только добавить параметры, ввести ограничения на параметры, но и автоматически проверить полученный результат.

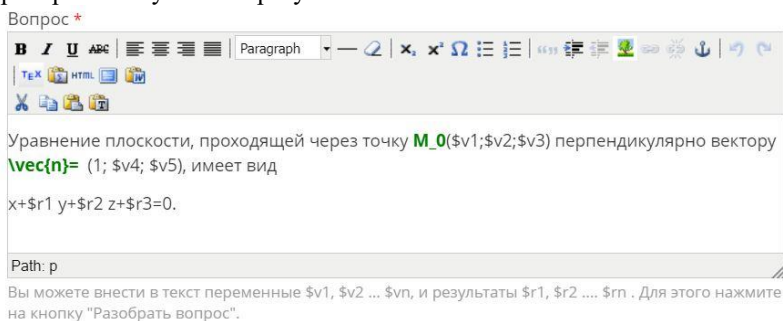


Рисунок 1 – Создание вычисляемого вопроса с несколькими параметрами

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; 5; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; 4; 2)$, имеет вид

$x +$ $y +$ $z +$ $= 0.$

Рисунок 2 – Пример вычисляемого вопроса

Таким образом, использование генераторов задач для контроля знаний по высшей математике позволяет разработать для студентов индивидуальные задания и значительно сэкономить время преподавателя на создание типовых задач.

Библиографический список

1. Посов И.А. Обзор генераторов и методов генерации учебных заданий // Образовательные технологии и общество. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 593-609.
2. Финогенов А.А. Использование генератора задач для контроля знаний по высшей математике у студентов младших курсов // Вестник Югорского государственного университета. – 2016. – № 2(41). – С. 65-67.

Применение электронного курса «ТВиМС» на базе LMS Moodle на больших потоках студентов.

Н.Ф. Кобелева

*Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ),
г.Новосибирск*

Статья посвящена применению предметного электронного курса «ТВиМС», созданного на базе LMS Moodle, в преподавании дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика» студентам второго курса некоторых направлений подготовки в СибГУТИ, объединённых в большой лекционный поток.

Ключевые слова: *электронные курсы, LMS Moodle, математика, методика преподавания, цифровые технологии.*

Предмет «теория вероятностей и математическая статистика» («ТВиМС») входит в блок математических дисциплин, преподаваемых на разных направлениях подготовки очного отделения СибГУТИ. Количество контактных часов, наличие расчётно-графической работы (РГР), форма итогового контроля зависят от направления подготовки. Тенденцией последних лет в СибГУТИ стало укрупнение лекционных потоков, объединяющих студентов разных направлений подготовки. Лекционный поток по дисциплине «ТВиМС», содержащей 34 часа лекций, 34 часа практических занятий, без РГР, с формой итогового контроля – экзамен, на втором курсе Института Телекоммуникаций СибГУТИ в 1 семестре 2022/23 учебного года объединял 11 групп нескольких направлений подготовки и состоял из более чем 200 студентов. Преподавание «ТВиМС» на рассматриваемом потоке велось в смешанном формате [1, с. 118], лекции проходили дистанционно на платформе Discord, а практические занятия очно. Вследствие отсутствия РГР и неуклонно повышающейся доли часов самостоятельной работы студентов (СРС) в их учебной нагрузке, перед лектором встаёт задача стимулирования СРС и создания непрерывной траектории обучения студентов. Ясно, что на большом потоке, как в очном, так и в дистанционном формате проведения лекций, это непростая задача. Практические занятия в 11 группах ведут разные преподаватели (в рассматриваемом семестре три), что так же не

облегчает поставленную задачу. Получается, что при чтении лекций дистанционно и консультации для потока 1 час в неделю, студентов некоторых групп лектор увидит только на экзамене. Хорошим решением является поддержка дисциплины предметным электронным курсом «ТВиМС», что подтверждается опытом последних трёх лет.

Структура электронного курса «ТВиМС», созданного на платформе СДО MOODLE, подробно рассмотрена в статье [2, с. 248]. Рассмотрим некоторые инструменты, при помощи которых решаются поставленные задачи, обеспечивая возможность каждому студенту большого потока (при его желании, конечно), выстраивать непрерывную траекторию освоения и закрепления материала изучаемой дисциплины.

Чтобы стимулировать желание студентов изучать предмет в течение всего семестра, а не накануне экзамена, применяется балльно-рейтинговая система (БРС), базирующаяся на работе в предметном электронном курсе «ТВиМС». Этому посвящена статья [3, с. 66-68]. Создание в электронном курсе еженедельных заданий помогает студентам в организации их самостоятельной работы [3, с. 67]. Подобная организация СРС, с одной стороны, осуществляет гуманистический подход, оставляя выбор за студентом. А с другой стороны, способствует формированию у студентов навыков самоорганизации и других универсальных компетенций. Учитывая особенности современных студентов [3, с. 65], относящихся к поколению Z, интерактивные элементы (тесты, интерактивные лекции), включенные в еженедельные задания, не перегружены. Но, эта кажущаяся простота продумана и способствует поэтапному освоению материала дисциплины [3, с. 67-68]. При решении задач по «ТВиМС» важно правильно понять условие задачи, реконструировать «опыт», событие, вероятность, которого нужно найти, применимость тех или иных формул. К сожалению, современное поколение студентов, использующее короткие сообщения для коммуникаций, часто неверно реконструируют «опыт», не обращают внимания на тонкости условия задачи. Поэтому условия вопросов (задач) в тестах электронного курса составлены так, чтобы студент научился видеть эти тонкости. Не ограничивая количество попыток в тестах еженедельных заданий для СРС, и установив среднюю оценку, лектор тем самым стимулирует студентов быть внимательнее при решении задач и в случае необходимости переделать тест для повышения оценки.

Современному студенту поколения Z трудно 1,5 часа внимательно слушать и конспектировать достаточно сложный материал лекций.

Некоторые студенты, вообще придерживаются мнения, что это делать не нужно, так как есть интернет. При этом, для того, чтобы сформулировать правильно запрос поиска, должно быть понимание того, что искать. С этим у студентов регулярно возникают проблемы. Решением является размещение необходимого материала в электронном курсе в разных форматах. В предметном курсе «ТВиМС» есть раздел, где размещены гиперссылки на записи прочитанных ранее лекций, что даёт возможность желающим студентам прослушать их в удобное им время. Интерактивные лекции, включенные в еженедельные задания, содержат теоретический материал и краткие вопросы по нему. Прохождение интерактивной лекции (учитывающееся в БРС) способствует закреплению материала, прочитанного ранее на лекции. В курсе размещены все необходимые формулы с комментариями в формате «страница». Так же есть глоссарий и таблицы, необходимые для решения задач. Как показывает анализ статистики, встроенной в LMS Moodle, все эти элементы курса востребованы студентами.

Пропуски занятий студентами очного обучения, к сожалению, нередкое явление. БРС, поддерживаемая электронным курсом, существенно повышает процент посещаемости занятий [3, с. 66-67]. Содержание электронного курса «ТВиМС» обеспечивает возможность студентам, пропустившим занятие, быть в курсе изучаемого материала и участвовать в наборе баллов по БРС. Средства LMS Moodle дают лектору возможность в течение семестра проводить анализ активности студентов всего потока в электронном курсе. При помощи обмена сообщениями и объявлений форума курса лектор находится на связи с обучаемыми.

Как видно из изложенного выше, предметный электронный курс «ТВиМС» является эффективным инструментом при работе с большими лекционными потоками студентов. Курс систематизирует СРС, организует поэтапное освоение материала дисциплины в соответствии с рабочей программой, способствует поддержанию непрерывной траектории обучения студентов. Конечно, создание и сопровождение электронного курса требует времени, анализа эффективности тех или иных его элементов, работы над базой вопросов и т.д. Результатом же является вовлечённость студентов в учебный процесс и возможность аттестовать студентов по БРС (уже третий год это примерно 85% студентов). Опыт применения электронных курсов на кафедре высшей математики СибГУТИ описан в статьях преподавателей кафедры, например [4,5,6].

Библиографический список

1. И. В. Носова Смешанное обучение в условиях цифровизации общества// «Актуальные вопросы совершенствования среднего профессионального и высшего образования в современных условиях». Материалы 63-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2022– С. 117-122.

2. Кобелева Н.Ф. Об опыте реализации программы обучения по дисциплине «теория вероятностей и математическая статистика» с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. // Возможности и перспективы цифровой экономики в науке и образовании. Материалы 62-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2021 – С. 245–250.

3. Кобелева Н.Ф. Некоторые подходы к организации учебного процесса и итогового контроля с использованием предметного электронного курса в рамках преподавания дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика». // «Актуальные вопросы совершенствования среднего профессионального и высшего образования в современных условиях». Материалы 63-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2022, – С. 64-69.

4. Храмова Т.В., Кобелева Н.Ф. Об опыте внедрения элементов e-learning в процесс преподавания дисциплин математического блока // Качество высшего и среднего профессионального образования в рамках требований профессионального сообщества. Материалы 61-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2020 – С. 230–234.

5. Трофимов В.К., Храмова Т.В. Методические и технические тонкости организации занятий и проведения итоговой аттестации для дисциплин математического спектра. // Возможности и перспективы цифровой экономики в науке и образовании. Материалы 62-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2021, – С. 324–329.

6. Захарова Т.Э. Интерактивные лекции LMS Moodle как элемент курса в электронной образовательной среде // «Актуальные вопросы совершенствования среднего профессионального и высшего образования в современных условиях». Материалы 63-ой

межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2022, – С. 51-57.

Цифровые инструменты и сервисы в математическом образовании

Г.В. Кравченко
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена обзору цифровых инструментов и сервисов для разработки образовательного контента и применения в профессиональной деятельности преподавателя математических дисциплин.

Ключевые слова: *цифровые инструменты, цифровые сервисы, математическое образование, digital-инструменты, информационные технологии.*

В связи с развитием цифровизации в образовании современные студенты и школьники все больше отдают предпочтение обучению с применением цифровых инструментов, благодаря которым у них появляется возможность использования современных способов получения информации, направленных на решение образовательных задач, развитие творческого потенциала и навыков активного взаимодействия. Преподаватели активно внедряют в практику разнообразные формы и методы организации образовательного процесса с использованием интерактивных игр, мобильных приложений.

Рассмотрим возможности применения некоторых цифровых сервисов при обучении математике [1-3]:

Графические программы: Advanced Grapher позволяет исследовать и строить графики функций, решать уравнения и неравенства графическим способом, и GeoGebra соединяет в себе интерактивную геометрию, алгебру, таблицы, графики, статистику и вычисления, облегчает создание математических построений и моделей.

Инструменты визуализации: Figma.com, Crello.com, Easel.ly, Infogr.am, Piktochart.com и др. можно использовать для создания инфографики, при организации одновременной коллективной работы (мозговой штурм, создание общего контента, работа над проектами и т.д.).

Виртуальные и онлайн доски для коллективной работы: Padlet.com, Trello.com, Ru.yougile, Twiddla.com, Dream-board.ru, Miro.com, Jamboard.google.com, Whiteboard.com, Idroo.com и др. можно

применять как для решения самых разных облачных задач: от сбора домашних заданий, до конференций, виртуальных выставок, конкурсов, реализации и защиты проектов.

Сервисы для создания карт памяти (интеллект-карт, ментальных карт): Coggle.it, MindMeister.com, Mind42.com, Mindomo.com, Bubble.us, Popplet.com, Cacoo.com, FreeMind помогают создавать карты, структурировать отчетность и работу команды, которая становится более понятной и четко организованной.

Инструменты для создания интерактивных игр, опросов, викторин, блиц-тестирований: MyQuiz (<https://myquiz.ru/>), Plickers (<https://plickers.com/>), Яндекс Формы и т.п. хорошо зарекомендовали себя на этапе актуализации опорных знаний на уроке математики, при проверке домашнего задания или фронтального опроса учащихся.

Возможность проведения викторин или опросов с мгновенными результатами помогает педагогу выявить пробелы в усвоении материала и причины затруднения, провести оценивание, дать обучающимся быструю обратную связь, осуществить формирующий контроль, проанализировать типичные ошибки, построить план выхода из затруднения, провести рефлексию. Интерактивная подача и проверка материала помогает управлять вниманием даже самой большой аудитории школьников. Немаловажным дидактическим свойством MyQuiz и Plickers, на наш взгляд, является объективность получаемых результатов, поскольку временное ограничение на выполнение каждого задания исключает возможность списывания.

Инструменты для создания интерактивных дидактических материалов: LearningApps (<https://learningapps.org>), Onlinetestpad (<https://onlinetestpad.com/ru>), Quizlet (<https://quizlet.com/latest>) и др., как правило, применяются на этапах закрепления нового знания и самостоятельной работы учащихся с самопроверкой по эталону.

Сервис LearningApps предоставляет возможность создавать на основе шаблонов интерактивные учебно-методические приложения: тренажеры и дидактические материалы (кроссворды, паззлы, тестовые задания, викторины, таблицы, дидактические игры, классификации, видео-файлы), которые позволяют наиболее полно реализовать принцип наглядности на уроках математики.

Специальные инструменты и обучающие игры, представленные на ресурсе Quizlet, применяются на уроках математики и в процессе самостоятельной работы для заучивания новых математических терминов и формул. Преподаватель составляет учебные модули, базисным компонентом которых, являются набор флеш-карточек с терминами и формулами по изучаемой теме или разделу, и

предоставляет учащимся доступ к ним. Из доступных на сервисе учебных режимов для изучения математических терминов и формул наиболее эффективными являются режим заучивания, режим карточек и тестовый режим. Проверить свои знания учащиеся могут в игровой форме. В игре «на подбор» необходимо как можно быстрее подбирать правильные термины к определениям, а в игре «на гравитацию» нужно как можно быстрее вводить термины с клавиатуры.

Образовательная платформа Learnis направлена на развитие цифрового обучения в школах России и доступна педагогам любой предметной области с возможностью применения в урочной и внеурочной деятельности. Тесты, опросы, викторины, веб-квесты и игры в обучении – основа проекта Learnis, который динамично развивается и объединяет в себе лучшие практики зарубежных и отечественных цифровых образовательных ресурсов. Отечественная платформа для создания интерактивных заданий позволяет создавать несколько видов интерактивных ресурсов: веб-квест «выберись из комнаты»; интеллектуальная игра «твоя викторина»; терминологическая игра «объясни мне»; веб-сервис «интерактивное видео».

Инструменты геймификации (игрофикации): WordWall, Rebus1, Biteable.com, tinytap.com, Scrumblr, Mentimetr, eTreniki, Jigsawplanet, H5P, Kody, Flippity, Flipgrid, Pixton, Classcraft, Exam games, Habitica и др. реализуют принцип геймификации управления обучением. Например, онлайн-сервис Habitica предназначен для помощи в организации личного времени учащегося, выработке полезных привычек и в игровой форме позволяет контролировать выполнение повседневных краткосрочных и долгосрочных задач, получать награду за их выполнение. Платформа выполнена в виде ролевой игры.

Мобильные среды для создания целостного урока математики и управления интерактивными презентациями Nearpod хорошо зарекомендовали себя на этапе усвоения новых знаний и способов действия на уроках математики.

Сервис Nearpod (<https://nearpod.com/>) позволяет включать в презентацию слайды, графику, видео, различные задания (открытые вопросы, задания на соотнесение элементов и т.д.), интерактивные доски, на которых отражаются результаты работы всех обучающихся, а затем делиться контентом с учениками во время урока и управлять презентацией. Важной особенностью приложения является возможность разработки интерактивных заданий, информация о выполнении которых учащимися моментально поступает на экран учителя. Также, сервис предоставляет инструменты для групповой

работы в классе, когда обучающиеся, выполнив задание учителя, отправляют ему стикер с ответом или решением, после чего все стикеры отображаются на общем интерактивном плакате и появляется возможность совместного обсуждения присланных решений.

В настоящее время в образовательной сфере набирает популярность, так называемая *технология дополненной и виртуальной реальности*. Дополненная реальность (Augmented Reality – AR-технологии) – это объединение объектов реального и виртуального мира, где дополнительные данные «... внедрены в поле восприятия. Усиление воздействия среды происходит через визуальные, слуховые, осязательные, соматосенсорные и обонятельные рецепторы»; технология виртуальной реальности (Virtual Reality – VR-технологии) «...воссоздает искусственный мир, воспроизводя свойства и поведение объектов реального мира. При этом пользователь может не только созерцать, но и контактировать с объектами виртуальной реальности. В качестве устройств воспроизведения используются шлемы или очки дополненной реальности» [4].

На сегодняшний день существующая база различных AR и VR-библиотек для мобильных систем и программ для трехмерного моделирования позволяет использовать представленные технологии в образовательной среде. Например, приложение для юных математиков – Pocket Tutor, с помощью которого можно организовать проверку решения простых примеров. Приложение для изучения математики – Maths Teach-AR, которое можно применять для учащихся среднего и старшего возраста (12+). В результате работы программа запускает на проверочных бланках анимацию и визуальные эффекты с расчетами.

Рассмотренные ресурсы – это малая часть существующих на сегодняшний день цифровых образовательных инструментов, которые могут успешно применяться в процессе обучения математике в школе. Некоторые из них можно применять при обучении студентов колледжей и вузов математическим дисциплинам.

Инструменты в цифровой системе образования помогают не только в освоении учебной дисциплины, но и в выстраивании сетевого продуктивного взаимодействия, что в свою очередь способствует формированию навыков межличностной коммуникации и делового общения, осознанному использованию цифровых инструментов, готовности обучающихся к цифровой трансформации.

Библиографический список

1. Позднякова Н.В., Колесникова О.И. Дидактический потенциал мобильных технологий в обучении школьников математике на ступени основного общего образования // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус. – 2019. – №3 (41). – С. 19-26.

2. Золова В.О. Обзор цифровых инструментов, применяемых в образовательной деятельности педагога (из опыта работы учителя общеобразовательной школы) // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». – 2022. – № 1 (13) / апрель. – С. 71-82. – URL: <https://koirojournal.ru/realises/g2022/01april2022/kvo109/> (дата обращения: 20.05.2023).

3. Карпович М.В., Плотникова Е.Г., Скорнякова А.Ю., Черемных Е.Л. Цифровые сервисы в деятельности современного учителя математики: из опыта работы университетского школьного кластера НИУ ВШЭ – Пермь // Современные проблемы науки и образования. – 2023. – № 2. – URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=32486> (дата обращения: 20.05.2023).

4. Катханова Ю.Ф., Бестыбаева К.И. Технология дополненной реальности в образовании // Педагогическое мастерство и педагогические технологии: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 17 июля 2016 г.) / редкол.: О.Н. Широков – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – С. 289-291.

Аналитика больших данных и методы машинного обучения, возможности их использования в образовании.

*Д.В. Крюкова, Я.Д. Комарова, А.Г. Тимофеев
Российский экономический университет им. Г.В.
Плеханова, РФ, г. Москва*

В данной статье рассмотрено внедрение больших данных в образовательную систему. Система образования продолжает создавать и собирать большое количество данных, и на сегодняшний день вопрос работы в системе с этими данными можно назвать одним из самых важных. Большие данные могут быть мощным инструментом для преобразования обучения, переосмысления способов, преодоления давних пробелов и накопления опыта для повышения эффективности самого процесса обучения.

Ключевые слова: образование, аналитика, машинное обучение, *Machine Learning*, большие данные, *Big Data*, обучение, анализ.

Большие данные — это массивы данных достаточно большого объёма, которые практически невозможно обработать или проанализировать при помощи традиционных методов, подразумевающих использование человеческого труда и настольных компьютеров.

«Большие данные характеризуются объемом данных, хранение и обработку которого не позволяют выполнить традиционные методы и средства. Для больших данных присущ быстрый рост объема генерируемой информации, при этом равная ценность всех данных для решения задачи» [1, с.346]. Соответственно, для эффективной обработки такого рода массивов требуются вполне экономичные и инновационные методы обработки информации.

В настоящее время во многих отраслях внедряют машинное обучение для автоматизации многих процессов. При работе с большими данными машинное обучение позволяет оптимизировать процессы работы в различных отраслях: программы анализируют всю информацию, отбирая только самые необходимые, при этом не привлекая человека. Обучение и управление искусственным

интеллектом упрощают выполнение многих задач, освобождая время для человека.

На сегодняшний день большие данные, как и многие другие новшества, находят применение в различных сферах деятельности, а их востребованность аргументируется глобальными изменениями в современном обществе, которому характерно равенство реальности и цифровой среды.

«Образование не является сферой, в которую большие данные вошли давно и играют важную роль в анализе деятельности основных субъектов образовательного процесса. Это объясняется рядом причин. В начале 2000-х большие данные начали применять в более технократичных и отцифрованных сферах: в сфере производства, управлении государством, здравоохранении» [2, с.261].

В сфере образования для анализа больших данных выделяются пять основных типов (рисунок 1):

1. персональные данные;
2. данные о взаимодействии студентов с электронными системами обучения и друг с другом;
3. данные об эффективности учебных материалов;
4. административные данные;
5. прогнозные данные.

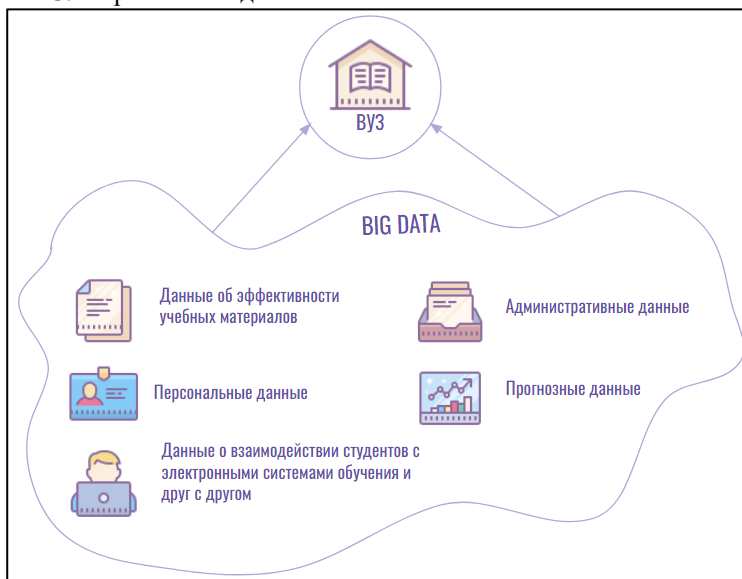


Рисунок 1 – Основные типы данных в сфере образования

Преподаватели активно применяют различные подходы к организации образовательного процесса, а аналитика больших данных и методы машинного обучения помогают увеличить вовлеченность учеников и улучшить качество образования. Примером могут послужить платформы онлайн-образования, которые используются практически во всех ВУЗах. Известно, что данные платформы являются удобной связью между преподавателем и студентом. Но помимо этого в некоторые платформы онлайн-обучения добавлены элементы конкуренции, как с собой, так и с другими студентами, что позволяет выявить свои сильные и слабые стороны. Такое добавление значительно повышает эффективность подобных платформ. Существует и такие рекомендательные системы, где на основе анализа интересов и знаний студента система больших данных с помощью алгоритмов машинного обучения может подобрать максимально подходящие для него курсы.

Большие данные открывают новые возможности высшему образованию многих зарубежных стран, но также не обходят стороной и Российские ВУЗы.

Во-первых, это возможность проектирования актуальных для рынка труда образовательных программ. Анализ больших данных необходим в сборе информации о навыках, необходимых для определенной профессии, чтобы обеспечить новое поколение необходимыми знаниями этой сферы. После сбора и анализа данных становится понятнее, какими знаниями и умениями должен обладать будущий специалист, что значительно упрощает составление образовательной программы.

Во-вторых, это возможность набирать мотивированных первокурсников. Цифровые портфолио, системы анализа успеваемости школьников - все это безусловно помогает составить "справку" об абитуриенте, где видны его сильные и слабые стороны, его потенциал.

В-третьих, это возможность оценивать успехи студентов, отслеживать посещения. ВУЗы вводят системы анализа данных об образовательных процессах, которые отслеживают посещения, успеваемость, результаты экзаменов и многое другое. Данный мониторинг значительно снижает процент отчисленных студентов.

«Исторически система образования накопила значительный объем данных. Вопрос о том, как доступно начать обрабатывать большой объем данных, снимется благодаря появлению и расширенному использованию информационно-коммуникационных технологий» [3, с.450].

BigData и Machine Learning открывают новые горизонты в современном образовании, с развитием этих технологий обучение становится интересней и эффективней.

Библиографический список

1. Использование Big Data в официальной статистике Using Big Data in official statistics : материалы II Всероссийской научно-практической конференции, г. Липецк, 29 апреля 2022 г. / под общей редакцией А.Е. Кисовой. – Липецк : Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2022. – 348 с.

2. Большие данные в образовании: доказательное развитие образования. Сборник научных статей II Международной конференции, 15 октября 2021 года, Москва / под общ. ред. О.А. Фиофановой. — Москва : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021. — 342 с.

3. Утёмов В. В., Горев П. М. Развитие образовательных систем на основе технологии Big Data // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № 6 (июнь). – С. 449–461.

Применение динамической программы GeoGebra при изучении школьного курса стереометрии

Л.А. Линевиц

МБОУ «Гимназия №123», г. Барнаул

В данной статье рассматривается применение динамической программы GeoGebra в курсе школьной программы.

Ключевые слова: *GeoGebra, стереометрия.*

Современные технологии обучения математике в школе во многом определяются программным обеспечением, которое используется в образовательном процессе. На данный момент существует много разнообразных динамических программ, способствующих оптимизации процесса обучения.

Программные продукты образовательного назначения позволяют не только выполнять вычисления, но также дают возможность создания динамических образов математических объектов, исследовать устойчивость и изменчивость их свойств [2]. Использование таких программ в процессе обучения математике ускоряет процесс усвоения учебного материала, за счет сокращения времени вычислений и возможности увидеть изучаемый объект с разных ракурсов. Однако программное обеспечение не всегда позволяет полностью автоматизировать процесс решения математической задачи. Большая часть решения задачи предполагает, что обучаемый, проанализировав условие и определив параметры, которые необходимо найти, должен построить математическую модель, исследовать и обосновать ее правильность. Но и даже с этой точки зрения визуализация модели (особенно, при решении задач по стереометрии), позволяет сделать ее более наглядной, что как следствие упрощает ее решение.

Программные продукты, реализующие для геометрических задач принципы наглядности и динамичности, называют системами динамической геометрии (СДГ). Их использование позволяет:

- обеспечить наглядность при изучении курса геометрии;
- визуализировать аналитически заданные функции, в том числе параметрические.

СДГ позволяют быстро и точно выполнить чертежи на плоскости и в трёхмерном пространстве, а также проводить исследования путём ручного или автоматического перемещения отдельных точек или изменения численных значений параметров. В сегменте СДГ существуют несколько десятков специализированных программных пакетов. Однако большинство из них не обладает высокой функциональностью и для многих из них уже несколько лет как прекращена дальнейшая разработка и поддержка. Это произошло главным образом вследствие широчайшего распространения пакета GeoGebra. [1]

GeoGebra дает возможность работать с разными объектами, например, таблицами, графами, алгебраическими уравнениями, геометрическими фигурами, арифметикой и статистическими данными. Программа позволяет формировать геометрические фигуры, указывать нужные параметры для этих фигур отмечать углы, строить сечения в уже готовых фигурах, измерить длину линий. Также можно воспользоваться функцией выноса рисунка, чтобы построить объекты независимо от основной фигуры. Также в данной программе имеются дополнительные функции, которые позволяют оперировать интегралами, корнями, графиками, прописывать формулы для функций и многое другое. Для удобства в использовании все они включены в один пакет. При случайном закрытии нужного проекта, можно возобновить работу с ним от последней точки и открыть скачанные файлы для внесения своих правок.

К достоинствам программы GeoGebra можно отнести:

- реализация интерфейса на разных языках, в том числе и на русском;
- простота и удобство графического интерфейса;
- наличие большого количества функций для работы с математическими уравнениями;
- разнообразие функционала для работы с графиками;
- поддерживается практически всеми ОС: Windows, OS X, Linux, Android и iOS.

Остановимся на применении программы GeoGebra при изучении стереометрии школьного курса математики. Анализируя условие задачи, ученик уже на данном этапе сталкивается с рядом затруднений, так как для правильного понимания условия задачи необходимо правильно изобразить пространственное тело. На следующем этапе большое значение имеет чертеж, который важно не только правильно построить, но и понять. Многим обучаемым сложно глядя на плоский рисунок представить пространственное тело и

выявить данные элементы по условию задачи. Конечно, можно воспользоваться макетами пространственных тел, однако их использование не позволяет строить сечения, проводить дополнительные прямые, плоскости и т.п. В данном случае использование программы GeoGebra позволяет визуализировать пересечение секущей плоскости с гранями многогранника при заданных условиях и автоматически выполняет построение образующегося при этом сечения. Полученный чертеж является динамическим, что позволяет более многогранно его рассмотреть.

Применение программы GeoGebra сейчас актуально еще и в связи с тем, что в школьной программе нет учебной дисциплины «Черчение», которая способствовала формированию и развитию пространственного мышления школьников.

Применение программы GeoGebra при изучении курса школьной математики позволяет:

- оптимизировать самостоятельную работу школьников;
- реализовать индивидуальный подход к обучению;
- развивать пространственное мышление;
- способствует развитию познавательной активности обучающихся [2].

Однако следует отметить, что программа все же имеет ограниченные возможности. Во-первых, если результат решения задачи не может быть выражен целым числом или конечной десятичной дробью, то компьютерное решение не позволит получить точное значение результата. Во-вторых, компьютерное решение задачи далеко не всегда согласуется и помогает обнаружить аналитическое решение. Также, что большинство проектов выкладывается на английском языке.

Библиографический список

1. Овсянникова Т.Л. Использование программы GeoGebra при обучении геометрии будущих учителей математики // Мир педагогики и психологии. – 2018. – № 11. – С. 92-99.
2. Кравченко Г.В., Чернышова Д.А. Возможности интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам // Сборник трудов всероссийской конференции по математике «МАК-2015», Барнаул: Изд-во АлтГУ. – 2015. – С.225-229.

Создание генератора задач на исследование принадлежности булевых функций классам Поста

В.В. Лодейщикова, Е.Э. Мироевская

*Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Статья посвящена созданию генератора задач на исследование принадлежности булевых функций классам Поста.

Ключевые слова: *генератор задач, булева функция, классы Поста, Python.*

Генератором задач обычно называется программа, которая создает условия задач. В работе [1] выделяются следующие типы генераторов: программируемые, параметрические, предметно-ориентированные и выбирающие. Создание программируемого генератора требует написание программы.

В учебных планах направлений «Прикладная информатика» и «Информационная безопасность» присутствуют дисциплины «Дискретная математика» и «Дискретная математика и теория чисел» соответственно. Среди решаемых в этих курсах задач присутствует задание исследования системы булевых функций на полноту. По критерию Поста для этого необходимо определить принадлежат ли функции системы классам Поста, к которым относятся классы булевых функций, сохраняющих 0 (T_0) и 1 (T_1), класс самодвойственных функций (S), класс линейных функций (L) и класс монотонных функций (M) (см., например, [2]).

При проведении текущего контроля знаний преподаватель сталкивается с необходимостью создания большого количества заданий, отличающихся только векторами значений булевых функций.

В данной работе создан алгоритм генерации заданий на определение принадлежности булевой функции классам T_0 , T_1 и S . В результате работы алгоритма случайным образом формируются векторы значений булевых функций и производится проверка принадлежности указанным классам. Программа написана на языке Python, достаточно наглядна и проста в использовании. Результаты работы программы записываются в текстовый файл.

Введите количество вариантов: 10

Введите количество переменных: 5

Сгенерировать варианты

Открыть файл

Наша программа реализуется для 3, 4 или 5 переменных!

Рисунок 1 – Введение параметров

```

Номер варианта 1
00101010001100101100000101001011
сохраняет 0, сохраняет 1
f[0, 0, 0, 0, 0] != f[1, 1, 1, 1, 1]
f[0, 0, 0, 0, 1] != f[1, 1, 1, 1, 0]
f[0, 0, 0, 1, 0] != f[1, 1, 1, 0, 1]
f[0, 0, 0, 1, 1] != f[1, 1, 1, 0, 0]
f[0, 0, 1, 0, 0] != f[1, 1, 0, 1, 1]
f[0, 1, 0, 0, 0] != f[1, 0, 1, 1, 1]
f[0, 1, 0, 1, 0] != f[1, 0, 1, 0, 1]
f[0, 1, 0, 1, 1] != f[1, 0, 1, 0, 0]
f[0, 1, 1, 1, 1] != f[1, 0, 0, 0, 0]
не самодвойственна

```

Рисунок 2 – Результат работы генератора

Преимуществами данной разработки являются наглядность результатов генерации заданий и экономия времени преподавателя для создания типовых задач по данной теме. Недостатком является ограниченность числа неизвестных. Программная реализация создания генератора задач на исследование принадлежности булевых функций классам Поста способствует внедрению информационных технологий в обучение дискретной математике.

Библиографический список

1. Посов, И. А. Обзор генераторов и методов генерации учебных заданий // Образовательные технологии и общество. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 593-609.
2. Овчинникова Е.В., Судоплатов С.В. Дискретная математика : Учебник и практикум. – 5-е издание, исправленное и дополненное. – Москва : Общество с ограниченной ответственностью "Издательство ЮРАЙТ", 2020. – 279 с.

**О геометрических интерпретациях в решении
олимпиадных математических задач**

Е.А. Плотникова¹, Е.В. Саженкова², Т.В. Саженкова³

¹Новосибирский государственный университет,

*²Новосибирский государственный университет экономики
и управления, г. Новосибирск; ³Алтайский
государственный университет, г. Барнаул*

В работе рассматриваются задачи олимпиадной тематики, которые наиболее успешно решаются методами конечных геометрий. При подготовке учащихся и студентов к участию в математических соревнованиях полезно уделить определённое внимание задачам такого плана.

Ключевые слова: *конечная проективная плоскость, точки, прямые, аксиомы, конечная аффинная плоскость.*

На математических соревнованиях старшеклассников и студентов младших курсов решаются разноплановые задачи высокого уровня сложности, которые требуют от их участников достаточно широкого математического кругозора. Остановимся здесь на некоторых вопросах и подходах, демонстрирующих успешное применение методов конечных геометрий в решении олимпиадных математических задач. [1-4]

Вводная задача. Автобусная сеть города устроена следующим образом: 1) с любой остановки на любую можно проехать без пересадки, 2) для любой пары маршрутов найдётся и при том единственная остановка, на которой можно пересест с одного из этих маршрутов на другой, 3) на каждом маршруте ровно три остановки. Сколько автобусных маршрутов в городе?

Ответ: 7.

Рассмотрим два любых маршрута k и l . Для них (по условию 2) существует единственная остановка A , на которой можно пересест с одного из этих маршрутов на другой.

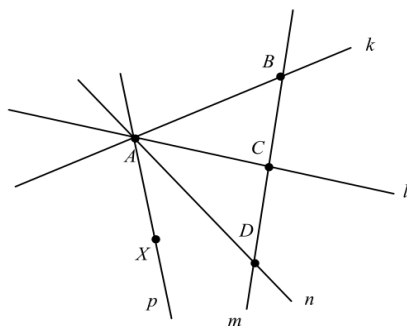


Рисунок 1. – Автобусная сеть

Выберем остановки B на k и C на l , отличные от остановки A . Это возможно выполнить по условию 3), при этом B и C – различные так как в противном случае маршруты k и l совпадают.

Теперь рассмотрим маршрут m , проходящий через остановки B и C . Этот маршрут не совпадает с маршрутами k и l , поскольку не проходит через точку A . На маршрут m имеется ещё одна остановка D .

В городской автобусной сети имеется ещё маршрут n , проходящий через остановки A и D .

Докажем, что на маршрутах k , l и n находятся все остановки автобусной сети. Допустим, что есть ещё одна остановка X , не находящаяся на маршрутах k , l и n , и маршрут p , проходящий через остановки A и X . Остановка X не может находиться на маршруте m , так как там есть уже три остановки B , C и D . Маршруты p и m должны иметь общую остановку. Это противоречит появлению четвёртой остановки на маршруте m .

Очевидно, что на трёх маршрутах k , l и n с общей остановкой A находятся 7 маршрутов. Пример автобусной сети приведён на рисунке 2.

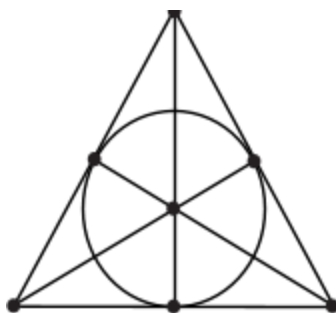


Рисунок 2 – Пример автобусной сети

1. Конечная проективная плоскость

Определение 1. Множество (точки), и некоторые его подмножества (прямые), называется *конечной проективной плоскостью*, если выполнены следующие условия (аксиомы):

- P1. Через две точки проходит ровно одна прямая;
- P2. Любые две прямые пересекаются ровно в одной точке;
- P3. На каждой прямой не менее трех точек;
- P4. Существует не менее двух прямых.

1. Докажите, что если существует прямая, состоящая из $n + 1$ точек, то

a). Каждая прямая состоит из $n + 1$ точки.

Пусть прямая l состоит из точек $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Прямых хотя бы две, рассмотрим произвольную прямую $m \neq l$. Из аксиомы P2 следует, что они имеют общую точку. Будем считать, что эта точка A_1 . Прямая m содержит точку B_2 , отличную от точки A_1 . Через точки A_2 и B_2 проведем прямую p и выберем на ней точку C , отличную от точек A_2 и B_2 . Точка C , не принадлежит прямым l и m . Всевозможные прямые, проходящие через точку C и точки прямой l исчерпывают все прямые, проходящие через точку C . Иначе на прямой l более, чем $n+1$ точка. С другой стороны, эти прямые по одному разу пересекают m , значит, прямая m состоит из $n+1$ точки.

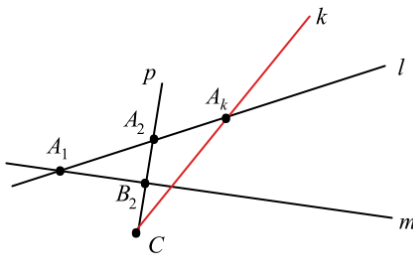


Рисунок 3 - Иллюстрация к доказательству

b). Через каждую точку проходит $n + 1$ прямая.

Доказательство получается двойственным образом из *a)* поскольку уже заметили, что существует точка C через которую проходит ровно $n+1$ прямая.

c). Конечная проективная плоскость состоит из $n^2 + n + 1$ точек.

Рассмотрим произвольную точку C плоскости. Через эту точку проходит ровно $n+1$ прямая (*b*). На каждой такой прямой точек, отличных от C ровно n (*a*). Следовательно, всего точек $(n+1)n+1$.

2. Конечная аффинная плоскость

Определение 2. Множество (*точки*), и некоторые его подмножества (*прямые*), называется *конечной аффинной плоскостью*, если выполнены следующие условия (*аксиомы*):

- A1. Через две точки проходит единственная прямая;
 - A2. Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной;
 - A3. На каждой прямой не менее двух точек;
 - A4. Существует не менее двух прямых.
2. Докажите, что если существует прямая, состоящая из n точек, то
- a) каждая прямая состоит из $n + 1$ точки;
 - b) через каждую точку проходит $n + 1$ прямая;
 - c) конечная аффинная плоскость состоит из $n^2 + n$ точек;
 - d) конечная аффинная плоскость содержит $n^2 + n$ прямых.

3. Докажите, что конечная аффинная плоскость порядка n существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка n .

Задача. В классе ученики ходят в 10 кружков. Каждый кружок посещают четверо, и для любых двух кружков есть только один ученик, который ходит в оба кружка. Сколько может быть учеников в классе?

Ответ: 31 или 13.

Решаем в общем случае. Пусть прямая имеет k элементов, n – количество прямых, общее количество элементов обозначим – m . Получим конечную геометрию с двумя аксиомами:

A1. Любые две разные прямые имеют ровно одну общую точку.

A2. Через каждую точку проходит хотя бы одна прямая.

Случай 1. Все n прямых имеют одну общую точку. Тогда ясно $m = 1 + n(k - 1)$. Для исходной задачи $k = 4$, $n = 10$, $m = 1 + 10 \cdot 3 = 31$.

Случай 2. Не все прямые имеют общую точку.

Рассмотрим множество прямых, проходящих через одну какую-то точку (*пучок прямых*). В рассматриваемом случае найдется прямая l не входящая в этот пучок, она пересечет каждую прямую пучка в точке отличной от общей точки. Поскольку прямая имеет k элементов, в пучке будет не более k прямых, а общее число точек на прямых этого пучка не более $1 + k(k - 1)$. Отметим, что если в пучке k прямых, то точек в этом пучке ровно $1 + k(k - 1)$.

Теперь докажем неравенство для количества прямых: $n \leq 1 + k(k - 1)$. Рассмотрим произвольную прямую l . Каждая другая

прямая пересекает l в одной из её k точек, а через каждую такую точку проходит не более $k - 1$ прямых, не считая l . Отметим, что если в каждом пучке меньше k прямых, то точно также доказывается неравенство $n \leq 1 + k(k - 2)$. В задаче имеет место неравенство $n = 10 > 1 + 4 \cdot 2 = 9$. Поэтому найдется пучок, в котором k прямых. Выше замечали, что тогда $m \geq 1 + k(k - 1)$.

Покажем, что $m = 1 + k(k - 1)$. Если $m > 1 + k(k - 1)$, то найдется точка A , не лежащая на прямых этого пучка. Рассмотрим прямую, проходящую через точку A . Эта прямая пересекается в k точках с прямыми пучка. Вместе с точкой A их станет $k + 1$, противоречие.

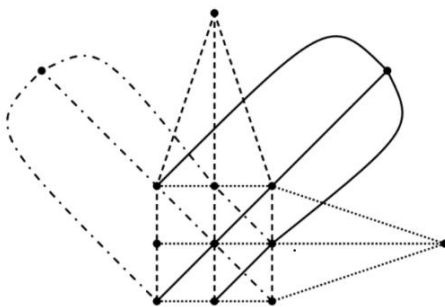


Рисунок 4 – Иллюстрация к задаче

Нужен пример с $1 + 4 \cdot 3 = 13$ точками и 10 прямыми.

Замечание. Можно нарисовать еще 3 прямые так, чтобы любые две из 13 пересекались.

Библиографический список

1. Саженов А.Н., Саженова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.
2. Плотникова Е.А., Саженов А.Н., Саженова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – № 3. – С. 34-37.

3. Саженов А.Н., Оскорбин Д.Н., Саженова Т.В. Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ. – 2019.

4. Саженов А.Н., Плотникова Е.А. О топологических задачах на прямой //МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 2022 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2022. – С. 36–40.

НАШИ АВТОРЫ

Абдрахманова Дина, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: abkdiadk@gmail.com.

Аглазин Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, профессор кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: algaz46@yandex.ru.

Алябышева Юлия Анатольевна, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: veryaeva@gmail.com.

Андреева Дарья Андреевна, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет (г. Челябинск), студент, e-mail: darievaaaa@mail.ru.

Арасланова Дарья Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: daria.araslanova@gmail.com.

Афанасьева Анастасия Евгеньевна, ЮУрГГПУ (г. Челябинск), студент, e-mail: safonafan01@mail.ru.

Ахмерова Ирина Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: iakhmerova@mail.ru.

Баянова Надежда Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: bayanova@math.asu.ru.

Березиков Виктор Васильевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: askmailoff@gmail.com.

Борисов Павел Валерьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: Saintersgame@mail.ru.

Будкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, e-mail: budkin@math.asu.ru.

Ваганов Алексей Владимирович, кандидат биологических наук, Южно-Сибирский ботанический сад, старший научный сотрудник, e-mail: vaganov_vav@mail.com.

Валяев Кирилл Евгеньевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: kirill.valyaev1999@gmail.com.

Вараксин Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: varaksin@math.asu.ru.

Величкова Алина Андреевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: velichkova.alina@mail.ru.

Вириц Рудольф Александрович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, преподаватель, e-mail: virtsrudolf@gmail.com.

Волкова Анастасия Константиновна, Алтайский государственный университет, Институт географии, ассистент кафедры ЭГиК.

Гамова Алла Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный университет, факультет компьютерных наук и информационных технологий, доцент, gamovaan@yandex.ru.

Глухов Николай Юрьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: glukhovv.nn@gmail.com.

Гнедко Максим Евгеньевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: gnedko98@mail.ru.

Графова Анастасия Вениаминовна, Алтайский государственный университет, Институт информационных технологий и физико-математического образования, студент, e-mail: nastya.grafova@inbox.ru.

Гринкевич Александр Владимирович, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: alexander.grin97@gmail.com.

Дронов Вадим Сергеевич, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, старший преподаватель кафедры математического анализа, e-mail: planeswalker@rambler.ru.

Дунец Александр Николаевич, доктор географических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт географии, проректор по научному и инновационному развитию, e-mail: dunets@mail.ru.

Журавлев Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: evzhuravlev@mail.ru.

Журавлева Вера Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: vvzhuravleva@mail.ru.

Калинин Игорь Михайлович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: bright.stellar.accretion@gmail.com.

Кашкаров Илья Игоревич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: iliakashkarov@gmail.com.

Кирова Валерия Орлановна, Московский государственный университет, Механико-Математический факультет, аспирант кафедры математической логики и теории алгоритмов, e-mail: kirova_vo@mail.ru.

Кислицин Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, научный отдел, старший научный сотрудник; Алтайский государственный педагогический университет, кафедра математики и методики обучения математике, доцент, e-mail: kislitsin@altspu.ru.

Клепиков Павел Николаевич, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, преподаватель кафедры математического анализа, e-mail: klepikov.math@gmail.com.

Клименко Роман Константинович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: rkklimenko@gmail.com.

Кобелева Надежда Федоровна, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ), Институт базовых дисциплин, Кафедра высшей математики, старший преподаватель, e-mail: kobeleva@sibguti.ru.

Кодолов Артем Владимирович, АО «ФНПЦ «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматики, начальник, e-mail: post@frpc.secna.ru.

Козлов Денис Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедры информатики, e-mail: dyk.barnaul@gmail.com.

Комарова Яна Денисовна Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (г. Москва), Высшая школа кибертехнологий, математики и статистики, студент, email: ikmrv9@gmail.com.

Кравченко Галина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: kravchenko@math.asu.ru.

Крюкова Дарья Вадимовна Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (г. Москва), Высшая школа кибертехнологий, математики и статистики, студент, email: danyakr@mail.ru.

Курушбаева Динара Талгатовна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: sh_din097@mail.ru.

Леонова Эвелина Ивановна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: leonova.eve@gmail.com.

Линевич Любовь Андреевна, Алтайский государственный университет, Колледж, преподаватель высшей категории, e-mail: linevich la@mail.ru.

Лодейщикова Виктория Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, доцент кафедры высшей математики, e-mail: lodeischikova@gmail.com.

Маничева Анастасия Станиславовна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: manichevaas@mc.asu.ru.

Мироевская Елизавета Эдуардовна, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, студент, e-mail: eli.miroevskaya@gmail.com.

Михеева Татьяна Викторовна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: mikheeva@edu.asu.ru.

Монастырева Анна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: akuzmina1@yandex.ru.

Нургалева Арина Руслановна, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Высшая Школа Финансов, студент, e-mail: arinnur@gmail.com.

Оскорбин Дмитрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: oskorbin@yandex.ru.

Оскорбин Николай Михайлович, доктор технических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, профессор кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: osk46@mail.ru.

Осыкин Дмитрий Алексеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: minarai30@mail.ru.

Папин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: papin@math.asu.ru.

Пекарская Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: pekarskayat@yandex.ru.

Петров Евгений Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: per@mail.asu.ru.

Печененко Константин Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: kostya.pechenenko@mail.ru.

Погосян Вардан Баландурович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: vardan.pogosyn@yandex.ru.

Поломошнова Юлия Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: Pyulyae@mail.ru.

Половикова Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: ponOlga@gmail.com.

Полосин Георгий Витальевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: georgiy.polosin2019@gmail.com.

Пономарев Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: igorpon@mail.ru.

Понькина Елена Владимировна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующая кафедрой теоретической кибернетики и прикладной математики, Барнаул, e-mail: ponkina@math.asu.ru.

Попов Федор Алексеевич, доктор технических наук, профессор, АО «ФНПЦ «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматики, главный научный сотрудник, e-mail: pfa2004@mail.ru.

Плотникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: pselena@gmail.com

Правдивцев Артем Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: as.pravdivtsev@yandex.ru.

Родионов Евгений Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, профессор кафедры мат. анализа, e-mail: edr2002@mail.ru.

Саженов Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, ИГиЛ СО РАН (Новосибирск), лаборатория КЗ МСС, с.н.с., sazhenkovs@yandex.ru.

Саженова Елена Владимировна, Новосибирский государственный университет экономики и управления, кафедра высшей математики, старший преподаватель, e-mail: sazhenkovs@yandex.ru

Саженова Татьяна Владимировна, Алтайский государственный университет, доцент кафедры математического анализа, e-mail: t.sazhenkova@gmail.com

Сапаров Маъруф Абдихаликович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий студент, e-mail: saparov maruf@mail.ru.

Сафарова Шахноза Абдихоликовна Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий студент, e-mail: safarova shaxnoza1992@mail.ru.

Сафонова Варвара Юрьевна, Горно-Алтайский государственный университет, Экономико-юридический факультет, кафедра экономики, туризма и прикладной информатики, ассистент, e-mail: safonova varvara@mail.ru.

Сибин Антон Николаевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, научный сотрудник, e-mail: sibir anton@mail.ru.

Скурыдина Елена Михайловна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный педагогический университет, Институт информационных технологий и физико-математического образования, доцент, e-mail: skudem@rambler.ru.

Смолякова Лариса Ленгардовна, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, старший преподаватель кафедры информатики, e-mail: knaus.larisa@gmail.com.

Строкин Дмитрий Игоревич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: mega.strokin@mail.ru.

Талочкина Вероника Алексеевна, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Высшая Школа Финансов, студент, e-mail: talockinaveronika@gmail.com.

Татаринова Елизавета Анатольевна, Новосибирский государственный университет, студент, e-mail: e.tatarinova@g.nsu.ru .

Тимофеев Александр Гурьевич, кандидат экономических наук, доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (г. Москва), преподаватель кафедры информатики, email: Timofeev.AG@tea.ru.

Токарева Маргарита Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: tma25@mail.ru.

Тримбач Марина Геннадьевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: mtrimbach@bk.ru.

Устюжанова Алла Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru.

Филина Ольга Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: olya-filina@mail.ru.

Хворова Любовь Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: KhvorovaLA@gmail.com.

Шахова Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: sashakhova@gmail.com.

Шнайдер Александр Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: alexxschh@gmail.com.

Юрьев Максим Андреевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: yrev2011@gmail.com.

Оглавление

СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА4

<i>Будкин А.И.</i> , Нильпотентные группы с нильпотентными n-порождёнными нормальными подгруппами	4
<i>Вараксин С.В.</i> , О сплетении групп автоморфизмов циклически упорядоченного и линейно- упорядоченного множеств	6
<i>Вараксин С.В.</i> , О разрешимости свободной m-группы над свободной нильпотентной двупорожденной группой.....	8
<i>Гамова А.Н.</i> , Обобщенные версии алгоритмов.....	10
<i>Журавлев Е.В.</i> , <i>Филина О.А.</i> , О классификации конечных локальных колец с радикалом Джекобсона индекса нильпотентности три.....	15
<i>Кирова В.О.</i> , Полиномиальная сложность слов Штурма	17
<i>Кислицин А.В.</i> , Коммутативность мультипликативного векторного пространства как условие конечной базированности его тождеств	25
<i>Монастырева А.С.</i> , Ациклические сжатые графы делителей нуля конечных колец с единицей.....	27
<i>Петров Е.П.</i> , О строении конечномерных нильпотентных алгебр с условием $\dim R_2/R_3 = \dim R_3/R_4 = 3$	29
<i>Шахова С.А.</i> , Об аксиоматическом ранге классов Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп	34

СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ36

<i>Гнедко М.Е., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Конформно киллинговы векторные поля на 2 – симметрическом Лоренцевом многообразии</i>	<i>36</i>
<i>Голубятников В.П., Татаринова Е.А., Параметрический анализ модели контроля эмбриональных стволовых клеток</i>	<i>38</i>
<i>Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н., Задача об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника</i>	<i>433</i>
<i>Дронов В.С., Алгоритм Махмуда в секторной интервальной арифметике с центральной формой записи.....</i>	<i>477</i>
<i>Клепиков П.Н., Сигнатуры кривизны Риччи четырёхмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии</i>	<i>599</i>
<i>Пономарев И.В., Строкин Д.И., О методах вейвлет- преобразований компьютерных изображений.....</i>	<i>644</i>

СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ699

<i>Ахмерова И.Г., Правдивцев А.С., Разрешимость в «малом» по времени начально-краевой задачи для уравнений одномерного движения сыпучей среды ...</i>	<i>699</i>
<i>Борисов П.В., Валяев К.Е., Сухие и влажные моды упругой пластины с линейной аппроксимацией толщины.....</i>	<i>722</i>
<i>Вирц Р.А., Токарева М.А., Численное моделирование задачи протекания жидкости в пороупругой среде ...</i>	<i>766</i>
<i>Леонова Э.И., Папин А.А., Математическое моделирование динамики биологической ткани.....</i>	<i>811</i>

<i>ПЕКАРСКАЯ Т.А., СИБИН А.Н.,</i> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ МУТНОСТИ ВОДЫ ПРИ РАСЧИСТКЕ РУСЛА РЕКИ	855
<i>ПОГОСЯН В.Б., ТОКАРЕВА М.А.,</i> ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ КАК ТРЕХФАЗНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ПИТАТЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ	899
<i>САЖЕНКОВ С.А.,</i> МНОГОМАСШТАБНЫЕ МОДЕЛИ ГЕТЕРОФАЗНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД	933
<i>ТОКАРЕВА М.А., ПАПИН А.А.,</i> НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ И ВОЗДУХА В ПОРОУПРУГОМ ЛЬДУ С УЧЕТОМ ПРИМЕСЕЙ	999
<i>УСТЮЖАНОВА А.В.,</i> О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ	1022

СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА.....1066

<i>АЛГАЗИН Г.И.,</i> Об одном классе моделей ограниченной РАЦИОНАЛЬНОСТИ	1066
<i>КУРУШБАЕВА Д.Т.,</i> МЕТОДИКА СТИМУЛИРОВАНИЯ РАБОЧЕЙ БРИГАДЫ С ЦЕЛЬЮ СОКРАЩЕНИЯ ПОТЕРЬ И ДЕФЕКТОВ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ.....	1099
<i>НУРГАЛЕЕВА А. Р., ТАЛОЧКИНА В. А., ТИМОФЕЕВ А. Г.,</i> КОНЦЕПЦИЯ ПРОГРАММЫ «ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ».....	1144
<i>ОСКОРБИН Н.М., САПАРОВ М.А., САФАРОВА Ш.А.,</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ КОНФЛЮЭНТНОГО АНАЛИЗА	1211
<i>ПОЛОСИН Г. В., ПОНЬКИНА Е. В.,</i> АВТОМАТИЗАЦИЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ДАННЫХ: ТРЕНДЫ NDVI, ИНСТРУМЕНТЫ GOOGLE EARTH ENGINE И PYTHON.....	1255
<i>САБАЕВ А.А.,</i> ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАБРАСЫВАЕМОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ УЧАСТКОВ ЛИЧНЫХ ПОДСОБНЫХ ХОЗЯЙСТВ НА ПРИМЕРЕ АЛТАЙСКОГО КРАЯ	1299

СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ.....1311

<i>БЕРЕЗИКОВ В.В., КРАВЧЕНКО Г.В.,</i> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.....	1311
<i>ВЕЛИЧКОВА А.А., МИХЕЕВА Т.В.,</i> МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ (НА ОСНОВЕ ОФИЦИАЛЬНЫХ ДАННЫХ ВСЕРОССИЙСКИХ ПРОВЕРОЧНЫХ РАБОТ АЛТАЙСКОГО КРАЯ).....	1355
<i>КАЛИНИН И. М.,</i> РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ПОРОГА ВХОДА И ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ СИСТЕМНОГО АДМИНИСТРАТОРА	14040
<i>КАШКАРОВ И.И., КОЗЛОВ Д.Ю., ВОЛКОВА А.К., ДУНЕЦ А.Н.,</i> ВЫЯВЛЕНИЕ ЦЕНТРОВ ОПОРНОГО КАРКАСА ХОЗЯЙСТВА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СИБИРСКОГО РЕГИОНА В НОЧНОЕ ВРЕМЯ .	1433
<i>ВАГАНОВ А.В., ПЕЧЕНЕНКО К.С., ХВОРОВА Л.А.,</i> ОБРАБОТКА, АНАЛИЗ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ НА ФОТОСНИМКАХ ФОТОЛОВУШЕК.....	1477
<i>ПОЛОМОШНОВА Ю.Е., МИХЕЕВА Т.В., АЛЯБЫШЕВА Ю.А.,</i> FRONTEND-РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РАБОТЫ С МНОГОЯЗЫЧНЫМИ ТЕКСТАМИ ДЕЛОВОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ.....	1511
<i>ПОПОВ Ф.А., КОДОЛОВ А.В.,</i> ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ХРАНИЛИЩА, ИНТЕГРИРОВАННЫХ ДАННЫХ НАУЧНО- ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ	1544
<i>ТРИМБАЧ М.Г., КЛИМЕНКО Р.К., ХВОРОВА Л.А.,</i> РАЗРАБОТКА РЕГИСТРА НОСИТЕЛЕЙ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ТРОМБОФИЛИЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКА ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ У ЖИТЕЛЕЙ АЛТАЙСКОГО КРАЯ	1633

Шнайдер А.С., Половикова О.Н., Система сбора и визуализации статистических данных по работе роутеров корпоративной сети 1666

СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА 1699

Арасланова Д.Е., Половикова О.Н., Разработка и реализация игровой модели с динамическим построением контента на основе нейронной сети .. 1699

Афанасьева А.Е., Цифровые образовательные технологии на уроках математики 1722

Глухов Н.Ю., Козлов Д.Ю., Распознавание слов рукописного текста на примере школьных тетрадей 1766

Графова А.В., Скурыдина Е.М., Проектирование датасета для прогнозирования результатов соревнований в киберспорте..... 18080

Маничева А.С., Журавлева В.В., Абдрахманова Д., Элементы автоматизации контроля успеваемости студентов на основе анализа цифровых следов на образовательной платформе..... 1844

Осыкин Д.А., Половикова О.Н., Проектирование и разработка информационной системы для обучения шахматам..... 1877

Смолякова Л.Л., «Код будущего» - первые результаты проекта 1911

Юрьев М.А., Козлов Д.Ю., Классификация комментариев к посту на портале sports.ru и анализ их тональности 1955

СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ 1999

<i>АНДРЕЕВА Д.А.,</i> Цифровизация профессионального образования на примере платформы STERIK	1999
<i>БАЯНОВА Н.В., ЛОДЕЙЩИКОВА В.В.,</i> Генераторы задач и их использование для контроля знаний по высшей математике	2033
<i>КОБЕЛЕВА Н.Ф.,</i> Применение электронного курса «ТВИМС» на базе LMS MOODLE на больших потоках студентов.....	2066
<i>КРАВЧЕНКО Г.В.,</i> Цифровые инструменты и сервисы в математическом образовании.....	2111
<i>КРЮКОВА Д.В., КОМАРОВА Я.Д., ТИМОФЕЕВ А.Г.,</i> Аналитика больших данных и методы машинного обучения, возможности их использования в образовании.....	2166
<i>ЛИНЕВИЧ Л.А.,</i> Применение динамической программы GEOGEBRA при изучении школьного курса стереометрии	22020
<i>ЛОДЕЙЩИКОВА В.В., МИРОЕВСКАЯ Е.Э.,</i> Создание генератора задач на исследование принадлежности булевых функций классам Поста.....	2233
<i>ПЛОТНИКОВА Е.А., САЖЕНКОВА Е.В., САЖЕНКОВА Т.В.,</i> О геометрических интерпретациях в решении олимпиадных математических задач.....	225
НАШИ АВТОРЫ	2311