



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ С
МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

Барнаул 2022

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
с международным участием**

Фундаментальная и прикладная математика

Цифровая экономика

*Современные информационные и вычислительные
технологии в прикладных задачах*

*Информационные технологии и системы искусственного
интеллекта*

*Цифровые и информационные технологии в
профессиональном образовании*

ББК 22.1я431
М 150

Главный редактор
профессор Н.М. Оскорбин

Редколлегия:

А.И. Будкин, Д.Ю. Козлов, Г.В. Кравченко, А.А. Папин,
Е.П. Петров, Е.В. Понькина, Е.Д. Родионов, А.Н. Саженов

М 150 МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2022. – 389 с.

Выпуск содержит статьи, в которых представлены основные результаты научных исследований преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, докторантов и студентов учебных заведений. Конференция «МАК-2022» представляет собой Российско-Казахстанский проект, целью которого является активизация отношений с ВУЗами Казахстана и проведение конструктивного научного сотрудничества по важным для России и Казахстана направлениям в сфере образования и научно-исследовательской деятельности.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, прикладной математики, математического моделирования и информационных технологий в социальных, экономических, экологических системах; интенсификация междисциплинарных исследований, развитие научной активности научно-ориентированной молодежи, привлечение ее к решению актуальных задач современной науки и практики; сохранение и развитие научного потенциала Алтайского края и других регионов.

ISSN: 2687-0118

© Алтайский государственный университет, 2022
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.62

Исследование действительных корней многочлена с действительными коэффициентами

А.Е. Афанасьева¹, В.А. Логвиненко¹, Е.О. Шумакова¹

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

Статья посвящена исследованию действительных корней с действительными коэффициентами методом Штурма, используя онлайн сервис WolframAlpha.

Ключевые слова: *многочлен с действительными коэффициентами, действительные корни, метод Штурма, математический онлайн сервис.*

В современном мире наибольшую популярность набирает всемирный Интернет. Человечество уже и не может представить себе жизнь без цифровых технологий. Так и математика требует каких-либо изменений, например, упрощений в вычислениях.

В поисковике можно найти различные онлайн калькуляторы, которые выполняют определенные действия за секунды, когда тем временем обычный человек тратит на это приличное время. Например, существуют такие известные математические сервисы как WolframAlpha [1], GeoGebra, графический калькулятор Desmos, которые решают уравнения различных типов, считают интегралы и производные, строят графики функций [2, 3, 4]. А также выполняют вычисления при реализации проектов по математическим дисциплинам [5, 6].

В линейной алгебре существует несколько различных методов отыскания действительных корней. Например, способ Бюдана – Фурье, Штурма, Декарта. Однако самым простым в вычислениях является метод Штурма, который был открыт Жаком Шарлем Штурмом в 1829 году [7]. Метод Штурма сам по себе является довольно громоздким при вычислениях, но используя сервисы, можно сократить время. Рассмотрим пример, используя WolframAlpha. Данная среда представляет собой базу знаний, построенной на вычислительных алгоритмах еще в 2009 году.

Задача. Отделить действительные корни многочлена $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$ методом Штурма.

С помощью алгоритма Штурма перейдем к решению задачи. Первым шагом нужно составить последовательность Штурма.

$$f_0(x) = f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$$

Для f_1 найдем производную от $f(x)$ (рисунок 1). Для вычисления производной в WolframAlpha есть конструкция «derivative of».

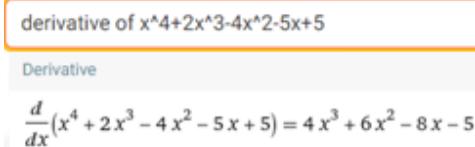


Рисунок 1 – Производная в WolframAlpha

Далее находим $f_2(x)$, он будет равен остатку от деления многочлена $f_0(x)$ на $f_1(x)$. При помощи функции «PolynomialRemainder» вычислим искомое (рисунок 2).

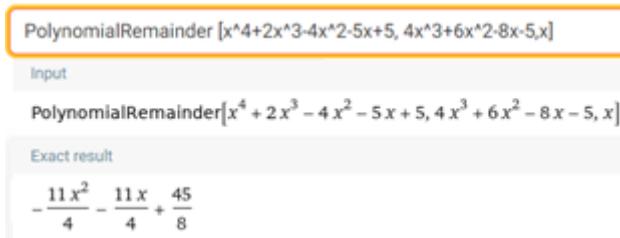


Рисунок 2 – Вычисление остатка от деления многочленов

Продолжая применять эту функцию, получим следующую систему Штурма:

$$f_0(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$$

$$f_1(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x - 5$$

$$f_2(x) = \frac{11}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{45}{8} = \frac{1}{8}(22x^2 + 22x - 45)$$

$$f_3(x) = \frac{20}{11}x - \frac{10}{11} = \frac{10}{11}(2x - 1)$$

$$f_4(x) = \frac{57}{2}$$

Следующим шагом определяем число перемен знаков последовательности многочленов. Составим следующую таблицу 1. Находим количество действительных корней: $\omega(-\infty) - \omega(+\infty) = 4 - 0 = 4$.

Таблица 1 – Подсчет количества действительных корней

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	Счетчик
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0
0	+	-	-	+	+	2
1	-	-	-	+	+	1
2	+	+	+	+	+	0
-1	-	+	-	-	+	2
-2	-	+	-	-	+	3
-3	+	-	+	-	+	4

Из таблицы можно увидеть, что многочлен $f(x)$ имеет четыре различных корня на интервалах $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$.

Для того, чтобы убедиться в правильности выполнения задания, можно воспользоваться функцией «solve», которая вычислит корни многочлена и построит график (рисунок 3).

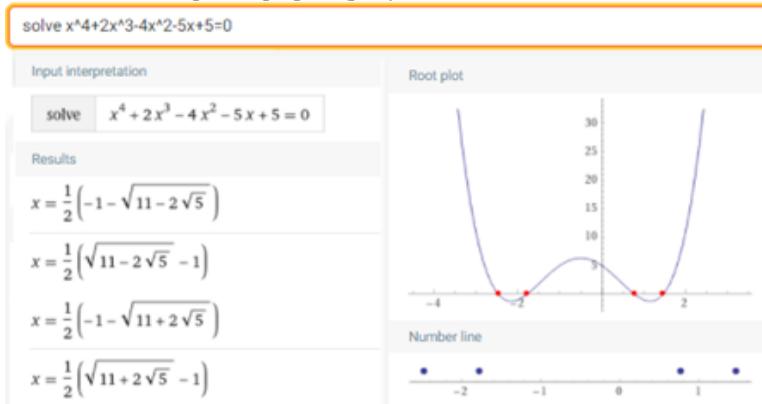


Рисунок 3. – Функция solve

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору НИР заявка ШК-04-2022/21 от 18.04.2022 г.

Библиографический список

1. Маренич А.С., Маренич Е.Е. Применение WolframAlpha для совершенствования преподавания математических дисциплин // Сборник научных статей участников ежегодной Международной научно-методической конф. «Гармонизация образовательной и научной деятельности как направление стратегического развития вузов». – М.: Финансовый университет при Правительстве РФ, 2015. – С. 51-54.
2. Табачук Н.П. Онлайн калькуляторы и программы в математическом образовании // Проблемы внедрения и оценка эффективности: материалы XXXV международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Ульяновск: Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, 2016. – С. 289-293.
3. Шумакова Е.О. Использование электронных образовательных ресурсов в преподавании математики // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. материалы III Всероссийской научно-практ. конф. – Тверь: Тверской государственный университет, 2022. – С. 258-263.
4. Шумакова Е.О. Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Особенности применения динамических графических приложений в процессе математической и методической подготовки бакалавров педагогического образования // В сборнике: Информация и образование: границы коммуникаций INFO'20. сборник научных трудов № 12 (20). – Горно-Алтайск, 2020. – С. 78-81.
5. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" / Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 5. – С. 45.
6. Шумакова Е.О. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 частях. Под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – 2018. – С. 132-136.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов / А.Г. Курош. – 22-е изд. – Санкт-Петербург.: Лань, 2021. – 432 с.

Накрития в решетке квазимногообразий ℓ -групп

Н.В. Баянова, В.П. Уфимцева

АлтГУ, г. Барнаул

В статье построена пара квазимногообразий, верхнее из которых покрывает нижнее в решетке квазимногообразий решеточно упорядоченных групп.

Ключевые слова: *решеточно упорядоченная группа, квазимногообразие, покрытие.*

Напомним [1], что алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle e, {}^{-1}, \cdot, \vee, \wedge \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями:

$$x(u \vee v)y = xyu \vee xvy, \quad x(u \wedge v)y = xyu \wedge xvy$$

называется решеточной упорядоченной группой (ℓ – группой).

Если всякие два элемента решеточно упорядоченной группы сравнимы, то группу называют линейно упорядоченной.

Класс ℓ – групп X называется квазимногообразием ℓ – групп, если существует множество Φ квазитождеств сигнатуры ℓ такое, что X состоит из всех ℓ – групп, на которых истинны все квазитождества из Φ . Множество Λ всех квазимногообразий ℓ – групп является решеткой относительно естественно определенных операций пересечения и объединения квазимногообразий.

Говорят, что квазимногообразие X покрывает квазимногообразие Y в решетке квазимногообразий ℓ – групп Λ , если $Y \subset X$ и для любого квазимногообразия $U, Y \subseteq U \subseteq X$, выполнено $Y = U$ или $U = X$.

Одним из важных классов решеточно упорядоченных групп является многообразие \mathcal{R} всех o -аппроксимируемых ℓ – групп, т.е. ℓ – групп, которые аппроксимируются линейно упорядоченными группами. Хорошо известно [1], что \mathcal{R} определяется тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$.

Как обычно, $|x| = vxv^{-1}$, $[x, y] = y^{-1}xy$, N – множество натуральных чисел. Через $q_l(K)$ обозначим квазимногообразие ℓ – групп, порожденное классом ℓ – групп K .

Все необходимые определения по решеточно упорядоченным группам можно найти в [1].

Основной для теории квазимногообразий ℓ – групп является следующая

Теорема 1. (А.И. Мальцев [2].) Пусть K – произвольный класс ℓ -групп. Тогда квазимногообразии $q_l(K) = SPP_u(K)$, где S, P, P_u – операторы взятия соответственно ℓ -подгрупп, декартовых произведений и ультрапроизведений. ■

Следующие утверждения доказываются непосредственно.

Предложение 1. Пусть x, y – положительные элементы ℓ -группы G такие, что $x \wedge x^y = e$. Тогда $e < x \ll y$, т. е. $x^n < y$ для любого $n \in N$. ■

Предложение 2. (Дарнел [3].) Пусть P – спрямляющая подгруппа ℓ -группы G такая, что для некоторых положительных $y \in G$ и натурального m элементы $y^{-1}Py, y^{-2}Py^2, \dots, y^{-m}Py^m$ несравнимы с P . Тогда в G существует $m+1$ попарно ортогональных элементов. ■

Пусть G – ℓ -группа, являющаяся лексикографическим расширением ℓ -группы H с помощью бесконечной циклической группы (y) , $G = H\tilde{\lambda}(y)$. Через $D_p(G)$ обозначим лексикографическое расширение $\prod_{i=1}^n H_i$ с помощью бесконечной циклической группы (t) , где $t^{-1}(h_1, h_2, \dots, h_p)t = (h_p^y, h_1, \dots, h_{p-1})$, $H_i \cong H$ и H_i – ℓ -подгруппа в $D_p(G)$ всех элементов вида $(e(e, \dots, e, h_i, e, \dots, e))$. Считаем $x = t^k(h_1, h_2, \dots, h_p) \geq e$ в $D_p(G)$, если $k > 0$ или $k = 0$ и $h_i \geq e$ в G (см. [3]).

Пусть $G = (a)wr(b)$ – сплетение двух бесконечных циклических групп (a) и (b) . Известно, что в $(a)wr(b)$ ряд

$$G = \gamma_1 G \supseteq \gamma_2 G \supseteq \dots \supseteq \gamma_i G \supseteq \dots$$

имеет единичное пересечение и фактор-группа $\gamma_{i+1}G/\gamma_{i+2}G = ([a, \underbrace{b, \dots, b}_i]_{\gamma_{i+2}G})$ – бесконечная циклическая группа, порождённая элементом $([a, \underbrace{b, \dots, b}_i]_{\gamma_{i+2}G})$, здесь $\gamma_{i+1}G = [\gamma_i G, G]$.

Далее, для любых $n \geq 2$ и $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$, где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, n-1$) через $Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1})$ обозначим линейный порядок группы $G = (a)wr(b)$, определённый следующими соотношениями:

$$1. \quad b \gg a \gg |[a, b]| \gg |[a, b, b]| \gg \dots \gg |[a, b, \dots, b]| \gg \dots > e.$$

$$2. \quad [a, \underbrace{b, \dots, b}_k]^{\varepsilon_{\bar{k}}} > e, \text{ где } \bar{k} - \text{вычет числа } k \text{ по модулю } n \text{ и}$$

$$\bar{k} \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что в линейно упорядоченной группе $(G, Q_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}))$ для любых двух непостоянных элементов x, y выполняется равенство $|x|v|y| = b^s \varphi$, где $s > 0$, $s \in N$, $\varphi \in \text{fun}((a), (b)) = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i)$.

Пусть группа $G = (a)wr(b)$, линейно упорядочена относительно порядка $Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1})$. Пусть p – простое число. Положим, как

и в работе [4]:

$$v^{(i)}(x, y^p) = v^{(i)}(x, y^p, 1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}) = \\ ((u_0^i(x, y^p)) \vee e) \wedge ((u_1^i(x, y^p))^{-1} \vee e) \wedge \dots \wedge ((u_{n-1}^i(x, y^p))^{-1} \vee e),$$

$$w(x, y^p) = w(x, y^p, 1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}) = \bigvee_{i=0}^{n-1} v^{(i)}(x, y^p, 1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}),$$

$$\bar{w}(x, y^p) = |[w(x, y^p), |x| \vee |y^p|]|,$$

где

$$u_0^0(x, y^p) = |[x, y^p]|,$$

$$u_0^{(i)}(x, y^p) = |[u_0^{i-1}(x, y^p), |x| \vee |y^p|]|, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$u_j^{(i)}(x, y^p) = [u_{j-1}^i(x, y^p), |x| \vee |y^p|], j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Лемма 1. Пусть x, y – положительные элементы ℓ – группы $D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}))$ такие, что $x \wedge x^{y^i} = e$ ($i = \overline{1, p-1}$), тогда значение слова $w(x, y^p)$ представляется в виде

$$w(x, y^p) = \left(e, \left[a, b, \dots, b \right]_{nt-1}^r \phi \right) > e, \text{ где } \phi \in \gamma_{nt+1}G, \text{ для некоторого}$$

$t \in N$ и целого числа $r < 0$. ■

Лемма 2. Пусть x, y – положительные элементы ℓ – группы $D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}))$. Если элементы x, y таковы, что

$$x \wedge x^{y^i} = e \quad (i = \overline{1, p-1}), \quad \text{то } \ell\text{-гр}(\bar{w}(x, y^p), y) \quad \text{изоморфна}$$

$$\ell\text{-группе } D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1})). \blacksquare$$

Лемма 3. Пусть x, y – положительные элементы ℓ – группы $\bar{\prod}_{j \in J} (D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))/\mathcal{F})$, где \mathcal{F} – некоторый ультрафильтр над множеством J . Если

$$x \wedge x^{y^i} = e \quad (i = \overline{1, p-1}), \quad \text{то } \ell\text{-гр}(\bar{w}(x, y^p), y) \quad \text{изоморфна } D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1})). \blacksquare$$

Обозначим $G^* = \bar{\prod}_{k \in K} G_k$, где $G_k = \bar{\prod}_{j \in J_k} D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))/\mathcal{F}_k$.

Лемма 4. Пусть x, y – положительные элементы ℓ – группы G^* такие, что $x \wedge x^{y^i} = e$ ($i = \overline{1, p-1}$). Тогда ℓ – группа

ℓ – $\text{гр}(\bar{w}(x, y^p), y)$ изоморфна ℓ – группе $D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))$. ■

Теорема 2. Для любого простого числа p квазимногообразии $q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1})))$ покрывает

квазимногообразии $q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))) \cap \mathcal{R}$ в решетке квазимногообразий ℓ – групп Λ .

Доказательство. Пусть H – произвольная не о-аппроксимируемая группа, $H \in q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1})))$. Согласно *теореме 1*

$H \leq \bar{\Pi}(\Pi(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))))$. Так как H – не о-аппрок-

симируемая, то найдутся положительные элементы $x, y \in H$ такие, что $x \wedge x^y = e$. Из *предложения 1* следует $x \ll y$. Покажем,

что x, y можно выбрать так, чтобы $x \wedge x^{y^i} = e$ ($i = \bar{1}, p - \bar{1}$).

Пусть V – значение элемента x . Известно [1], что V содержит минимальную спрямляющую подгруппу M , $x \notin M$. Тогда

непосредственные вычисления показывают, что $M^y, M^{y^2}, \dots, M^{y^{p-1}}$

несравним с M . По *предложению 2* в H можно выбрать $x, x^y, \dots, x^{y^{p-1}}$

такие, что $x \wedge x^{y^i} = e$ ($i = \bar{1}, p - \bar{1}$). По *Лемме 4* H содержит подгруппу ℓ – $\text{гр}(\bar{w}(x, y^p), y)$, изоморфную $D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))$.

Следовательно,

$$q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))) \subset q_l(H) \subset q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1}))).$$

Значит, $q_l(H) = q_l(D_p(G, Q_n(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1})))$. ■

Библиографический список

1. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы // М. – Наука – 1984. – 320 с.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы // М. – Наука – 1970. – 392 с.
3. Darnel M. R. Varieties minimal over representable varieties of lattice-ordered groups// Comm. Algebra – 21 – N.8 – 1993, 2637-2665.
4. Баянова Н.В. Накрытия в решётке квазимногообразий l -групп // Сиб. матем. ж. – 35 – N.4 – 1996. – 379-388.

О квазимногообразиях групп, не имеющих независимых базисов квазитождеств

А.И. Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

В работе найдены новые примеры квазимногообразий, порождённых конечной 2-ступенно нильпотентной группой экспоненты p (p – нечётное простое число) и не имеющих независимых базисов квазитождеств.

Ключевые слова: *нильпотентная группа, квазимногообразие, независимый базис квазитождеств.*

Квазимногообразии групп - это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитождествами. В этой работе изучается вопрос о существовании независимых базисов квазитождеств.

Множество квазитождеств называется независимым, если оно не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству. В частности, любое конечное множество квазитождеств эквивалентно независимой системе квазитождеств.

Существует тесная связь между независимыми базисами квазитождеств и определенными свойствами решеток квазимногообразий групп. Из существования бесконечного независимого базиса у данного квазимногообразия следует наличие бесконечного множества покрытий этого квазимногообразия в решетке квазимногообразий групп.

Вопрос о независимой аксиоматизируемости квазимногообразий изучался в [1-11].

Пусть M – многообразие нильпотентных групп класса не выше двух экспоненты p (p – нечетное простое число), F – свободная в M группа ранга 2. Обозначим через qF – квазимногообразие, порожденное группой F .

В [7] показано, что qF не имеет покрытий в решетке квазимногообразий, содержащихся в M . Следствием этого является теорема о том, что qF не имеет независимого базиса квазитождеств. К настоящему времени не известно квазимногообразий, отличных от qF , порождённых конечной группой, содержащихся в M и не имеющих

независимого базиса квазиитождеств. В данной работе найдены новые такие квазимногообразия.

Теорема. Существует $r+1$ квазимногообразия, порождённое конечной группой из M и не имеющее покрытий в решётке квазимногообразий, содержащихся в M .

Следствие. Существует $r+1$ квазимногообразия, порождённое конечной группой из M и не имеющее независимого базиса квазиитождеств.

Библиографический список

1. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of groups // *Mathematical Notes*. – 1982. – V. 31, №6. – P. 413-417.
2. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups // *Algebra and Logic*. – 1986. – V. 25, №3. – P. 155-166.
3. Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasi-varieties of soluble groups // *Algebra and Logic*. – 1999. – V. 30, №2. – P. 81-100.
4. Budkin A.I. On the independent axiomatizability of quasimanifolds of universal algebras // *Mathematical Notes*. – 1994. – V. 56, №4. – P. 1008-1014.
5. Budkin A.I. Quasivarieties of groups having no coverings // *Mathematical Notes*. – 1985. – V. 37, №5. – P. 333-337.
6. Fedorov A.N. Quasi-identities of a free 2-nilpotent group // *Mathematical Notes*. – 1986. – V. 40, №5. – P. 837-841.
7. Fedorov A.N. Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties // *Siberian Mathematical Journal*. – 1980. – V. 21, №6. – P. 840-850.
8. Tumanov V.I. Finite lattices having no independent basis of quasiidentities // *Mathematical Notes*. – 1984. – V. 36, №5. – P. 811-815.
9. Basheyeva A.O., Yakovlev A.V. On w -independent bases for quasi-identities // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – V. 14. – P. 838-847.
10. Gorbunov V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties // *Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau*, 1998.
11. Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability // *Algebra and Logic*. – 1977. – V. 16, №5. – P. 340-369.

**О представлении свободных m -произведений в классе
метабелевых монотонно упорядоченных групп
автоморфизмами линейно упорядоченных множеств**

С.В. Вараксин

АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматриваются свободные m -произведения в классе метабелевых m -групп. Построено представление такого произведения m -групп автоморфизмами линейно упорядоченных множеств.

Ключевые слова: решеточно упорядоченные группы, m -группы, порядковые автоморфизмы, линейно упорядоченные множества.

Монотонно упорядоченной группой, или m -группой, (G, φ) называют алгебраическую систему G с тремя бинарными операциями \cdot , \vee и \wedge , двумя унарными $^{-1}$ и φ и константой e . Она является ℓ -группой, т.е. решеточно упорядоченной группой, относительно операций \cdot , \vee , \wedge , $^{-1}$ и e и одноместная операция φ на ней является автоморфизмом второго порядка группы G и антиизоморфизмом решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$. Для любых элементов $x, y \in G$ выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y), & \varphi(\varphi(x)) &= x \\ \varphi(x\vee y) &= \varphi(x)\wedge\varphi(y), & \varphi(x\wedge y) &= \varphi(x)\vee\varphi(y) \end{aligned}$$

Базовые понятия и определения теории решеточно упорядоченных групп описаны в монографии [1]. Напомним, в частности, что ℓ -группа является группой по умножению и дистрибутивной решеткой, умножение дистрибутивно относительно решеточных операций

$$a(x \wedge y)b = axb \wedge ayb, \quad a(x \vee y)b = axb \vee ayb$$

и решеточные операции определяют на G решеточный порядок $x \leq y$ если $x\wedge y = x$ или, что то же самое, $x\vee y = y$.

Решеточно упорядоченная группа называется метабелевой, если фактор-группа по ее наибольшему абелевому ℓ -идеалу, т.е. по абелевому радикалу, является абелевой решеточно упорядоченной группой. Многообразие этих групп обозначается A^2 , его можно задать ℓ -групповым тождеством $[[x_1, x_2] \wedge |x_3|, |[x_4, x_5] \wedge |x_6|] = e$. Далее будем рассматривать только такие ℓ -группы и m -группы.

Пусть G – группа с частичным порядком P и автоморфизмом второго порядка φ . Будем говорить, что порядок P реверсируется автоморфизмом φ , если из неравенства $x \leq_P y$ следует неравенство

$\varphi(x) \leq_P \varphi(y)$, а пару (G, φ) называть частично упорядоченной (ч.у.) группой с реверсией.

Назовем также m -группу (F, φ) свободной над ч.у. группой с реверсией (G, φ) , если (G, φ) вложима в (F, φ) и любой o -гомоморфизм $\alpha_i: G \rightarrow H$, устойчивый относительно φ , продолжается до m -гомоморфизма $\alpha: G \rightarrow H$.

Пусть теперь $\{(G_i, \varphi_i)\}$ – некоторое множество метабелевых m -групп, $G = \prod_i^* G_i$ – их свободное произведение в классе групп, φ – продолжение φ_i на G , а частичный порядок P на G порожден порядками на G_i . Пусть H – свободная метабелева m -группа над (G, φ) . Тогда m -группы (G_i, φ_i) допускают o -вложения α_i в m -группу (H, φ) , перестановочные с φ (но не ℓ -вложения). Обозначим через $J = \langle (\alpha_i(g)^-)^{-1} \wedge (\alpha_i(g)^+ | g \in G_i \rangle$ m -идеал m -группы (H, φ) , а через F фактор-группу H/J по этому m -идеалу.

Теорема. m -группа (F, φ) является свободным произведением m -групп $\{(G_i, \varphi_i)\}$ в классе метабелевых m -групп.

Библиографический список

1. Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400p.
2. Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. of Algebra. – 1970. – V.16. – P. 191-203.
3. Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V.49(124). – P.743-766.
4. Holland C., Scrimger E. Free products of lattice-ordered groups // Algebra Univ. – 1972. – V.2. – P. 247-254.
5. Вараксин С.В. О свободных m -группах и свободных m -произведениях // Изв. Алт.ГУ. – 2013. – № 1. – С.16-18.

Коммутативность ассоциативных колец с автоморфизмами

Д. С. Григорьев

*Алтайский государственный педагогический университет,
г. Барнаул*

В статье приводятся условия коммутативности для ассоциативных колец с автоморфизмами.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, автоморфизм, теоремы коммутативности.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Биективное отображение $f: R \rightarrow R$ называется автоморфизмом кольца R , если для всех $x, y \in R$ выполняется:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

Центром кольца R называется множество $\text{Cent } R = \{x \in R | (\forall y \in R) xy = yx\}$. Очевидно, что $\text{Cent } R$ является подкольцом в R .

В работе [1] исследуется коммутативность ассоциативного кольца с единицей, удовлетворяющего условию $\alpha(x^{n+1}) + \beta(x^n) \in \text{Cent } R$, где α, β – автоморфизмы R . Исследования продолжаются в работах [2, 3]. В [4] приведены условия, при которых кольцо R , удовлетворяющее условию $\alpha(x^{n+2}) + \beta(x^{n+1}) + \gamma(x^n) \in \text{Cent } R$.

В настоящей работе, исследован вопрос коммутативности ассоциативного кольца R с единицей, удовлетворяющего одному из условий: $\alpha(x) + \beta(x^{2n}) \in \text{Cent } R$ и $\alpha(x^2) + \beta(x^{2n+1}) \in \text{Cent } R$, α, β – автоморфизмы R , n – фиксированное целое, причем $n > 1$. Доказана справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, α, β – автоморфизмы R , n – целое положительное число и для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x^2) + \beta(x^{2n+1}) \in Z(R)$. Тогда $4x \in \text{Cent } R$.

Лемма 2. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, α, β – автоморфизмы R , n – целое положительное число и для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x) + \beta(x^{2n}) \in Z(R)$. Тогда $2x \in \text{Cent } R$.

При помощи этих утверждений доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, α, β – автоморфизмы R для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x^2) + \beta(x^9) \in Z(R)$. Тогда R коммутативно.

Теорема 2. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1 , α, β – автоморфизмы R для всех $x \in R$ выполняется условие $\alpha(x) + \beta(x^{10}) \in Z(R)$. Тогда R коммутативно.

Библиографический список

1. Khan, M.A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms / M.A. Khan // *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*. – 2006. - №2, v. 1. – 119-126.
2. Кислицин, А.В. О гипотезе Мохаррама Хана / А.В. Кислицин // МАК-2008 : материалы одиннадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул : Изд-во Алт. Ун-та, 2008. – С. 11–12.
3. Кислицин, А.В. О коммутативности ассоциативных колец, удовлетворяющих тождествам / А.В. Кислицин, Ю.Н. Мальцев // *Известия Алтайского государственного университета*. – 2009. – №1(61). – С.50-53.
4. Кислицин, А. В. Обобщение гипотезы Мохаррама Хана / А. В. Кислицин, Ю. А. Павлюк // *Сборник трудов Всероссийской конференции по математике МАК-2017*. – Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 16–17.

Сжатые графы делителей нуля некоторых колец матриц

Е.В. Журавлев¹, А.С. Монастырева¹, А.А. Просвирина¹
¹АлтГУ, г. Барнаул

В работе построен сжатый граф делителей нуля кольца матриц

$$A_{p^2, j} = \begin{matrix} & & & \text{j-й столбец} \\ & & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \square_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \square_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \square_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \square_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \square_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ключевые слова: *граф делителей нуля, конечное кольцо.*

Пусть R – произвольное кольцо. Пусть $D(R)$ – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца R и $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$. Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$:

$$\forall x, y \in D(R)^*: x \sim y \Leftrightarrow l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y).$$

Пусть $[x]$ – класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Для любых $a \in [x]$, $b \in [y]$, $x, y \in D(R)^*$, очевидно, что $ab = 0$ или $ba = 0$ тогда и только тогда, когда $xu = 0$ или $yx = 0$.

Через $\Gamma(R)$ обозначим граф, множеством вершин которого является $\{[x]; x \in D(R)^*\}$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xu = 0$ или $yx = 0$. Граф $\Gamma(R)$ будем называть сжатым графом делителей нуля кольца R . Свойства и примеры таких графов приведены в [1].

И. Божич и З. Петрович в [2] исследовали графы делителей нуля кольца квадратных матриц над конечным полем. Так же исследования по графам делителей нуля представлены в работе [3]. Вопрос о

строении графа делителей нуля колец матриц над локальными кольцами, в частности \mathbb{F}_{p^2} над остается открытым.

Пусть

$$O(A_{p^2, j}) = \begin{array}{c} \text{j-й столбец} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-я строка;} \end{array}$$

$$pA_{p^2, j} = \begin{array}{c} \text{j-й столбец} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p\mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p\mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p\mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p\mathbb{F}_{p^2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-я строка;} \end{array}$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(j-1)j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{jj} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(j+1)j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где α_{jj} делится на p , $\alpha_{jj} \neq 0$, и $\exists j = \overline{1, n}$ такое, что α_{ij} не делится на p ;

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(j-1)j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{jj} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(j+1)j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где α_{jj} не делится на p .

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение сжатого графа $\Gamma_{\sim}(A_{p^2, j})$.

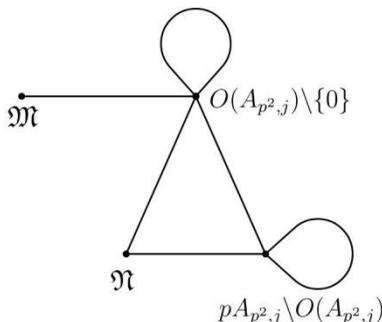


рис. 1

Библиографический список

1. Журавлев Е. В. Монастырева А. С. Сжатые графы делителей нуля конечных ассоциативных колец // Сиб. матем. журн. – 2020. – 61:1. – С. 96–106.
2. Bozic I., Petrovic Z. Zero-Divisor Graphs of Matrices Over Commutative Rings // Communications in Algebra. – 2009. – V. 37. – P. 1186 - 1192.
3. Pirzada S., Aijaz M., Imran Bhat M. On zero divisor graphs of the rings \square_n // Afr. Mat. – 2020. – V. 31. – P. 727–737.

Условия конечной базисуемости тождеств мультипликативных векторных пространств

А.В. Кислицин

*Омский государственный университет
им. Ф.М. Достоевского, г. Омск; Алтайский
государственный педагогический университет, г. Барнаул*

В работе приводятся достаточные условия, влекущие конечную базисуемость тождеств мультипликативных векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры над бесконечным полем.

Ключевые слова: мультипликативное векторное пространство, тождество мультипликативного векторного пространства, L -многообразие, базис тождеств, шпехтовость,

Пусть F – бесконечное поле, $F\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F от множества свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, E – векторное пространство над полем F , являющееся подпространством ассоциативной F -алгебры A , причем A порождается пространством E как F -алгебра. В этом случае будем говорить, что E вложено в алгебру A и рассматривать пару (A, E) .

Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных элементов пространства E . В этом случае также говорят о тождестве пары (A, E) .

Множество $G \subseteq F\langle X \rangle$ называется базисом тождеств пространства E , если все тождества E следуют из G . Если для пространства E существует конечный базис тождеств G , то E называют конечно базисуемым (КБ-пространством). В противном случае говорят, что пространство E бесконечно базисуемо или не конечно базисуемо (НКБ-пространство).

Стоит отметить, что для пары (A, E) конечная базисуемость тождеств обертывающей алгебры A не влечет конечную базисуемость тождеств пространства E , даже если A и E совпадают как множества. Так, алгебра $A = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F \oplus \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над бесконечным полем F имеет конечный базис тождеств. При этом мультипликативное векторное пространство $E = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F \oplus \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ является НКБ-пространством [1].

Для изучения конечной базисуемости тождеств мультипликативных векторных пространств представляет интерес

поиск условий, влекущих конечную базисуемость тождеств этих пространств. Например, любое мультипликативное векторное пространство, удовлетворяющее тождеству нильпотентности, будет являться КБ-пространством [2]. Всякое пространство над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$ также будет иметь конечный базис тождеств [3]. Отметим, что если мультипликативное векторное пространство удовлетворяет одному из этих тождеств, то оно также удовлетворяет тождеству $St_3(x, y, z) = 0$, где $St_3(x, y, z)$ – стандартный многочлен третьей степени.

В настоящей работе получены новые условия, влекущие конечную базисуемость тождеств векторных пространств.

Теорема 1. Векторное пространство E над бесконечным полем F , вложенное в ассоциативную A -алгебру и удовлетворяющее либо тождествам $[x, y]zt = 0$ и $St_3(x, y, z) = 0$, либо тождествам $xy[z, t] = 0$ и $St_3(x, y, z) = 0$ имеет конечный базис тождеств.

Поскольку всякое двумерное пространство удовлетворяет тождеству $St_3(x, y, z) = 0$, то имеет место следствие.

Следствие. Двумерное векторное пространство E над бесконечным полем F , вложенное в ассоциативную A -алгебру и удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$ имеет конечный базис тождеств.

Отметим, что векторное пространство, вложенное в ассоциативную алгебру и удовлетворяющее тождествам $x[y, z]t = 0$ и $St_3(x, y, z) = 0$ может не иметь конечного базиса тождеств [1].

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E , будем называть L -многообразием, порожденным пространством E , и обозначать $Var_L E$. Если G – базис тождеств E , то будем писать: $Var_L E = Var_L \langle g = 0 \mid g \in G \rangle$.

L -многообразие \mathcal{M} называется шпехтовым, если любое векторное пространство $V \in \mathcal{M}$ имеет конечный базис тождеств. При помощи введенных определений теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. L -многообразия $\mathcal{M}_1 = Var_L \langle [x, y]zt = 0, St_3(x, y, z) = 0 \rangle$ и $\mathcal{M}_2 = Var_L \langle xy[z, t] = 0, St_3(x, y, z) = 0 \rangle$ мультипликативных векторных пространств над бесконечным полем F являются шпехтовыми.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00745).

Библиографический список

1. Кислицин А. В. О тождествах пространств линейных преобразований над бесконечным полем // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – № 1-2 (65). – С. 37–41.
2. Кислицин А. В. О шпехтовости L -многообразий векторных пространств // Алгебра и логика. – 2017. – Т. 56. – № 5. – С. 548–558.
3. Кислицин А. В. О шпехтовости L -многообразий векторных пространств над произвольным полем // Алгебра и логика. – 2018. – Т. 57. – № 5. – С. 556–566.

О некоторых свойствах класса Леви, порожденного квазимногообразием 3-ступенно нильпотентных групп

В.В. Лодейщикова

*Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

В статье рассматриваются некоторые свойства класса Леви квазимногообразия, порожденного свободной 3-ступенно нильпотентной группой ранга 2.

Ключевые слова: *квазимногообразие, класс Леви, нильпотентная группа.*

Класс $L(M)$, состоящий из всех групп G , в которых нормальное замыкание $(x)^G$ каждого элемента $x \in G$ принадлежит классу групп M , называется классом Леви, порожденным M .

Классы Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп исследовались в работах [1-9]. В работах [4-7] описаны классы Леви почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп.

Введем некоторые обозначения: qK – квазимногообразие, порожденное классом групп K (если $K=\{G\}$, то пишем qG), $F_2(N_3)$ – свободная группа ранга 2 в многообразии нильпотентных групп степени не выше 3.

Утверждение 1. Любая 4-ступенно нильпотентная группа G , принадлежащая классу $L(qF_2(N_3))$ является 3-энгелевой.

Утверждение 2. Любая 2-порожденная 4-ступенно нильпотентная группа G , принадлежащая классу $L(qF_2(N_3))$, является нильпотентной степени не выше 3.

Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сиб. матем. журн. – 1999. – №2 (10). – С. 266–270.
2. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – №6 (39). – С. 635–647.
3. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2000. – №2 (41). – С. 270–277.
4. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2009. – №1 (61). – С. 26–29.

5. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2010. – №6 (51). – С. 1359–1366.

6. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – №1 (50). – С. 26–41.

7. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порождённом квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. – 2019. – №4 (58). – С. 327–336.

8. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. – 2018. – №5 (57). – С. 587–600.

9. Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. – 2021. – №5 (60). – С. 510–524.

Построение таблицы характеров группы диэдра порядка 22

В.А. Логвиненко¹, А.Е. Афанасьева¹, Е.О. Шумакова¹

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

Статья посвящена исследованию основных понятий теории представлений, а также построению таблицы характеров группы диэдра D_{22} .

Ключевые слова: *характер, таблица характеров, сопряженные классы, группа диэдра, теория представлений.*

Теория представлений позволяет расширить основные понятия алгебры и реализовать учебно-исследовательские проекты студентов по актуальным направлениям современной алгебры [1, 2]. Основную роль в теории представлений групп играет понятие характера. Характером представления φ группы G называется функция χ^φ , сопровождающая каждому элементу g группы G след матрицы $\varphi(g)$.

Лемма 1. Характер χ^φ представления φ группы G является классовой функцией, т.е. значения χ^φ на сопряженных элементах группы G совпадают.

В данной работе рассмотрим группы диэдра $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1} \rangle$ порядка $2n$, $\langle b \rangle$ – максимальная циклическая подгруппа D_{2n} порядка n [3].

Диэдральную группу рассматривают по-разному. Например, можно определить ее как группу симметрии правильного n -угольника, либо как группу вращений этой же геометрической фигуры.

Обозначим число элементов группы G через n , число классов сопряженных элементов через k и степени неприводимых представлений G соответственно через n_0, n_1, \dots, n_k . Степень регулятивного представления равна n . Поскольку регулятивное представление эквивалентно сумме n_1 представлений, эквивалентных первому неприводимому представлению, плюс n_2 представлений, эквивалентных второму, и т.д., и при сложении представлений их степени складываются, должно иметь место равенство [4]:

$$n = n_0^2 + n_1^2 + \dots + n_k^2.$$

Поставив каждому элементу группы в соответствие число 1, мы получим тривиальное неприводимое представление степени 1, которым обладает каждая группа (в том числе и группа диэдра).

Понимая под n_0 степень именно этого единичного представления, можно переписать формулу в другом виде:

$$n = 1 + n_1^2 + \dots + n_k^2, \quad (1)$$

где n_1, \dots, n_k означают теперь степени нетривиальных неприводимых представлений.

Найдем классы сопряженных элементов у группы D_{2n} . Общее их количество при нечетном n равно $\frac{n+3}{2}$, а при четном n оно равно $\frac{n}{2} + 3$.

Рассмотрим группу диэдра D_{22} , где $n = 11$. В общем виде эта группа выглядит следующим образом:

$$D_{22} = \langle a, b | a^2 = b^{11} = 1, aba = b^{-1} \rangle$$

Согласно лемме 1 число характеров группы D_{22} равно числу ее сопряженных классов (7 сопряженных классов).

$$\{e\}, \{b, b^{10}\}, \{b^2, b^9\}, \{b^3, b^8\}, \{b^4, b^7\}, \{b^5, b^6\}, \\ \{a, b^9a, b^7a, b^5a, b^3a, ba, b^{10}a, b^8a, b^6a, b^4a, b^2a\}.$$

Найдем порядки неприводимых представлений согласно формуле (1): $22 = 1 + n_1^2 + \dots + n_6^2$, тогда $n_1^2 + \dots + n_6^2 = 21$. Данное равенство выполняется только при $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2, n_5 = 2, n_6 = 2$.

Чтобы найти линейные характеры ψ_s нужно отыскать все возможные варианты по соотношениям ортогональности [5].

Лемма 2. Пусть χ и ψ – характеры из $Irr(G)$. Тогда

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X(G)} |x^G| \cdot \chi(x) \cdot \psi(x^{-1}) = \delta_{\chi, \psi} = \begin{cases} 1, & \chi = \psi, \\ 0, & \chi \neq \psi. \end{cases}$$

где $\text{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G

Так как $\delta_{\chi, \psi} = 0$ (при различных характерах χ, ψ), то умножим левую и правую часть равенства на $|G|$. Полагая, что для тривиального представления ψ для всех элементов значения характеров равны единице, т.е. $\psi(x^{-1}) = 1$, получаем формулу для отыскания линейных характеров ψ_s диэдральной группы:

$$\sum_{x \in X(G)} |x^G| \cdot \chi(x) = 0.$$

Для поиска не линейных характеров χ_k используем теорему (47.8) и следствие (47.15) из [6]. Всего для группы диэдра D_{2n} с нечетным n существует 2 линейных представления и n представлений порядка 2, матрицы которых имеют вид:

$$\varphi_i(b) = \begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}, \varphi_i(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где ζ – первообразный корень n -ой степени из 1.

Обозначим неприводимые характеры и запишем в таблицу 1.

Таблица 1 – Таблица характеров группы диэдра для $n = 2m + 1$

$ x^G $	1	2	n
	1	b^j	a
ψ_0	1	1	1
ψ_1	1	$\psi_1(b^j)$	$\psi_1(a)$
χ_k	2	ω_{kj}	0

где $k, j \in \{1, \dots, m\}$, $\omega_{kj} = 2 \cos \frac{2\pi kj}{n}$;

Далее найдем характеры порядка 2. По таблице 1 $\chi_k(a)$ равны нулю, то есть $\chi_{2,3,4,5,6}(a) = 0$. Общая формула для $\chi_k(b^j)$ имеет вид: $\chi_k(b^j) = \omega_{kj}$.

И теперь осталось подставить соответствующие значения:

$$\chi_2(b) = 2 \cos \frac{2\pi}{11} = \omega_1, \quad \chi_3(b) = 2 \cos \frac{4\pi}{11} = \omega_2, \quad \chi_4(b) = 2 \cos \frac{6\pi}{11} = \omega_3,$$

$$\chi_5(b) = 2 \cos \frac{8\pi}{11} = \omega_4, \quad \chi_6(b) = 2 \cos \frac{10\pi}{11} = \omega_5.$$

Найдем линейные характеры, используя лемму 2:

$$\psi_1(a) = -1, \quad \psi_1(b^j) = 1.$$

Мы нашли все характеры. Далее заполним таблицу 2.

Таблица 2 – Таблица характеров для группы диэдра D_{22}

$ x^G $	1	11	2	2	2	2	2
	1	a	b	b^2	b^3	b^4	b^5
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	1	1	1
χ_2	2	0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
χ_3	2	0	ω_2	ω_4	$-\omega_5$	$-\omega_3$	$-\omega_1$
χ_4	2	0	ω_3	$-\omega_5$	$-\omega_2$	ω_1	ω_4
χ_5	2	0	ω_4	$-\omega_3$	ω_1	ω_5	$-\omega_2$
χ_6	2	0	ω_5	$-\omega_1$	ω_4	$-\omega_2$	ω_3

где $\omega_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{11}$, $\omega_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{11}$, $\omega_3 = 2 \cos \frac{6\pi}{11}$, $\omega_4 = 2 \cos \frac{8\pi}{11}$
и $\omega_5 = 2 \cos \frac{10\pi}{11}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» по договору НИР заявка ШК-04-2022/21 от 18.04.2022 г.

Библиографический список

1. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" // Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 5. – С. 45.

2. Шумакова Е.О. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 частях. Под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – 2018. – С. 132-136.
3. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14. – № 4. – С. 172-184.
4. Беллман, Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
5. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Т 5. – С. 691-698.
6. Кэртис, Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668 с.

**О классах Леви квазимногообразий
2-ступенно нильпотентных групп
с периодической частью экспоненты p^{s-1}**

С.А. Шахова

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть p – простое число, $p \neq 2$, s – натуральное число, $s \geq 2$, и N^{p^s} – класс всех 2-ступенно нильпотентных групп с коммутантом экспоненты p и содержащейся в центре группы периодической частью экспоненты p^{s-1} , в которых из произвольного нетривиального коммутатора не извлекается корень степени p .

В работе доказано, что класс Леви, порождённый произвольным содержащим циклическую группу порядка p^{s-1} неабелевым подквазимногообразием квазимногообразия N^{p^s} , совпадает с классом Леви, порождённым квазимногообразием N^{p^s} .

Ключевые слова: *квазимногообразия, нильпотентная группа, класс Леви.*

Классом Леви, порождённым классом групп M , называется класс групп $L(M)$, состоящий из всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle a \rangle^G$ каждого элемента a из группы G принадлежит M , т.е.

$$L(M) = \{G \mid \langle a \rangle^G \in M \forall a \in G\}.$$

Понятие класса Леви, позволяющее изучать влияние свойств подгрупп на строение самой группы, возникло под влиянием работы [1], в которой исследовались группы G с абелевыми нормальными замыканиями вида $\langle a \rangle^G$.

Классы Леви, порождённые квазимногообразиями групп, впервые исследовались в [2]. Было доказано, что если класс групп M является квазимногообразием, то $L(M)$ – также квазимногообразие групп. В этой работе было положено начало исследованию квазимногообразий Леви, порождённых квазимногообразиями нильпотентных групп.

Зафиксируем простое число p , $p \neq 2$, и натуральное число s , $s \geq 2$. Введём следующие обозначения:

N^{p^s} – класс всех 2-ступенно нильпотентных групп с коммутантом экспоненты p и содержащейся в центре группы периодической частью экспоненты p^{s-1} , в которых из произвольного нетривиального коммутатора не извлекается корень степени p , т.е. N^{p^s} – это

квазимногообразии групп, заданное в классе всех групп следующими тождествами и квазитожествами:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) ([x, y, z] = 1), \quad (1)$$

$$(\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1), \quad (2)$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y] = 1), \quad (3)$$

$$(\forall x)(x^{p^s} = 1 \rightarrow x^{p^{s-1}} = 1), \quad (4)$$

$$(\forall x)(x^q = 1 \rightarrow x = 1), \quad (5)$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^p = [y, z] \rightarrow [y, z] = 1), \quad (6)$$

где q пробегает множество простых чисел, $q \neq p$;

M^{p^s} – квазимногообразии групп, заданное в классе всех групп квазитожествами (4), (5), а также формулами

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z, t] = 1),$$

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), \quad (7)$$

$$(\forall x)(\forall y)([x, y]^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y, x] = 1),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, z]^p = [x, y, x] \rightarrow [x, y, x] = 1); \quad (8)$$

H_p – группа, имеющая в многообразии 2-ступенно нильпотентных групп, определяемом в классе всех групп тождеством (1), следующее представление:

$$H_p = \langle x, y; [x, y]^p = 1 \rangle;$$

$Z_{p^{s-1}}$ – циклическая группа порядка p^{s-1} ;

qS – квазимногообразии, порождённое классом групп S . Будем писать qG вместо $q\{G\}$, если S состоит из одной группы G .

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть K – неабелево квазимногообразии групп, $K \subseteq N^{p^s}, Z_{p^{s-1}} \in K$. Тогда $L(K) = M^{p^s}$.

Следствие 1. $L(N^{p^s}) = M^{p^s}$.

Следствие 2. $L(q\{H_p, Z_{p^{s-1}}\}) = M^{p^s}$.

В частности, при $s = 2$ из следствия 2 получаем, что верно равенство $L(qH_p) = M^{p^2}$, которое ранее было доказано в [3]. Кстати, при $s = 2$ квазитожество (6) является следствием квазитожеств (2), (4) и может быть исключено из списка квазитожеств, определяющих

квазимногообразии N^{p^2} , а квазитожество (8) является следствием квазитожеств (4), (7) и может быть исключено из списка квазитожеств, определяющих квазимногообразии M^{p^2} .

Заметим, что квазимногообразии N^{p^s} является подквазимногообразиием квазимногообразия K^{p^s} , определяемого в классе всех групп формулами (1) – (3). В [4] найден список квазитожеств, которыми задаётся класс Леви $L(K^{p^s})$. Этот результат был существенным образом использован при доказательстве теоремы 1.

Библиографический список

1. Levi F.V. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // Journal of Indian Mathematical Society. – 1942. – № 6. – С. 87–97.
2. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – № 2 (40). – С. 266–270.
3. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – № 6 (51). – С. 1359–1366.
4. Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. – 2021. – № 5 (60). – С. 497–509.

СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 514.765

О размерности пространства конформно-киллинговых полей на симметрических лоренцевых многообразиях порядка 2

Т.А. Андреева¹, Д.Н. Оскорбин¹, Е.Д. Родионов¹

¹*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию конформно киллинговых векторных полей на 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Конформно киллинговы поля играют важную роль в исследовании группы конформных преобразований многообразия, теории солитонов Риччи, а также порождают важный класс локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий. В настоящее время наиболее подробно они изучены в случаях $k = 2, 3$ Д.В.Алексеевским, А.С.Галаевым и другими.

Ключевые слова: *конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k - симметрические пространства, солитоны Риччи.*

Псевдориманово многообразии (M, g) называется симметрическим порядка k , если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R - тензор кривизны (M, g) , а ∇ - связность Леви-Чивиты.

Заметим, что лоренцевы k -симметрические пространства существуют при всех $k \geq 2$. Отметим также, что неразложимые 2-симметрические лоренцевы многообразия являются пространствами Кахена-Уоллаха SW_d^{n+2} при $d = 1$.

Локально неразложимые 1-симметрические лоренцевы многообразия описаны Кахеном и Уоллахом в [1], 2-симметрические лоренцевы многообразия исследованы в работах [2 - 4]. Отметим, что они являются многообразиями Уокера [5, 6].

Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_K g = f(p)g$, где $L_K g$ - производная Ли метрического тензора вдоль поля K , $p \in M$, а $f(p)$ - гладкая вещественная функция на многообразии. полем Киллинга, и киллинговым если выполняется равенство $L_K g = 0$.

Из теоремы Ву (см. [7]) следует, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия (M_1, g_1) и локально неразложимого лоренцева многообразия (M_2, g_2) . Все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия предполагаются локально неразложимыми.

С помощью теоремы А.С. Галаева и Д.В. Алексеевского (см. [2]) в окрестности любой точки M можно выбрать систему локальных координат (v, x^i, u) , где $1 \leq i \leq n-2$, где (M, g) – неразложимое 2-симметрическое лоренцево n -мерное многообразие, такую, что.

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n-2} d(x^i)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n-2} H_{ij0} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n-2} (x^i)^2 u H_{ii1} \right) du^2, \quad (1)$$

где H_{ii1} – ненулевые действительные числа, а $H_{ij0} = H_{jio}$ – произвольные константы.

Перейдем к анализу уравнения конформно киллингова поля. Зафиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим уравнение $L_K g = f g$ в локальных координатах (1). Согласно результатам работы [8] гладкая функция f зависит только от переменной u , поэтому можем положить $f = \frac{dF(u)}{du}$ для некоторой функции $F(u)$. Обозначим координаты векторного поля K через $V(v, x^i, u)$, $X_i(v, x^i, u)$, $U(v, x^i, u)$ (V, X_i, U – гладкие функции),

$H = \sum_{i,j=1}^{n-2} H_{ij0} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n-2} (x^i)^2 u H_{ii1}$, тогда получим систему уравнений конформно киллинговых для векторных полей в локальных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx^i} + \frac{dX_i}{dv} &= 0; & \frac{dX_i}{dx^j} + \frac{dX_j}{dx^i} &= 0; \\ -f + 2 \frac{dX_i}{dx^i} &= 0; & -f + \frac{dU}{du} + \frac{dV}{dv} &= 0; \\ H \cdot \frac{dU}{dx^i} + \frac{dX_i}{du} + \frac{dV}{dx^i} &= 0; & 2 \frac{dU}{dv} &= 0; \\ -f \cdot H + 2 \frac{dU}{du} \cdot H + 2 \frac{dV}{du} + \sum_{i=1}^{n-2} \left(X_i \cdot \frac{dH}{dx^i} \right) + U \cdot \frac{dH}{du} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим все уравнения, кроме последнего. Из них, следуя рассуждениям работы [9], получаем:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-2} \end{pmatrix} = \frac{dF(u)}{du} \begin{pmatrix} x^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x^{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \dots & C_{1(n-2)} \\ -C_{12} & 0 & \dots & C_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{1(n-2)} & -C_{2(n-2)} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \\ \vdots \\ b_{n-2}(u) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$U = F(u),$$

$$V = - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{db_i(u)}{du} x^i - \frac{1}{4} \frac{d^2 F(u)}{du^2} \sum_{i=1}^{n-2} (x^i)^2 + C_{nn}.$$

где C_{ij} - произвольные константы, а $b_i(u)$ - гладкие функции.

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение (2), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{dF(u)}{du} \left(\sum_{i=1}^{n-2} H_{ii1} u (x^i)^2 + \sum_{i,j=1}^{n-2} H_{ij0} x^i x^j \right) - \\ & \frac{1}{2} \frac{d^3 F(u)}{du^3} \sum_{i=1}^{n-2} (x^i)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{d^2 b_i(u)}{du^2} x^i + F(u) \sum_{i=1}^{n-2} H_{ii1} (x^i)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} x^1 + C_{12} x^2 + C_{13} x^3 + \dots + C_{1(n-2)} x^{n-2} + b_1(u) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(2H_{111} u x^1 + \sum_{i=1}^{n-2} 2H_{1i0} x^i \right) + \\ & + \left(-C_{12} x^1 + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} x^2 + C_{23} x^3 + \dots + C_{2(n-2)} x^{n-2} + b_2(u) \right) \\ & \quad \cdot \left(2H_{221} u x^2 + \sum_{i=1}^{n-2} 2H_{2i0} x^i \right) + \dots + \\ & + \left(-C_{1(n-2)} x^1 - C_{2(n-2)} x^2 - C_{3(n-2)} x^3 + \dots + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} x^{n-2} + b_{n-2}(u) \right) \\ & \quad \cdot \left(2H_{(n-2)(n-2)1} u x^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} 2H_{(n-2)i0} x^i \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Вид конформного множителя $f(p)$ в уравнении конформного уравнения Киллинга $L_X g = f(p)g$ зависит от того, является ли метрика конформно плоской. Благодаря чему прямой подстановкой в компоненты тензора Вейля доказывается следующая лемма.

Лемма 1. Равенство тензора Вейля метрики (1) нулю $W = 0$ равносильно условиям, что все H_{ii1} равны, все H_{iio} равны, а при $i \neq j$ $H_{ij0} = 0$.

С ее использованием нами была доказана

Теорема 1. Пусть M - 2-симметрическое n -мерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой (1), тензор Вейля которого не равен 0. Тогда конформный множитель $f(p)$ конформного аналога уравнения Киллинга $L_X g = f(p)g$ постоянен.

Заметим, что в нашем случае любые два конформно киллингова векторных поля отличаются на киллингово. Поэтому для описания всех конформно киллинговых полей достаточно использовать общий вид киллингова поля и любое частное конформно киллингово векторное поле.

Лемма 2. Векторное поле с координатами

$$U = 0$$

$$X_i = \frac{1}{2} x^i \frac{dF(u)}{du}$$

$$V = v \frac{dF(u)}{du} + c$$

удовлетворяет конформному аналогу уравнения Киллинга $LXg = f(p)g$ на 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с метрикой (1).

Используя приведенное выше частное решение конформного аналога уравнения Киллинга и один из результатов Д.Н. Оскорбина и Е.Д. Родионова в [10], получаем:

Теорема 2. Пусть X - конформно киллингово векторное поле с координатами $V(v, x^i, u)$, $X_j(v, x^i, u)$, $U(v, x^i, u)$ (V, X_j, U - гладкие функции), $j = 1, 2, \dots, n - 2$), на 2-симметрическом n -мерном неразложимом лоренцевом многообразии M с метрикой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n-2} d(x^i)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n-2} H_{ij0} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n-2} (x^i)^2 u H_{ii1} \right) du^2,$$

где H_{ii1} - ненулевые действительные числа, а H_{ij0} - произвольные константы.

Тогда общее решение уравнения конформно киллингова поля имеет вид:

$$U = 0$$

$$X_i = b_i(u) + f_{ik} x^k + \frac{1}{2} x^i f(u)$$

$$V = -\dot{b}_i(u)x^i + vf(u) + c$$

где $c \in R$ - произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$, (f_{ik}) - постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с $A = (a_{ij})$, где $a_{ij}(u) = H_{ij0} + H_{ij1}u$. Размерность пространства конформно киллинговых полей не меньше $2(n - 1)$ и не больше $2(n - 1) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Библиографический список

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian symmetric spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 76.
2. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Physics. 2011. Vol. 61, N 12. P. 2331–2340.
3. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifold // Journal of the European Mathematical Society. 2013. Vol. 15.
4. Galaev A.S., Leistner T. Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry. /ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008
5. Walker A.G. On parallel fields of partially null vector spaces // Quart. J. Math., Oxford Ser. 1949. Vol. 20.
6. Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikčević S., Vázquez-Lorenzo R. The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics // Morgan & Claypool Publ. 2009.
7. Wu H. On the de Rham decomposition theorem // Illinois Journal of Mathematics. 1964. Vol. 8. Issue 2
8. Hall G.S. Conformal symmetries and fixed points in spacetime // J. Math. Phys., Vol. 31, No.5, May 1990
9. Blau M., O’Loughlin M. Homogeneous Plane Waves // Nuclear Physics. 2003. 654(1-2)
10. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci solitons and killing fields on generalized kahane–wallach manifolds // J. Siberian Mathematical Journal. Soc. 2019. V. 60. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.

Моделирование оптимального маршрута на основе сетей Штейнера

Е.А. Гилева¹, И.В. Пономарев¹

¹*АлтГУ, г. Барнаул*

Интерес к задаче Штейнера в настоящее время связан не только с самой математической проблемой, а и с большой актуальностью задачи для пространственной экономики и, в первую очередь, с проектированием оптимальных сетей по переносу вещества и энергии. Данная работа посвящена построению программного комплекса для получения оптимального транспортного пути между заданными точками.

Ключевые слова: *сеть Штейнера, решетка Ханана, транспортная сеть, математическое моделирование.*

В классическом виде задача Штейнера формулируется следующим образом: на плоскости есть конечное число точек, которые нужно соединить с системой отрезков с наименьшей общей длиной так, чтобы из всех точек по этим отрезкам можно было попасть в другую. Поиском решений данной задачи занимались такие известные ученые как П. Ферма, Э. Торричелли, Т. Симпсон, В. Ярник и О. Кесслер [1]. Существуют много алгоритмов решения данной задачи, но не один из них не является эффективным с точки зрения получения точного решения.

В основу нашего решения был положен алгоритм сетки Ханана. В геометрии сетка Ханана $H(S)$ получается ограниченным набором S точек на плоскости путем проведения вертикальных и горизонтальных линий через каждую точку.

1. Все множество вершин $x_i \in X$ с координатами (s_i, t_i) разбивается на классы $S_0, S_1 \dots S_m$ в порядке возрастания координаты S так, чтобы у всех вершин одного класса была одинаковая координата S_i .

2. Анализируется множество вершин класса S_0 и соединяется между собой прямой.

3. Образуется множество I , состоящее из вершин, включенных в деревья Штейнера и точек, принадлежащих построенной прямой.

4. Выбирается следующее множество, имеющее наименьшую координату. Для вершины $x_k \in |S_i + 1|$ определяется точка $x_j \in X$, для которой $d_{rj} = \min |d_{kg}|$ $x_g \in I$. Вершина X_k соединяется двухзвенной ломаной линией с точкой $x_j \in I$.

5. Для очередной вершины класса $S_i + 1$ операция подсоединения к дереву Штейнера выполняется в соответствии с пунктами 3, 4.

6. Пункты 3, 4, 5 повторяются для всех множеств S_j до построения полного дерева Штейнера.

Данный алгоритм относится к классу адаптивных алгоритмов с управляемой точностью решения и использованием параметрической адаптации к внешним условиям его выполнения: размерности задачи, ресурса времени, отведенном для выполнения проектной операции, а также быстродействия компьютера, на котором выполняется программа алгоритма, направлен на получение наиболее точного решения за отведенное время на основе выбора значения параметра адаптации [2].

Для написания программного комплекса будем использовать язык программирования Pure Basic, который предназначен для создания автономных консольных и графических приложений [3].

Поставим задачу построения оптимального маршрута между целевыми точками с просчетом времени и подсчет километража. В роли целевых точек выступали адреса магазинов, складов и постоянных покупателей одной из крупных торговых сетей г. Барнаула. Также были добавлены 50 связующих точек, указывающие на основные транспортные развязки. Точность построение маршрута напрямую зависит от количества связующих точек. Эти данные были перенесены на решетку Ханана (см. рисунок 1).

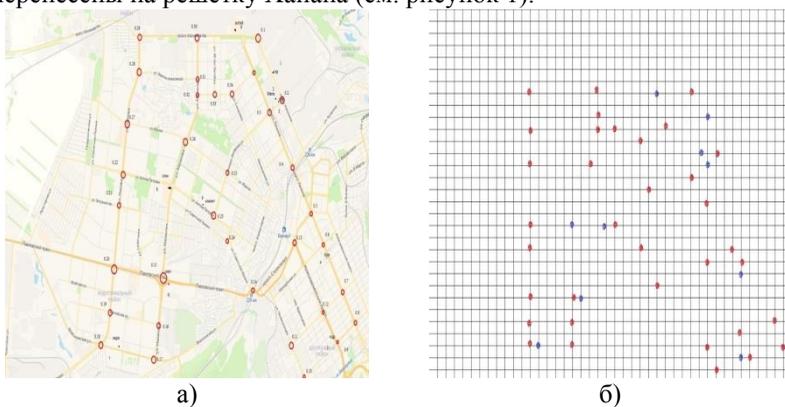


Рисунок 1 – Выбранные для моделирования целевые и связующие точки: а) на карте г. Барнаула; б) на решетке Ханана

Для вычисления нам понадобится широта и долгота каждой точки, чтобы результат приблизить к более достоверному. Эти данные мы записали в отдельном файле, пример записи:

Классификация функционалов Минковского в трехмерном цифровом пространстве

М.Е. Гнедко, Д.Н. Оскорбин

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена классификации функционалов Минковского в трехмерном цифровом пространстве на основе типов окрестности двумерного цифрового пространства. В работе выдвигается алгоритм нахождения функционалов Минковского трехмерного цифрового пространства, основанного на двумерном случае.

Ключевые слова: *цифровое пространство, воксель, тип связности, тип окрестности, локальные коэффициенты, эйлерова характеристика, функционалы Минковского.*

Структура неупорядоченного материала, например, масляного подшипника, полимерного композита и многого другого является бессвязной концепцией. Несмотря на это, ученые и инженеры просят предсказать свойства неупорядоченного материала на основе «структуры» его составляющей компоненты. Основной недостаток в понимании процессов, связанных со сложными материалами, является неспособность точно характеризовать микроструктуру. Спецификация структуры требует, как топологического, так и геометрического описания для характеристики связности и формы пространственной конфигурации [1].

Существует потребность в морфологических мерах, которые включают: корреляции более высокого порядка скорости и надежности характеристики морфологической структуры. Интегральная геометрия предоставляет подходящее семейство морфологических описаний, то есть описания функционалами Минковского. Эти меры воплощают в себе информацию из каждого порядка корреляционных функций, являются численно устойчивы даже для небольших образцов, независимы статистических допущений о распределении фаз, и получают как глобальную, так и локальную морфологическую информацию. Функционалы Минковского являются аддитивными мерами, позволяющими рассчитать эти эффективные меры путем простого суммирования их вклада. Меры основаны на характеристике Эйлера-Пуанкаре n -мерного пространства [1].

Таким образом, в изучении и моделировании пористых сред точным инструментом являются функционалы Минковского. На сегодняшний день это актуально и достаточно востребовано. Их используют в разрезах томографов черно-белого изображения любого реального объекта. Иными словами, функционалы Минковского играют все более заметную роль в приложениях благодаря тому, что могут быть использованы для эффективной оценки морфологии материалов [1-3].

Быстрота алгоритмов вычисления функционалов Минковского цифровых пространств обусловлена их эффективностью. Существуют линейные алгоритмы по числу пикселей или вокселей области рассматриваемого цифрового изображения в зависимости от пространства. Множество алгоритмов представлено для двумерных и трехмерных цифровых изображений, вычисления которых сводится к проходу по целочисленным вершинам и суммированию с весами, которые заранее посчитаны. Для четырехмерных цифровых изображений описано малое количество различных алгоритмов. Детальному описанию одного из алгоритмов практической реализации, посвящена предлагаемая статья [4].

В данной работе излагается алгоритм классификации типов окрестности, основанный на вычислении локальных коэффициентов и эйлеровой характеристики. Описанию функционалов Минковского трехмерного цифрового изображения и способам их вычисления посвящены работы [1, 3].

Алгоритм получает типы окрестностей трехмерного пространства путем наложения друг на друга двух плоскостей (типов окрестности двумерного пространства). В таком виде каждый тип окрестности представляется в виде трехмерного массива $2 \times 2 \times 2$. Затем вычисляется объем, площадь поверхности и интегральная средняя кривизна, зависящая от типа связности, полученного вокселя. Полученный список типов окрестности сортируется относительно полученных локальных коэффициентов. После сортировки производится удаление повторяющихся типов относительно симметрии и смены ориентации. Заключительным этапом работы алгоритма является вычисление эйлеровой характеристики, которая также зависит от типа связности. Объем и площадь вычисляются путем нахождения «закрашенных» областей. Тогда как интегральная средняя кривизна и эйлерова характеристика требуют иного подхода. Все данные представляются в бинарном виде нулей и единиц. Идея алгоритма взята из источника [5].

В случае интегральной средней кривизны и эйлеровой характеристики необходимо учитывать тип связности. Для этого

необходимо наделить пространство собственной топологией элементарных кубов. Каждый элементарный куб обладает естественной топологией, как подмножество \mathbb{R}^3 . Задание топологии на всем пространстве зависит от того, какие кубы называются соседними. В трехмерном цифровом пространстве обычно рассматривают два возможных варианта указания какие кубы соседние [1-3]. Это 26-связность и 6-связность. Для 26-связного комплекса подразумевается, что у каждого вокселя есть ровно 26 соседей, в центр каждого из которых ведет непрерывный путь из центра исходного вокселя, не выходящий за пределы рассматриваемых двух соседей. Данный путь можно построить, связывая кубы между собой через грани, ребра и вершины. Тогда как для 6-связного комплекса характерно наличие соседей у куба только по граням. В таком случае, максимальное число соседей у любого вокселя будет равняться 6.

Итоговый вывод программы полностью совпадает с результатами, представленными в источниках [1, 3] для трехмерного цифрового изображения.

Библиографический список

1. С.Н. Arns, М.А. Knackstedt, К.Р. Mecke. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // *Colloids and Surfaces A*. – 2015. – Т.24. – С. 352–359.

2. С.Н. Arns, М.А. Knackstedt, W.V. Pinczewski, and К.Р. Mecke. Euler – Poincare’ characteristics of classes of disordered media // Cambridge University Press. – 2004.

3. Базайкин Я.В. Лекции по вычислительной топологии: Учебно – метод. Пособие. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – 57с.

4. Богоявленская О.А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений. – М.: Научно-исслед. вычислит. центр МГУ им. М.В. Ломаносова, 2020. – 170с.

5. Бондарь А.В., Гнедко М.Е., Оскорбин Д.Н. О задаче вычисления функционалов Минковского цифровых пространств малых размерностей // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию, 2022. № 7. – С. 4-8;

Исследование выполнено в рамках реализации программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет».

Задача об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника

А.В. Гринкевич¹, Д.Н. Оскорбин²

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию задачи об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника. Приводится основная теорема о картинной галерее, а также описание алгоритма поиска максимального паросочетания в двойственном графе выпуклого многогранника.

Ключевые слова: *вычислительная геометрия, задача об охране картинной галереи, максимальное паросочетание, алгоритм.*

Задача об охране картинной галереи является хорошо изученной задачей видимости в вычислительной геометрии [1], которая возникает в реальном мире как задача охраны интерьера художественной галереи минимальным числом охранников, наблюдающих за всеми ее залами. В вычислительной геометрии план галереи представлен в виде простого многоугольника, охранник – точкой внутри него.

С годами стали появляться новые модификации исходной задачи. В каких-то из вариантов изменениям подвергаются позиции охранников, других план картинной галереи.

В данной работе осуществляется переход к трехмерному случаю. План картинной галереи представлен в виде выпуклого многогранника, а охранник – точкой в вершине, также приводится доказательство основной теоремы, которая дает оценку наименьшего количества охранников для наблюдения за поверхностью многогранника. Область видимости охранника ограничена поверхностью многогранника. Необходимо оценить, какое наименьшее количество охранников иногда необходимо и всегда достаточно для наблюдения за всей поверхностью многогранника.

На сегодняшний день известен единственный нетривиальный результат для трехмерного случая, касающийся внешней видимости охранников.

Пусть дан выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 , V , E и F - количество его вершин, ребер и граней соответственно. Установим зависимость между F и минимальным числом охранников.

Дальнейшие результаты получены с помощью паросочетаний в двойственном графе многогранника. Нам понадобится следующая

теорема Нишизеки о размере максимального паросочетания в плоских графах.

Лемма (Нишизеки) [2]. Если G – k -связный планарный ($k \geq 2$) граф на n вершинах, с минимальной степенью вершины $\delta \geq 3$ и $k \geq 2$, тогда для всех $n \geq 14$ количество ребер в максимальном паросочетании G больше или равно $\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$, а для всех $n < 14$ количество ребер равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Нишизеки получил много схожих результатов для различных значений δ и k , все из которых являются наилучшими (Нишизеки и Байбарс 1977; Нишизеки 1977 [3]). Далее, приведем доказательство теоремы о картинной галерее.

Теорема (Грюнбаум и О'Рурк, 1983). $\lfloor (2F - 4)/3 \rfloor$ вершинных охранников иногда необходимо и всегда достаточно, чтобы поверхность выпуклого многогранника из F граней ($F \geq 10$) находилась под присмотром.

Доказательство данной теоремы представлено в работе 4. Оно показывает, что рассматриваемую задачу можно свести к поиску максимального паросочетания в двойственном графе многогранника.

Для достижения цели применим алгоритм Эдмондса, вычислительная сложность которого составляет $O(n^3)$. Введем необходимые понятия.

Суть алгоритма Эдмондса состоит в сжатии циклов нечетной длины (при наличии) в исходном графе G в псевдо-вершину. Данная процедура называется сжатием цветка (под цветком понимается цикл нечетной длины). В полученном псевдо-графе \bar{G} ищется увеличивающаяся цепь, т.е. такая чередующаяся цепь, в которой первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию, с помощью обхода в ширину. После этого цветки разворачиваются. Таким образом осуществляется обратный переход к исходному графу и восстановление увеличивающейся цепи в нем. Псевдокод алгоритма представлен ниже.

```
edmonds_blossom_algorithm:
```

```
    количество паросочетаний равно 0
```

```
    for u in range(self.V):
```

```
        if текущая вершина не содержит смежную ей в паросочетании
```

```
            then строить путь
```

```
find_augmenting_path:
```

```
    обход в ширину:
```

```

v = текущая_вершина
  перебрать все рёбра из v
  if обнаружили цикл нечётной длины
  then сжать его
  if пришли в свободную вершину
  if пришли в несвободную вершину
  then добавить в очередь смежную ей в паросочетании.

```

Дальнейшие исследования будут посвящены оптимизации реализованного алгоритма.

Библиографический список

1. O'Rourke, Joseph. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press. — 1987.

2. T. Nishizeki, Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report — 1977. 3. T. Nishizeki, I. Baybars, Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs // Carnegie-Mellon tech. report — 1977.

4. O'Rourke, Joseph. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press. — 1987.

5. Balinski M. L. On the graph structure of convex polyhedral in n-space // Pacific Journal of Mathematics. — 1961. ов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 1–5 июля 2016 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 224–227.

Исследование выполнено в рамках реализации Программы поддержки научно-педагогических работников ФГБОУ «Алтайский государственный университет».

О тензорах кривизны полусимметрических связностей трехмерных метрических групп Ли

С.С. Калугина¹

¹АлтГУ, г. Барнаул

В статье найдены все направления, определяющие полусимметрическую связность, для которых тензор Риччи и тензор одномерной кривизны являются симметрическими на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.

Ключевые слова: полусимметрическая связность, тензор одномерной кривизны, тензор Риччи

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразии размерности n . Определим на данном многообразии полусимметрическую связность формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где ∇^g — связность Леви-Чивиты, X и Y — произвольные векторные поля, V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле. Связность ∇ является одной из основных связностей, изучаемых Э.Картаном [1].

Используя полусимметрическую связность, определим тензор кривизны R и тензор Риччи $ricc$ (псевдо)риманова многообразия (M, g) формулами:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$ricc(X, Y) = tr(U \rightarrow R(X, U)Y)$$

где $[\cdot; \cdot]$ — скобка Ли векторных полей.

Пусть далее $M=G$ – группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Фиксируем базис $\{e_i\}$ левоинвариантных векторных полей в G . Тогда вычислительные формулы для тензоров кривизны и Риччи будут иметь вид:

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad ricc_{ij} = R_{ijkt} g^{jk},$$

где $\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta^k$, $(\Gamma^g)_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}$, $(\Gamma^g)_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$, $\|g^{ks}\|$ — матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$

Определим тензор одномерной кривизны (или тензор Схоутена) как $A_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(ricc_{ij} - \frac{r g_{ij}}{2(n-1)} \right)$, где $r = g^{ij} ricc_{ij}$ — скалярная кривизна.

Заметим, что для полусимметрической связности тензор одномерной кривизны A_{ij} , вообще говоря, не симметричен на G . Кроме того, его симметричность равносильна симметричности тензора Риччи $ricc_{ij}$.

Рассмотрим случай размерности 3. Имеет место [2]

Теорема 1. Пусть G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда

1) Если G унимодулярная, то в алгебре группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид: $[e_1, e_2] = a_3 e_3$, $[e_1, e_3] = -a_2 e_2$, $[e_2, e_3] = a_1 e_1$.

2) Если G неунимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует ортонормированный $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид: $[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3$, $[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, $\alpha + \delta = 2$.

Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью. Используя приведенные выше формулы, определим компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = -\frac{v^2}{2} - \beta v - \mu^2 - v_1 \mu - \frac{\beta^2}{2} - \alpha^2 - v_1 \alpha - v_3^2 - v_2^2,$$

$$R_{12} = \frac{v_3 v}{2} - \frac{v_3 \beta}{2} + v_1 v_2,$$

$$R_{13} = -\frac{v_2 v}{2} + \frac{v_2 \beta}{2} + v_1 v_3,$$

$$R_{21} = \frac{v_3 v}{2} + \frac{v_3 \beta}{2} + v_2 \alpha + v_1 v_2,$$

$$R_{22} = \frac{v^2}{2} - \alpha \mu - v_1 \mu - \frac{\beta^2}{2} - \alpha^2 - 2v_1 \alpha - v_3^2 - v_1^2,$$

$$R_{23} = -\alpha v - \frac{v_1 v}{2} - \beta \mu - \frac{v_1 \beta}{2} + v_2 v_3,$$

$$R_{31} = \frac{v_2 v}{2} + v_3 \mu + \frac{v_2 \beta}{2} + v_1 v_3,$$

$$R_{32} = -\alpha v - \frac{v_1 v}{2} - \beta \mu - \frac{v_1 \beta}{2} + v_2 v_3,$$

$$R_{33} = -\frac{v^2}{2} - \mu^2 - \alpha \mu - 2v_1 \mu + \frac{\beta^2}{2} - v_1 \alpha - v_2^2 - v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи $ricc_{ij} - ricc_{ji} = 0$, которое в рассматриваемом случае примет вид

$$\begin{cases} v_3\beta + v_2\alpha = 0, \\ v_2\nu + v_3\mu = 0, \\ \alpha + \mu = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Из первого уравнения системы заключаем, что $\beta = \frac{v_2\alpha}{v_3} = \frac{v_2(\mu-2)}{v_3}$, а из второго имеем $\nu = -\frac{v_3}{v_2}\mu$, где $v_2v_3 \neq 0$.

Предположим теперь, что $v_2 = 0$. Тогда (1) примет вид

$$\begin{cases} v_3\beta = 0, \\ v_3\mu = 0, \\ \alpha + \mu = 2. \end{cases}$$

Откуда, очевидно следует, что либо $v_3 = 0$ и $\alpha = 2 - \mu$, либо $\mu = \beta = 0$ и $\alpha = 2$.

Будем считать теперь, что $v_3 = 0, v_2 \neq 0$. Тогда (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ v_2\nu = 0 \\ \alpha + \mu = 2. \end{cases}$$

Решением данной системы, очевидно является $\alpha = 0, \mu = 2, \nu = 0$.

Случай унимодулярной группы Ли G исследуется аналогично.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть G трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ . Тогда тензор одномерной кривизны A симметричен на G , если

- 1) G — унимодулярна, ∇ — связность Леви-Чивиты;
- 2) G — неунимодулярна, структурные константы алгебры Ли группы Ли G и направления V , определяющие полусимметрическую связность, исчерпываются следующим списком:

$$1) V = (v_1, v_2, v_3), v_2v_3 \neq 0, \alpha = 2 - \mu, \beta = \frac{v_2(\mu-2)}{v_3}, \nu = -\frac{v_3}{v_2}\mu.$$

$$2) V = (v_1, 0, 0), \alpha = 2 - \mu.$$

$$3) V = (v_1, v_2, 0), \alpha = 0, \mu = 2, \nu = 0.$$

$$4) V = (v_1, 0, v_3), \alpha = 2, \mu = 0, \beta = 0.$$

Отметим, что подобно случаю римановой метрики в работе изучен вопрос симметричности тензор Риччи, а значит и тензора одномерной кривизны, на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativit'e g'en'eralis'ee (deuxi'eme partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. V. 42.
2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups// Advances in mathematics. 1976. V.21. P. 293 – 329.

Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметрической связностью

П.Н. Клепиков¹, Е.Д. Родионов¹, О.П. Хромова¹

¹*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию инвариантных солитонов Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметрической связностью.

Ключевые слова: *солитоны Риччи, полусимметрическая связность, группы и алгебры Ли.*

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется *метрической связностью с векторным кручением* или *полусимметрической связностью* (с точностью до направления).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 1. [2] *Пусть (M, g) — риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда $d\pi = 0$, где 1-форма π , определяется равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M .*

Определение. Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется *солитоном Риччи*, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_P g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P , константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G$ — группа Ли, и поле P

левоинвариантно, то левоинвариантная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется *инвариантным солитоном Риччи*.

Определение. Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M, g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. Пусть (G, g, ∇) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ , отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

Замечание. В качестве примера приведем список всех нетривиальных инвариантных солитонов Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, связность которых отлична от связности Леви-Чивита:

Случай \mathcal{A}_1 :

$$\Lambda = (V^1)^2, V = (V^1, 0, 0), P = \left(\frac{V^1}{2}, 0, 0\right), \alpha_2 = \alpha_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} V^1 \neq 0.$$

Случай \mathcal{A}_2 :

$$\Lambda = 0, V = (0, -V^3, V^3), P = \left(\frac{(V^3)^2}{2}, -P^3, P^3\right), \alpha_1 = \alpha_2 = 0, V^3 \neq 0.$$

Случай \mathcal{A}_3 :

$$\Lambda = 0, V = (0, V^2, V^2), P = (0, P^2, P^2), \alpha_1 = 0, P^2 = -1 + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} (V^2)^2, V^2 \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Случай \mathcal{A}_4 :

$$1. \Lambda = V^3(1 - V^3 - \alpha_2), V = (0, 0, V^3), P = (0, 0, P^3), \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, V^3 = \pm \sqrt{1 + (\alpha_2)^2};$$

$$2. \Lambda = 2V^3 - 2, V = (0, 0, V^3), P = (0, 0, P^3), \alpha_2 = -1, V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), P^3 \neq 0;$$

$$3. \Lambda = 2V^3 - 2, V = (0, 0, V^3), P = (P^2, P^2, P^3), \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), P^3 \neq 0;$$

$$4. \Lambda = 2V^3 - 2, V = (0, 0, V^3), P = (-P^2, P^2, P^3), \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), P^3 \neq 0.$$

Для доказательства полученной классификации подробно рассмотрим случай \mathcal{A}_3 . В этом случае в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ (см. [3–5]) такой, что метрическая алгебра Ли удовлетворяет соотношениям

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3 .

Условие теоремы 1 имеет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^1 = 0, \alpha_1 V^3 + V^1 = 0, \alpha_1 V^1 + V^2 - V^3 = 0.$$

Так как связность ∇ не является связностью Леви-Чивита, то $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$. При этом система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned} P^1 = 0, 2 - V^2 - (V^2)^2 &= -P^2 - P^3, 2P^2 - 2P^3 = -\Lambda, \\ 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 &= \Lambda - 2P^2, \\ 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 &= -\Lambda + 2P^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Условие тривиальности солитона Риччи:

$$P^1 = 0, 2P^2 = \tau, -2P^3 = \tau, -2P^2 + 2P^3 = \tau, P^3 + P^2 = 0.$$

Решением системы уравнений (2) является следующий инвариантный солитон

$$\Lambda = 0, P^1 = 0, P^2 = P^3 = -1 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}(V^2)^2.$$

Непосредственной подстановкой, что найденный инвариантный солитон является тривиальным при $V^2 = -2$ или $V^2 = 1$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1925. – V. 42. – P. 17–88.
2. Barua B., Ray A.Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. – 1985. – V. 16, No 7. – P. 736–740.
3. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Siberian Advances in Mathematics. – 2007. – V. 17, No 3 – P. 186–212.
4. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. – 2007. – V. 57. – P. 1279–1291.
5. Cordero L.A., Parker P.E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. – 1997. – V. 17. – P. 129–155.

**О некоторых свойствах четырехугольника, вершины
которого являются замечательными точками
треугольника**

Ю.Н. Мальцев, Е.П. Петров

АлтГУ, г. Барнаул

Настоящая статья посвящена геометрии треугольника, в частности по изучению взаимного расположения вполне определенных замечательных точек неравностороннего треугольника – его ортоцентра, центра вписанной окружности, центра описанной окружности, точки Нагеля и центра тяжести. Доказано, что четырехугольник, составленный из первых четырех замечательных точек, является трапецией, диагонали которой пересекаются в центре тяжести; эта трапеция не является описанной около окружности; найдены необходимые и достаточные условия, при которых она является вписанной в окружность; трапеция не является ортодиагональной; найдена площадь трапеции, выраженная через параметры исходного треугольника.

Ключевые слова: *треугольник, трапеция, замечательная точка, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности.*

В последние десятилетия, как мы знаем, появилось достаточно много исследовательских работ по геометрии треугольника, в частности по изучению замечательных точек треугольника: описание их свойств, методов нахождения расстояний между замечательными точками треугольника и др. Возникает определенный интерес к конфигурации этих точек (см. [1]-[7]). Именно, какие имеются условия на взаимное расположение некоторых вполне определенных замечательных точек?

Рассмотрим неравносторонний треугольник ABC , где H, I, G, O, N – соответственно его ортоцентр, центр вписанной окружности, центр тяжести, центр описанной окружности и точка Нагеля.

С учетом фактов, изложенных в [1], [2], [8]-[10], имеют место следующие результаты:

Предложение 1. Четырехугольник $HNOI$ является трапецией, диагонали которой пересекаются в точке G , HN параллельна IO , HI не параллельна NO и угол $HIO > 90^\circ$.

Предложение 2. В трапеции $HNOI$ один из углов равен 90° тогда и только тогда, когда $p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2$, где p, r, R –

соответственно полупериметр, радиусы вписанной и описанной окружностей.

Предложение 3. Около трапеции $HNOI$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда $p^2 = 3R^2 + 8Rr - r^2$ и $R > \frac{8}{3}r$.

Предложение 4. В трапецию $HNOI$ нельзя вписать окружность, трапеция $HNOI$ не является ортодиагональной.

Теорема. Площадь трапеции $HNOI$ равна

$$S_{HNOI} = \frac{3}{4} \sqrt{4R(R - 2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2},$$

где p , r , R – соответственно полупериметр, радиусы вписанной и описанной окружностей.

Полученные результаты могут быть использованы при чтении различных курсов по олимпиадной математике, могут быть полезны учащимся старших классов и учителям гимназий с углубленным изучением математики.

Библиографический список

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М., Учпедгиз, 1962.
2. Мальцев Ю.Н., Монастырева А.С., Петров Е.П. Замечательные точки и неравенства в треугольнике. Барнаул, Изд-во АлтГУ, 2021.
3. Maltsev Yu.N., Monastyreva A.S. On some properties of triangle OIG // The teaching of Mathematics. – 2020. – Vol.23, № 2. – P. 102-108.
4. Мальцев Ю.Н., Монастырева А.С. О некоторых замечательных точках и отрезках в треугольнике // Известия Алт. гос. ун-та. – 2021. – № 1(117). – С. 106-111.
5. Andrica D., Barbu C. A geometric proof of Bludon's inequalities // Math.Inequal.Appl. – 2012. – Vol. 15, № 2. – P. 361-370.
6. Kimberling C. Central points and central lines in the plane of triangle // Math. Mag. – 1994. – Vol. 67. – P. 163-167.
7. Kimberling, C. Triangle centers and Central Triangles // Congr. Numer. – 1998. – Vol. 129. – P. 1-295.
8. Maltsev Yu.N., Monastyreva A.S. On triangles with sides that form an arithmetic progression // Известия Алт. гос. ун-та. – 2020. – № 1(111). – С. 111-114.
9. Мейдман С., Солтан В. Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинев, Изд-во «Штиинца», 1982.
10. Josefsson M. Characterizations of orthodiagonal quadrilaterals // Forum Geometricorum. – 2012. – Vol. 12. – P. 13-25.

О симметрических потоках Риччи трехмерных метрических групп Ли с полусимметрической связностью

А.А. Павлова,¹ Е.Д. Родионов¹, О.П. Хромова¹

¹*АлтГУ, г. Барнаул*

В настоящей работе исследуются симметрические потоки Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: *группы Ли, полусимметрическая связность, симметрический поток Риччи.*

Пусть M – риманово многообразие размерности n . Определим на M : однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2Ric(g(t))_{ij}, \quad (1)$$

где Ric — тензор Риччи многообразия M .

Замечание. Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном [1].

Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (2)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [2], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением.

Тензор кривизны R и тензор Риччи Ric связности ∇ задаются соответственно формулами:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$Ric(X, Y) = tr(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Поскольку тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим, то естественным является рассмотрение симметрического потока Риччи, т.е. потока вида

$$-2 \frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = Ric(g(t))_{ij} + Ric(g(t))_{ji}. \quad (3)$$

Пусть далее $M=G$ – трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в G существует базис Дж. Милнора [3] левоинвариантных векторных полей $\{E_1, E_2, E_3\}$ такой что

$$G = SU(2): \quad [E_1, E_2] = E_3, [E_2, E_3] = E_1, [E_3, E_1] = E_2.$$

$$G = SL(2, R): [E_1, E_2] = E_3, [E_2, E_3] = E_1, [E_3, E_1] = -E_2.$$

$$G = E(2): [E_1, E_2] = E_3, [E_2, E_3] = E_1.$$

$$G = E(1,1): [E_1, E_2] = -E_3, [E_2, E_3] = E_1.$$

$$G = Heis(3): [E_1, E_2] = E_3.$$

$$G = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}: [E_i, E_j] = 0, i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных римановых метрик

$$g(t) = A(t)(\theta^1)^2 + B(t)(\theta^2)^2 + C(t)(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ – кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$.

Изучим поток Риччи группы $SU(2)$. Для этого определим компоненты тензора Риччи метрики $g(t)$

$$Ric_{11} = \frac{2BC - C^2 - B^2 + A^2 - 2Av_3^2BC^2 - 2Av_2^2B^2C}{2BC},$$

$$Ric_{12} = -\frac{1}{2}Bv_3 + \frac{1}{2}Av_3 - \frac{1}{2}Cv_3 + Bv_2Av_1,$$

$$Ric_{13} = \frac{1}{2}Cv_2 - \frac{1}{2}Av_2 + \frac{1}{2}Bv_3 + v_1Av_3C,$$

$$Ric_{21} = \frac{1}{2}Av_3 - \frac{1}{2}Bv_3 + \frac{1}{2}Cv_3 + Bv_2Av_1,$$

$$Ric_{22} = -\frac{C^2 - 2AC - B^2 + A^2 + 2Av_3^2BC^2 + 2Bv_1^2A^2C}{2AC},$$

$$Ric_{23} = -\frac{1}{2}Cv_1 - \frac{1}{2}Av_1 + \frac{1}{2}Bv_1 + Bv_2v_3C,$$

$$Ric_{31} = -\frac{1}{2}Av_2 - \frac{1}{2}Bv_2 + \frac{1}{2}Cv_3 + v_1Av_3C,$$

$$Ric_{32} = \frac{1}{2}Bv_1 + \frac{1}{2}Av_1 - \frac{1}{2}Cv_1 + Bv_2v_3C,$$

$$Ric_{33} = -\frac{-2AB + B^2 - C^2 + A^2 + 2Av_2^2B^2C + 2Bv_1^2A^2C}{2AB}$$

где $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Запишем уравнение потока Риччи на группе Ли $SU(2)$ с полусимметрической связностью

$$\frac{2BC - C^2 - B^2 + A^2 - 2Av_3^2BC^2 - 2Av_2^2B^2C}{BC} = -\frac{2dA}{dt},$$

$$-Bv_3 + Av_3 + 2Bv_2Av_1 = 0,$$

$$Cv_2 - Av_2 + 2v_1Av_3C = 0,$$

$$\frac{C^2 - 2AC - B^2 + A^2 + 2Av_3^2BC^2 + 2Bv_1^2A^2C}{AC} = \frac{2dB}{dt},$$

$$-Cv_1 + Bv_1 + 2Bv_2v_3C = 0,$$

$$\frac{-2AB + B^2 - C^2 + A^2 + 2Av_2^2B^2C + 2Bv_1^2A^2C}{AB} = \frac{2dC}{dt}.$$

Выделим подсистему из алгебраических уравнений и найдем ее решения

- 1) $A=A, B=B, C=C, V=(0, 0, 0)$.
- 2) $A=B, B=B, C=C, V=(0, 0, v_3)$.
- 3) $A=A, B=C, C=C, V=(v_1, 0, 0)$.
- 4) $A=C, B=B, C=C, V=(0, v_2, 0)$.

Нетрудно заметить, что первое решение содержит тривиальное векторное поле V . В данном случае поток Риччи на группе $SU(2)$ относительно полусимметрической связности совпадает на $SU(2)$ с потоком Риччи связности Леви-Чивиты. Такие потоки исследованы в [4]

Симметрические потоки Риччи других трехмерных унимодулярных групп Ли и неунимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью исследуются аналогично.

В настоящей работе были записаны симметрические потоки Риччи всех трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью. Для отдельных групп Ли были найдены их общие решения.

Библиографический список

1. R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature J. Differential Geom., 17: 2 (1982), 255-306.
2. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativit'e g'eneralis'ee (deuxi'eme partie) // Ann. Ecole Norm. Sup., 42 (1925), 17-88.
3. J. Milnor. Curvature of left invariant metric on Lie groups Advances in mathematics, 21 (1976), 293-329.
4. K. Onda, Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds arXiv:0906.1035 (2010).

Моделирование влияния миграции населения на формирование предложения на региональном рынке труда

Л.В. Родионова, А.М. Сергиенко

Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, г. Новосибирск

Статья посвящена моделированию влияния миграции населения на формирование предложения на региональном рынке труда.

Ключевые слова: *миграция населения, региональный рынок труда, моделирование.*

Одним из направлений формирования предложения рабочей силы на рынке труда, обусловленным трудовой мобильностью, выступает миграция населения. Миграция, являясь одной из форм движения населения и трудовых ресурсов, важнейшим каналом их распределения и перераспределения, механизмом развития интеграционных процессов в экономическом пространстве, представляет собой перемещение населения через границы определённых территорий в связи со сменой местожительства, либо возвращением к нему [1, с. 251].

Все перемещения населения относительно какой-либо территории слагаются из потоков выбытий и прибытий. Их объёмы, направления и интенсивность определяются разными группами факторов, довольно часто пересекающимися. Для целей нашего исследования наибольший интерес представляет анализ миграционного притока населения. Поскольку занятость в различных сферах экономики является одним из основных условий вселения в регион трудоспособного населения, это направление движения трудовых ресурсов наиболее тесно связано с размещением производства и потребностью в дополнительной рабочей силы. Основными факторами привлечения рабочей силы в регион из внешней среды являются имеющиеся вакантные рабочие места и вновь создаваемые [2].

Существующая дифференциация между регионами в условиях жизни также является одной из причин территориального перераспределения населения и трудовых ресурсов в пользу более привлекательных.

Степень привлекательности территории зависит от множества факторов, побуждающих человека к выбору определённого места проживания: уровня доходов и степени развития социально-бытовой инфраструктуры в регионе, состояния окружающей среды и природно-климатических условий, уровня политической стабильности, безопасности и других.

Одной из детерминант современных миграций стала цифровизация. Развитие информационных технологий, с одной стороны, открывает новые возможности для усиления миграционных связей, расширяя выбор и облегчая поиск нового места жительства и работы, сокращая материальные и финансовые издержки переезда, снижая остроту социально-психологических проблем адаптации. С другой стороны, создавая условия для дистанционных форм занятости, цифровизация позволяет решать многие насущные для человека проблемы, не переезжая в другой регион, и тем самым снижать масштабы и интенсивность миграционных взаимодействий. В последнем случае миграционные межрегиональные связи замещаются информационными.

Не все рассмотренные факторы можно оценить количественно. Однако условия жизни в конкретном регионе в первую очередь определяются насыщенностью отраслей социальной сферы основными фондами и уровнем доходов населения. Мерой для сопоставления условий жизни в этом случае может служить обеспеченность жителя региона основными фондами непродуцированной сферы и уровень заработной платы. Отношение региональных показателей к общероссийскому будет характеризовать степень относительной привлекательности территории [3].

При оценке влияния миграции населения на рынок труда необходимо учитывать по возможности всю совокупность действующих факторов, сложившиеся тенденции в их развитии и те изменения, которые могут произойти с ними в прогнозируемом периоде [4].

Таким образом, предложение рабочей силы на региональном рынке труда, обусловленное миграцией населения, может быть рассчитано по формуле:

$$MP_t = a_1 + a_2 \cdot bv_t \sum VR_{pij,t-1} + a_3 \cdot bw_t \sum W_{pij,t-1} + a_4 \cdot bf_t \sum FN_{j,t-1}$$

где MP – численность населения, пребывающего в регион на работу; t – индекс соответствующего года; VR – количество вакантных рабочих мест; bv – темп роста количества вакантных рабочих мест; p – пол

(мужской, женский); i – индекс категории рабочей силы; j – индекс отрасли (вида экономической деятельности); W – уровень заработной платы; bw – темп роста заработной платы; FN – обеспеченность жителя региона основными непроизводственными фондами; bf – темп роста основных непроизводственных фондов; a_1, a_2, a_3, a_4 – коэффициенты уравнения, определяемые экспертным путём и уточняемые в ходе численного эксперимента.

Работа выполнена по плану НИР ИЭОПП СО РАН, проект «Движущие силы и механизмы развития кооперационных и интеграционных процессов в экономике Сибири» № 121040100279-5.

Библиографический список

1. Демографический энциклопедический словарь/Редкол.: Валентей Д.И. (гл.ред.) и др. – М.: Сов. энциклопедия, 1985. – 680 с.
2. Migration theory, talking across disciplines / Bretell C., Hollifield J. (eds). New York – London: Roudedge. – 2014. 356 p.
3. Соболева С.В., Чудаева О.В. Демографический потенциал Сибири // Формирование благоприятной среды для проживания в Сибири / под ред. акад. РАН В.В. Кулешова. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2010. – С. 53-95.
4. Понамарёв И.В. Нечёткое моделирование напряжённости на рынке труда // Труды семинара по геометрии и мат. моделированию. – 2016. - №2. – С. 70-74.

О топологических задачах на прямой

А.Н. Саженов¹, Е.А. Плотникова²

¹АлтГУ, г. Барнаул; ²Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

В работе рассматриваются задачи, которые можно условно определить, как топологические задачи на прямой. При подготовке учащихся и студентов к участию в математических олимпиадах задачам такого характера следует уделить определённое внимание.

Ключевые слова: покрытие отрезка, включение и объединение множеств, всюду плотность, непрерывные периодические функции.

На математических соревнованиях различного уровня для старшеклассников и студентов младших курсов решаются достаточно сложные задачи, которые можно условно определить, как топологические задачи на прямой. При подготовке учащихся и студентов к участию в математических олимпиадах следует уделить определённое внимание задачам такого характера. Приведём далее несколько примеров, демонстрирующих предполагаемый образовательный уровень участников, необходимый для успешной реализации себя на соревнованиях. [1-3]

Пример 1. На отрезке находятся несколько меньших отрезков, покрывающих его целиком. Докажите, что если у каждого из отрезков отбросить какую-либо половину – правую или левую, – то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Решение. Считаем, что данный отрезок это $[0, 1]$. Для отрезка I из покрытия будем обозначать I^- , I^+ – его левую и правую половину, соответственно. Применяем обозначение I^σ , для произвольной из половин и $l(A)$ – длина множества A .

Индукция по количеству отрезков покрытия.

$n = 2$. Пусть $I_1 = [0, b]$, $I_2 = [a, 1]$.

Если $b \geq 2/3$ или $a \leq 1/3$, то $l(I_1^\pm) \geq 1/3$ и $l(I_2^\pm) \geq 1/3$. В

первом случае $l(I_1^\sigma \cup I_2^\sigma) \geq l(I_1^\sigma) \geq 1/3$, во втором – аналогично.

Если $1/3 < a \leq b < 2/3$, то I_1^- не пересекается с I_2^σ , а I_2^+ не пересекается с I_1^σ и общая длина оставшихся половин не меньше $1/2$.

Оставшийся случай: $I_1^+ \cup I_2^- = \left[\frac{b}{2}, \frac{1+a}{2} \right]$. В этом случае

$$l(I_1^+ \cup I_2^-) = \frac{1+a-b}{2} \geq \frac{1+1/3-2/3}{2} = 1/3.$$

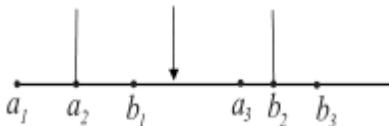
Предположим, что утверждение выполняется для $n-1$ отрезков. Рассмотрим покрытие, состоящее из n отрезков I_1, \dots, I_n . Допустим, нашёлся отрезок покрытия I_j содержащийся в

объединении остальных. Тогда $\bigcup_{k=1}^n I_k^\sigma \supset \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n I_k^\sigma$ и

$$l\left(\bigcup_{k=1}^n I_k^\sigma\right) \geq l\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n I_k^\sigma\right) \geq 1/3 \quad \text{по индукционному}$$

предположению.

Теперь считаем, что в покрытии таких отрезков нет. Занумеруем отрезки в порядке возрастания левых концов. Отметим, что если $a_k = a_{k+1}$ или $b_k = b_{k+1}$, то один из



отрезков I_k или I_{k+1} содержит другой. Итак, имеем неравенства: $0 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Рассмотрим правые концы отрезков покрытия. Во-первых, $a_2 \leq b_1$ – поскольку имеем дело с покрытием. Если при этом $a_2 = b_1$, отрезок $[a_2, 1]$ покрыт $n-1$ отрезками и применяем индукционное предположение. Пусть $a_2 < b_1$, из аналогичных соображений можно считать, что $b_1 < a_3 < b_2 < b_3$. Пусть некоторым образом выбраны половины отрезков покрытия. Уменьшим отрезок I_2 гомотетичным образом, сохраняя его середину

неподвижной так, что система отрезков остаётся покрытием, новый отрезок обозначаем I'_2 . Это будет означать, что $a'_2 = b_1$ или $b'_2 = a_3$.

Тогда из включения $I'_2 \subset I_2^\sigma$, следует включение $I_1^\sigma \cup I'_2 \subset I_1^\sigma \cup I_2^\sigma \cup I_3^\sigma \cup \dots \cup I_n^\sigma$ и, соответственно, неравенство $l(I_1^\sigma \cup I'_2 \cup I_3^\sigma \cup \dots \cup I_n^\sigma) \leq l(I_1^\sigma \cup I_2^\sigma \cup I_3^\sigma \cup \dots \cup I_n^\sigma)$.

Заметим, что система отрезков $I_1, I'_2, I_3, \dots, I_n$ осталась покрытием и поскольку $a'_2 = b_1$ или $b'_2 = a_3$, то можно воспользоваться индукционным предположением, как было сделано выше.

Пример 2. Множество $\{n \cdot \xi\}$, где ξ – иррациональное число, n – натуральные числа, $\{x\}$ – дробная часть числа x является всюду плотной в $(0, 1)$.

Решение. Будем считать, что $\xi > 0$.

1) для любого натурального числа n число $\{n \cdot \xi\}$ – иррациональное;

2) числа $\{n \cdot \xi\}$ – попарно различные, отличные от нуля;

Далее, пусть N – произвольное натуральное число. Рассмотрим числа $\alpha_k = \{k \cdot \xi\}$, где $k = 1, 2, \dots, N+1$. Пусть $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{N+1}$ – упорядочивание чисел α_k в порядке возрастания.

3) Существует индекс i для которого выполнено неравенство $\beta_{i+1} - \beta_i < \frac{1}{N}$ (иначе суммарная длина больше 1). Значит среди $1, 2, \dots, N+1$ существуют n_1 и n_2 со свойством:

$$0 < \{n_2 \cdot \xi\} - \{n_1 \cdot \xi\} < \frac{1}{N}$$

4) Поскольку $\{n_2 \cdot \xi\} - \{n_1 \cdot \xi\} = \{(n_2 - n_1) \cdot \xi\}$, получаем существование целого числа m со свойством:

$$0 < \alpha = \{m \cdot \xi\} < \frac{1}{N}.$$

5) Если m натуральное число и $\frac{1}{L+1} < \alpha < \frac{1}{L}$ (здесь будет выполняться неравенство $L \geq N$), то $k\alpha = \{km \cdot \xi\}$ для $k = 1, 2, \dots, L$. Числа $k\alpha$ попадают в любой интервал длины $1/N$.

6) Пусть теперь m отрицательное число. Обозначим $A = [m \cdot \xi]$. Тогда $m \cdot \xi = A + \alpha$ и $-m \cdot \xi = -A - \alpha = (-A - 1) + (1 - \alpha)$. Обозначим $-m = l$, $-A - 1 = B$, $1 - \alpha = \beta$. Получим существование натурального числа l , для которого $\{l \cdot \xi\} = \beta \in \left(1 - \frac{1}{N}, 1\right)$. Выберем

натуральное число L со свойством: $1 - \frac{1}{L} < \beta < 1 - \frac{1}{L+1}$, пусть $k = 1, 2, \dots, L$. Нетрудно заметить, что $\{kl \cdot \xi\} \in \left(1 - \frac{k}{L}, 1 - \frac{k}{L+1}\right)$.

Действительно,

$$kl \cdot \xi = kB + k\beta < kB + k - \frac{k}{L+1} = (kB + k - 1) + \left(1 - \frac{k}{L+1}\right) \quad \text{и}$$

$$kl \cdot \xi = kB + k\beta > kB + k - \frac{k}{L} = (kB + k - 1) + \left(1 - \frac{k}{L}\right).$$

Из этих двух неравенств следует, что целая часть числа $kl \cdot \xi$ есть $kB + k - 1$, а дробная часть находится в указанном интервале. Здесь будет происходить спуск $\{kl \cdot \xi\}$ от 1 к 0 с равномерным шагом.

7) В силу произвольности N задача решена.

Пример 3. Пусть f и g – непрерывные периодические функции на числовой прямой. Докажите, что если существует $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$, то функции совпадают.

Решение. Пусть a – произвольная точка. Обозначим T и S периоды функций f и g . Пусть число T/S – рациональное, тогда $mT = lS$ для некоторых натуральных m и l . Обозначим $t_n = a + nmT$. Замечаем, что $t_n \rightarrow \infty$, $f(t_n) - g(t_n) \rightarrow 0$, $f(t_n) = f(a)$, $g(t_n) = g(a + nlS) = g(a)$ и $f(a) = g(a)$. Допустим теперь, что число T/S – иррациональное. Тогда в силу результатов предыдущей задачи можно выбрать возрастающую последовательность натуральных чисел

n_k так, что $\left\{n_k \frac{T}{S}\right\} = \alpha_k \rightarrow 0$. Обозначим $m_k = \left[n_k \frac{T}{S} \right]$, очевидно, что это тоже возрастающая последовательность натуральных чисел. Поскольку $\{x\} = x - [x]$ получаем $n_k \frac{T}{S} = m_k + \alpha_k$ или $n_k T = m_k S + \alpha_k S$, далее $f(a) = f(a + n_k T)$, $f(a + n_k T) - g(a + n_k T) \rightarrow 0$ и $g(a + n_k T) = g(a + m_k S + \alpha_k S) = g(a + \alpha_k S) \rightarrow g(a)$.

Библиографический список

1. Саженов А.Н., Саженова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.
2. Плотникова Е.А., Саженов А.Н., Саженова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. - Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – № 3. – С. 34-37.
3. Саженов А.Н., Оскорбин Д.Н., Саженова Т.В. Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ. – 2019.

Об автоматизации численного решения задач о потоках на графах

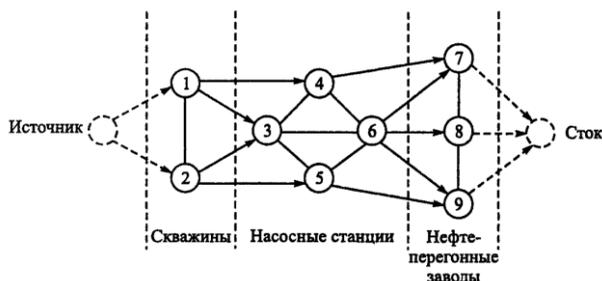
Д.Е. Унтерова, Т.В. Саженикова

АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается задача о максимальном потоке на ориентированном графе и созданы алгоритм и программа её численного решения техническими средствами, представленными в открытом доступе

Ключевые слова: *ориентированный граф, пропускная способность рёбер, максимальный поток, численный алгоритм, Python.*

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы организации потоков при ограниченной пропускной способности рёбер ориентированного графа, представляющего собой математическую модель трубопроводной сети. Примером такой модели может служить сеть трубопроводов для транспортировки нефти от буровых скважин до нефтеперегонных заводов [1]. Для перекачки нефти имеются насосные станции. Каждый фрагмент-ребро трубопровода имеет свою пропускную способность. Они могут быть как однонаправленными (осуществляют перекачку нефти только в одном направлении), так и двунаправленными. В однонаправленных рёбрах положительная пропускная способность предполагается в одном направлении и нулевая - в другом.



Здесь возникает вопрос определения оптимальной пропускной способности (т.е. максимального потока) между нефтяными скважинами и нефтеперегонными заводами.

Для ребра (i, j) , соединяющего вершину i с вершиной j , где $i < j$, используется запись $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ для представления пропускных

способностей в направлениях $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$ соответственно. Во избежание недоразумений на схеме сети \bar{c}_{ij} располагаются на ребре (i, j) ближе к узлу i , а \bar{c}_{ji} ближе к узлу j .



Разрез сети определяет множество ребер, при удалении которых из сети, полностью прекращается поток от источника к стоку.

Пропускная способность разреза равна сумме пропускных способностей "разрезанных" ребер. Среди всех разрезов сети разрез с *минимальной пропускной способностью* определяет максимальный поток в сети.

Идея алгоритма нахождения максимального потока состоит в нахождении сквозных путей с положительными потоками от источника к стоку. [1-4]

Рассматривается ребро (i, j) с (начальной) пропускной способностью $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$. В процессе выполнения алгоритма части этих пропускных способностей "забираются" потоками, проходящими через данное ребро, в результате каждое ребро будет иметь остаточную пропускную способность. Запись (c_{ij}, c_{ji}) используется для представления остаточных пропускных способностей. Сеть, где все ребра имеют остаточную пропускную способность, называется остаточной. Для произвольного узла j , получающего поток от узла i , определяется метка $[a_j, i]$, где a_j - величина потока, протекающего от узла j к узлу i .

Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока предполагает выполнение следующих действий:

Шаг 1. Для всех ребер (i, j) полагается остаточная пропускная способность равной первоначальной пропускной способности, т.е. $(c_{ij}, c_{ji}) = (\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$. Назначается $a_i = \infty$ и узел i метится меткой $[\infty, -]$. Положив $i = 1$, осуществляется переход ко второму шагу.

Шаг 2. Множество S_i определяется как множество узлов j , в которые можно перейти из узла i по ребру с положительной остаточной пропускной способностью (т. е. $c_{ij} > 0$ для всех j , принадлежащих S_i). Если S_i не пустое множество, то выполняется третий шаг, в противном случае – переход к шагу 4.

Шаг 3. В множестве S_i находится узел k , такой, что $c_{ik} = \max \{c_{ij}\}$ для всех j , принадлежащих S_i .

Полагается $a_k = c_{ik}$ и узел k метится меткой $[a_k, i]$. Если последней меткой помечен узел стока (т.е. если $k = n$), сквозной путь найден, и переходим к пятому шагу.

Шаг 4. (откат назад). Если $i = 1$, сквозной путь невозможен, и переходим к шагу 6. Если $i \neq 1$, находим помеченный узел r , непосредственно предшествующий узлу i , и удаляем узел i из множества узлов, смежных с узлом r . Полагается $i = r$ и возвращаемся ко второму шагу.

Шаг 5. (определение остаточной сети). Через $N_p = \{1, k_1, k_2, \dots, n\}$ обозначается множество узлов, через которые проходит p -й найденный сквозной путь от узла источника (узел 1) до узла стока (узел n). Тогда максимальный поток, проходящий по этому пути, вычисляется как $f_p = \min \{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_n\}$.

Остальные пропускные способности ребер, составляющих сквозной путь, уменьшаются на величину f_p в направлении движения потока и увеличиваются на эту же величину в противоположном направлении. Таким образом, для ребра (i, j) , входящего в сквозной путь, текущие остаточные стоимости (c_{ij}, c_{ji}) изменятся следующим образом:

$(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$, если поток идет от узла i к узлу j ,

$(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$, если поток идет от узла j к узлу i .

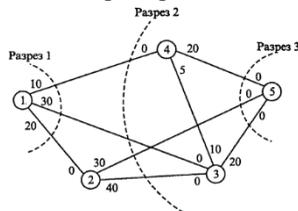
Далее восстанавливаются все узлы, удаленные на шаге 4. Полагается $i = 1$ и возвращаемся ко второму шагу для поиска нового сквозного пути.

Шаг 6. (решение). При m найденных сквозных путях максимальный поток вычисляется по формуле $F = f_1 + f_2 + \dots + f_m$. Имея значения начальных $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$ и конечных (c_{ij}, c_{ji}) пропускных способностей ребра (i, j) , можно вычислить оптимальный поток через это ребро следующим образом: положим $(a, b) = (\bar{c}_{ij} - c_{ij}, \bar{c}_{ji} - c_{ji})$; если $a > 0$, поток, проходящий через ребро (i, j) , равен a ; если же $b > 0$, тогда поток равен b . (Случай, когда одновременно $a > 0$ и $b > 0$, невозможен.)

Для численного решения задач нахождения максимального потока в сети алгоритмом Форда-Фалкерсона составлена программа с использованием скриптового языка Python, апробированная на нескольких модельных задачах.

Задача 1.

Найти максимальный поток в сети, представленной графически на рисунке справа.



задача 2.



ограничения.

Решение первой модельной задачи указанным методом на языке Python дало следующий результат: максимальный объем потока в сети равен 60 единицам. Этот ответ совпадает с результатом аналитических расчётов по этой задаче, которые не слишком объёмны.

Аналогичное решение второй модельной задачи дало ответ: максимальный объем потока в сети равен 100 миллионами баррелей в день, что опять же совпадает с результатами аналитических расчётов.

Составленные программные коды можно использовать для решения задач такого вида с любыми другими числовыми исходными данными.

Библиографический список

1. Таха Х. Введение в исследование операций, 6-е издание. Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
2. Колемаев В. А. Математические методы и модели исследования операций – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
3. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. –М.: ЮНИТИ, 2005.
4. Кузнецов А. В., Рутковский Р. А. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2010.

Пусть в сети трубопроводов для транспортировки нефти, представленной на рисунке слева, пропускная способность насосной станции 6 ограничена 60 миллионами баррелей в день. Необходимо найти максимальную пропускную способность сети с учетом этого ограничения.

СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958

Фильтрация воды и воздуха в пороупругом льду

А.Б. Береговых¹, М.А. Токарева¹, А.А. Папин¹

¹АлтГУ, г. Барнаул

В работе приведена математическая модель двухфазной фильтрации в твёрдом скелете с переменной пористостью, которая описывает фильтрацию воды и воздуха в ледовом пороупругом скелете. В двумерном случае рассмотрена фильтрация в тонком слое, получены решения в квадратурах. В модельном одномерном случае исследовано на устойчивость решение системы уравнений.

Ключевые слова: математическое моделирование, пористость, фазовый переход, двухфазная фильтрация, ледовый покров.

Ледовый покров представляет собой пористый скелет, в порах которого находятся вода и воздух. Для описания процесса используется следующая система уравнений [1]-[3]:

$$\frac{\partial(1-\varphi)\rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\varphi)\rho_i \vec{v}_i) = I_{wi} + I_{ai},$$

$$\frac{\partial(\rho_w s_w \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \varphi s_w \vec{v}_w) = I_{iw} + I_{aw},$$

$$\frac{\partial(\rho_a s_a \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \varphi s_a \vec{v}_a) = I_{ia} + I_{wa},$$

$$s_w \varphi (\vec{v}_w - \vec{v}_i) = -K_0(\varphi) \frac{k_{01}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g}),$$

$$s_a \varphi (\vec{v}_a - \vec{v}_i) = -K_0(\varphi) \frac{k_{02}}{\mu_a} (\nabla p_a - \rho_a \vec{g}),$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_i = -\varphi \left(\alpha(\theta) p_e + \beta(\theta) \frac{dp_e}{dt} \right),$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\varphi) \eta(\theta) \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \vec{x}} + \left\{ \left\{ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \vec{x}} \right\} \right\}^* \right) \right),$$

$$(\rho_a c_a s_a \phi + \rho_w c_w s_w \phi + \rho_i c_i (1-\phi)) \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\rho_a c_a s_a \phi \vec{v}_a + \rho_w c_w s_w \phi \vec{v}_w + \rho_i c_i (1-\phi) \vec{v}_i) \nabla \theta = \nabla \cdot (\lambda_{tot}(\phi) \nabla \theta) - L_i I_{ia} - v I_{iw},$$

где φ – пористость, s_w, s_a – насыщенности воды и воздуха ($s_w + s_a = 1$), $\vec{v}_i, \vec{v}_w, \vec{v}_a$, ρ_i, ρ_w, ρ_a – истинные скорости и плотности фаз, I_{lm} – интенсивность перехода массы из l-фазы в m-фазу, $K_0(\phi)$ – тензор фильтрации, k_{01}, k_{02} – проницаемости воды и воздуха, \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести, $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ – заданные параметры среды, p_i, p_w, p_a – давления льда, воды и воздуха соответственно, $p_e =$

$(1 - \phi)(p_i - p_f)$ – эффективное давление, $p_f = s_a p_a + s_w p_w$, p_{tot} – общее давление, $\rho_{tot} = (1 - \phi)\rho_i + \phi(s_a \rho_a + s_w \rho_w)$ – общая плотность, $\eta(\theta)$ – вязкость пористого скелета, * – операция транспонирования, c_i, c_w, c_a – теплоёмкости льда, воды и воздуха, L_i – удельная теплота сублимации льда, v – удельная теплота плавления льда. λ_{tot} – теплопроводность среды в целом.

В начале рассматривается фильтрация в тонком пороупругом слое: $x \in [0, L], z \in [0, H]$, где $H \ll L$. Рассматривается случай медленных течений. После обезразмеривания [4] и предельного перехода по малому параметру $\varepsilon = \frac{H}{L}$ система упрощается и её решение находится однозначно. В частном случае при следующих начально-краевых условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad v_i^2 \Big|_{z=H} = D = const, \quad v_i^1 \Big|_{z=H} = B = const, \\ \frac{\partial v_i^1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \phi \Big|_{t=0} = \phi^0(x, t), \quad \frac{\partial p_w}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \\ p_w \Big|_{t=0} = p_w^0(x, z), \quad p_i \Big|_{t=0} = p_i^0(x, z), \quad p_w \Big|_{z=0} = p_0(x, t), \\ s_w \Big|_{t=0} = s_w^0(x, z), \quad s_a \Big|_{t=0} = 1 - s_w^0(x, z), \\ \theta \Big|_{t=0} = \theta^0(x, z), \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0, z=H} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L} = 0, \end{aligned}$$

решение имеет вид:

$$\begin{aligned} v_i^1 = v_w^1 = v_a^1 = B, \quad v_i^2 = v_w^2 = v_a^2 = D, \\ \phi = \phi^0(x - Bt, t - Dt), \quad p_a = p_w = p_0(x, t), \\ s_a = s_a^0(x - Bt, z - Dt), \quad s_w = s_w^0(x - Bt, z - Dt), \\ p_i = p_0(x, t) - p_f^0(x - Bt, z - Dt) + p_i^0(x - Bt, z - Dt). \end{aligned}$$

Уравнение для θ примет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_a c_a s_a^0(x - Bt, z - Dt) + \rho_w c_w s_w^0(x - Bt, z - Dt)}{\rho_i c_i} \phi^0(x - Bt, t - Dt) \right. \\ \left. + (1 - \phi^0(x - Bt, t - Dt)) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + B \frac{\partial \theta}{\partial x} + D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \\ = \frac{1}{L^2 \rho_i c_i \tau_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{tot} (\phi^0(x - Bt, t - Dt), s_w^0(x - Bt, z - Dt)) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Оно является линейным равномерно-параболическим. Справедлив принцип максимума для функции θ и теорема существования единственности решения. Таким образом, решение задачи находится однозначно.

Далее исследуется поведение решения одномерной системы уравнений, в которой присутствует обмен массой только между водой

и воздухом ($I_{aw} = d_1(s_w - s_w^0) = -I_{wa}, I_{ij} = 0, j = a, w$).
 Предполагаем, что ускорения и сила тяжести равны нулю, $\alpha(\theta) = \alpha = \text{const}, \beta(\theta) = \beta = \text{const}$, капиллярный скачок отсутствует, тогда стационарное решение будет иметь следующий вид:

$$\Phi = \Phi^0, s_w = s_w^0, s_a = s_a^0, v_i = v_w = v_a = 0, p_w = p_a = p_{tot} = p^0, \theta = \theta^0.$$

Возмущенное решение ищется в окрестности стационарного:

$$v_i = \bar{v}_i, v_w = \bar{v}_w, v_a = \bar{v}_a, p = p^0 + \bar{p}, s_w = s_w^0 + \bar{s}_w, s_a = s_a^0 + \bar{s}_a, \Phi = \Phi^0 + \bar{\Phi}, \theta = \theta^0 + \bar{\theta},$$

где $\bar{v}_i, \bar{v}_w, \bar{v}_a, \bar{p}, \bar{s}_w, \bar{s}_a, \bar{\Phi}, \bar{\theta}$ малы и имеют непрерывные производные.

Подставляя возмущенное решение в систему и отбрасывая нелинейные слагаемые, придём к следующей линейной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1 - \bar{\Phi})}{\partial t} + (1 - \Phi^0) \frac{\partial(\bar{v}_i)}{\partial x} &= 0, \\ \Phi^0 \frac{\partial(\bar{s}_w)}{\partial t} + s_w^0 \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} + \Phi^0 s_w^0 \frac{\partial \bar{v}_w}{\partial x} &= \frac{d_1 \bar{s}_w}{\rho_w} \\ \Phi^0 \frac{\partial(\bar{s}_a)}{\partial t} + s_a^0 \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} + \Phi^0 s_a^0 \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x} &= -\frac{d_1 \bar{s}_w}{\rho_a}, \\ s_w^0 \Phi^0 (\bar{v}_w - \bar{v}_i) &= -K_0(\Phi^0) \frac{k_{01}(s_w^0)}{\mu_w} \left(\frac{\partial \bar{p}_w}{\partial x} \right), \\ s_a^0 \Phi^0 (\bar{v}_a - \bar{v}_i) &= -K_0(\Phi^0) \frac{k_{02}(s_a^0)}{\mu_a} \left(\frac{\partial \bar{p}_a}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$p_{tot} = h(t), p_e = h(t) - \bar{p} - p^0, p_s = \frac{h(t) - \bar{\Phi} p^0 - \Phi^0 \bar{p} - p^0 \Phi^0}{(1 - \bar{\Phi} - \Phi^0)},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x} = -\bar{\Phi} \alpha (h(t) - p^0) - \Phi^0 \alpha (h(t) - \bar{p} - p^0) - \Phi^0 \beta \frac{\partial}{\partial t} (h(t) - \bar{p} - p^0),$$

$$\begin{aligned} (\rho_a c_a s_a^0 \Phi^0 + \rho_w c_w s_w^0 \Phi^0 + \rho_i c_i (1 - \Phi^0)) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= (a_{tot} + b_{tot} (\rho_i (1 - \Phi^0) + \\ &+ \rho_w \Phi^0 s_w^0 + \rho_a \Phi^0 (1 - s_w^0)))^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Её решение выглядит следующим образом:

$$\bar{v}_i = -\frac{\Phi^0}{1 - \Phi^0} (s_w^0 \bar{v}_w + s_a^0 \bar{v}_a) + \frac{\tilde{c}(t)}{1 - \Phi^0}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_w &= B_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{c}(t), \quad \bar{v}_a = B_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{c}(t), \\ \bar{p} &= (a_1 \cos(\lambda_1 x) + b_1 \sin(\lambda_1 x)) (a_2 e^{k_1 t} + b_2 e^{k_2 t}) \end{aligned}$$

$$\bar{\Phi} = -c_1 \lambda_1^2 (a_1 \cos(\lambda_1 x) + b_1 \sin(\lambda_1 x)) \left(\frac{a_2}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{b_2}{k_2} e^{k_2 t} \right),$$

$$\bar{s}_1 = \lambda_1^2 s_w^0 \left(\frac{c_1}{\phi_0} + B_1 \right) e^{\frac{d_1 t}{\rho_w \phi_0}} \left(a_1 \cos(\lambda_1 x) + b_1 \sin(\lambda_1 x) \right)^* \\ * \left(\frac{a_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{b_2}{\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right), \\ \bar{\theta} = (b_4 e^{-\lambda_2 t}) \left(a_3 \cos(\sqrt{C_2 \lambda_2 x}) + b_3 \sin(\sqrt{C_2 \lambda_2 x}) \right),$$

где:

$$k_{1,2} = \frac{-\frac{\lambda_1 + \tau}{\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 + \tau}{\omega}\right)^2 + 4 \frac{\gamma \lambda_1}{\omega}}}{2},$$

$\tilde{c}(t)$ – некоторая функция времени, λ_1, λ_2 - положительные постоянные, B_i – константы, зависящие от стационарного решения, c_i, a_i, b_i – некие постоянные, зависящие от начально-краевых условий, ω, τ, γ - параметры задачи. Условие $\text{Re } k_i < 0, i = 1, 2$ – необходимое условие для устойчивости решений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. А.А. Папин, Ю.Ю. Подладчиков, Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде, Известия Алтайского государственного университета, 85, 2015, 131-135.
2. A. Fowler, Mathematical Geoscience, Springer-Verlag London Limited, 2011.
3. L.S. Kuchment, P. Romanov, A.N. Gelfan and V.N. Demidov, Use of satellite-derived data for characterization of snow cover and simulation of snowmelt runoff through a distributed physically based model of runoff generation, Hydrol. Earth Syst. Sci., 14, 2010, 339–350.
4. J. Escher, M. Hillairet, P. Laurecot and C. Walker, Thin film equations with soluble surfactant and gravity: modeling and stability of steady states, Mathematische Nachrichten, 285 2012, 210–222.
5. Глушкова А.А., Папин А.А. Устойчивость двухфазных течений в пороупругой среде, Труды семинара по геометрии и математическому моделированию, 2019, 5, 55-59

Движение внешней нагрузки в замороженном канале П.В. Борисов¹, К.А. Шишмарев¹

¹Институт математики и информационных технологий;
¹АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию движущейся нагрузки по поверхности замороженного канала с переменной толщиной льда.

Ключевые слова: ледовая пластина, движущаяся нагрузка, замороженный канал, деформация, линейно изменяющаяся толщина льда.

Рассматривается реакция вязкоупругого ледового покрова в замороженном канале на движущуюся внешнюю нагрузку. Задача решается в канале с прямоугольным сечением с конечными значениями глубины H ($-H < z < 0$) и ширины $2b$ ($-b < y < b$), в направлении оси x канал неограничен. Здесь $Oxuz$ – декартова система координат. Задача исследуется в рамках линейной теории гидроупругости. Канал заполнен невязкой и несжимаемой жидкостью, покрытой тонким ледовым покровом. Ледовый покров моделируется тонкой вязкоупругой пластиной с заданными постоянной плотностью ρ и переменной изгибной жесткостью $D(y)$ [2], рассматривается случай изменения толщины льда с учетом нескольких постулатов: изменение толщины льда поперек канала является малым относительно горизонтальных размеров пластины; вдоль оси x толщина не изменяется. В этом случае в рамках линейной теории изгибная жесткость пластины моделируется одной функцией $D(y)$ и является одинаковой во всех направлениях пластины, как это имеет место в моделях изотропных пластин с постоянной толщиной. Форма толщины льда поперек канала будет уточнена далее. Вязкость ледовой пластины моделируется в рамках теории Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала. Определяющее уравнение этой теории связывает напряжения и относительные деформации по закону $\sigma = E(\epsilon + \tau \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0)$, где σ – напряжения, ϵ – относительные деформации, τ – время запаздывания. Нагрузка движется вдоль центральной линии канала с постоянной скоростью U достаточно долгое количество времени, чтобы считать возмущение льда и жидкости установившимися. В этом случае характер начального движения нагрузки не учитывается в задаче. Нагрузка моделируется гладким локализованным распределением давления по верхней поверхности ледовой пластины. Течение в канале, вызванное возмущениями льда,

считается потенциальным. Схема задачи показана на Рисунке 1.

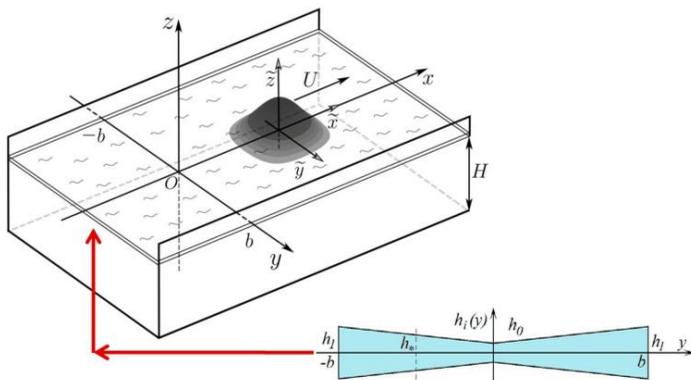


Рисунок 1. Схема задачи.

Основным уравнением модели является уравнение колебаний вязкоупругой ледовой пластины для прогибов льда $w(x, y, t)$ (вертикальное отклонение вязкоупругой ледовой пластины из состояния покоя, $z = 0$) с учетом переменной жесткости $D(y)$ [3].

$$M(y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) Lw = p(x, y, 0, t) + P(x, y, t)$$

$$(-\infty < x < \infty, -b < y < b, z = 0)$$

где L – дифференциальный оператор, имеющий вид

$$L = D(y) \Delta^2 + 2D_y \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) + D_{yy} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

Функция $P(x, y, t)$, моделирующая движущуюся внешнюю нагрузку вдоль центральной линии канала, имеет постоянную амплитуду P_0 и описывается уравнениями[4]

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1((x - Ut)/b) P_2(y/b) \quad (-\infty < x < \infty, -b < y < b),$$

$$P_1(\tilde{x}) = (\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1)/2 \quad (|c_1 \tilde{x}| < 1), \quad P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1),$$

$$\tilde{x} = (x - Ut)/b$$

$$P_2(\tilde{y}) = (\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1)/2 \quad (|c_2 \tilde{y}| < 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = y/b$$

где c_1 и c_2 – безразмерные параметры, характеризующие форму и размер внешней нагрузки. В работе рассматривается только такой заданный вид внешней нагрузки, однако проведенный анализ может быть повторен для нагрузок произвольной формы. Гидродинамическое давление $p(x, y, 0, t)$ на границе лед/жидкость определяется через линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_1 \phi_t - \rho_1 g w \quad (-\infty < x < \infty, -b < y < b),$$

где g – модуль ускорения силы тяжести, ρ' – плотность жидкости и $\phi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения жидкости в канале. Потенциал $\phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области канала, краевым условиям не протекания на жестких стенках канала и линеаризованному кинематическому условию на границе лед/жидкость[1].

$$\phi_y = 0 \quad (y = \pm b), \quad \phi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \phi_z = w_t \quad (z = 0).$$

В ходе исследования получены следующие результаты:

Исследована задача о поведении ледового покрова при движении внешней нагрузки вдоль замерзшего канала с линейно изменяющейся толщиной льда. Рассмотрен один случай изменения толщины льда, симметричный относительно центра канала.

Получено, что в целом линейное изменение толщины льда поперек канала приводит к увеличению прогибов и деформаций в месте наименьшей толщины льда (центральной линии канала) и уменьшению деформаций у стенок, где толщина является наибольшей.

Профили прогибов льда и деформаций поперек канала сужаются и смещаются к центральной линии с увеличением линейного изменения толщины льда.

Реакция льда на нагрузку, движущуюся с докритической скоростью, сильнее зависит от линейного изменения толщины льда, чем на нагрузку, движущуюся со сверхкритической скоростью. В первую очередь, из-за возможного появления гидроупругих волн при изменении толщины льда.

Прогибы льда для линейно изменяющейся толщины сильнее зависят от времени запаздывания (вязкости в рассмотренной модели), чем для льда постоянной толщины.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008)

Библиографический список

1. Шишмарев, К. А. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления / К. А. Шишмарев, Т. И. Хабахпашева // Вычислительные технологии. – 2019. Т. 24, № 2. – С. 111–128.

2. Shishmarev, K. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // Applied Ocean Research. – 2016. – 59. – p. 313-326.

3. Козин В.М. Земляк В.Л. Верещагин В.Ю. Влияние снежного покрова на параметры изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове. ПМТФ. С.134-140. 2013 г. том №3

4. Shishmarev K., Zavyalova K., Batyayev E., Khabakhpasheva T. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice. Water, 2022,14, 281.

**Численное исследование автомодельной задачи о
движении жидкости в тающем
пороупругом льду**

Вицц Р.А.¹, Ларионова В.Н.¹, Токарева М.А.¹

¹*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В первом случае исследуется изотермическая фильтрация без учёта фазовых переходов, во втором – неизотермическая фильтрация с учётом обмена масс между фазами.

Проведено численное исследование двух задач в автомодельных переменных с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Ключевые слова: *двухфазная фильтрация, автомодельные переменные, пористость, ледовый покров, фазовый переход, численные методы.*

Модель фильтрации жидкости в тающем пороупругом льду с учётом фазовых переходов описывается следующей системой уравнений [1–3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\rho_i\vec{v}_i) &= -I_{iw}, \\ \frac{\partial(\rho_w\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w\phi\vec{v}_w) &= I_{iw}, \\ \phi(\vec{v}_w - \vec{v}_i) &= -\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)}(\nabla p_w - \rho_w\vec{g}), \\ \operatorname{div}\vec{v}_i &= -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \\ \nabla \cdot p_{tot} &= \rho_{tot}\vec{g} + (1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}}\right)^*\right), \\ (\rho_w c_w \phi + \rho_i c_i (1-\phi))\frac{\partial\theta}{\partial\vec{x}} + (\rho_w c_w \phi\vec{v}_w + \rho_i c_i (1-\phi)\vec{v}_i)\nabla \cdot \theta &= \\ &= \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \cdot \theta) + v\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t}, \\ p_{tot} &= \phi p_f + (1-\phi)p_s, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \\ p_e &= (1-\phi)(p_i - p_w), \rho_{tot} = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i, \end{aligned}$$

$$I_{iw} = \begin{cases} -\lambda_w \phi \theta, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+, \\ \lambda_i (1 - \phi)^2 \exp\{\beta(\theta - \theta^+)\}, & \theta > \theta^+, \\ \theta^+ = 273.5K, \theta^- = 268.5K. \end{cases}$$

Здесь ϕ – пористость; $\rho_w, \rho_i, \vec{v}_w, \vec{v}_i$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность; \vec{g} – плотность массовых сил; α, β – коэффициенты, характеризующие свойства среды; η – динамическая вязкость твердой фазы; $k(\phi)$ – проницаемость; $\mu(\theta)$ – динамическая вязкость жидкости; θ – температура среды; θ^-, θ^+ – температуры замерзания воды и плавления льда соответственно; c_w, c_i – коэффициенты теплоёмкости фаз; λ_w, λ_i – коэффициенты теплопроводности фаз; λ_c – коэффициент теплопроводности среды в целом, ν – удельная теплота плавления льда. Система является замкнутой, если $\rho_w = const$ и $\rho_i = const$, задача записана в переменных Эйлера.

В автомодельных безразмерных переменных $\xi = x - ct$ ($\xi > 0$) система примет вид:

$$\begin{aligned} -c \frac{d}{d\xi} (\rho_i (1 - \phi)) + \frac{d}{d\xi} (\rho_i (1 - \phi) v_i) &= -I_{iw}, \\ -c \frac{d}{d\xi} (\rho_w \phi) + \frac{d}{d\xi} (\rho_w \phi v_w) &= I_{iw}, \phi (v_w - v_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)} \left(\frac{dp_w}{d\xi} + \rho_w g \right), \\ \frac{dv_i}{d\xi} &= -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(-c \frac{dp_e}{d\xi} + v_i \frac{dp_e}{d\xi} \right), \\ \frac{dp_{tot}}{d\xi} &= \rho_{tot} g + 2 \frac{d}{d\xi} \left((1 - \phi) \eta \frac{dv_i}{d\xi} \right), \\ -c (\rho_w c_w \phi + \rho_i c_i (1 - \phi)) \frac{d\theta}{d\xi} &+ (\rho_w c_w \phi v_w + \rho_i c_i (1 - \phi) v_i) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = \frac{d}{d\xi} \left(\lambda_c(\phi) \frac{d\theta}{d\xi} - \nu c \rho_i \frac{d(1 - \phi)}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую модельную задачу, описывающую пространственное нестационарное изотермическое движение жидкости в вязкой пористой среде без учёта фазовых переходов [5–7]. Пусть $a_1(\phi) = \frac{\phi^m}{\eta}$, $a_2(\phi) = 0$, $k(\phi) = k\phi^n$, $\mu(\theta) = \mu = const$. Тогда исходная система сводится к одному уравнению для нахождения функции пористости.

Результат численного исследования [4] приведён на рисунке 4.

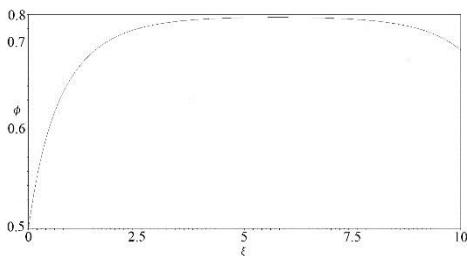


Рисунок 4–График распределения пористости.

Далее рассмотрим неизотермическую фильтрацию с учётом фазовых переходов. Пусть $a_1(\phi) = \alpha\phi$, $a_2(\phi) = g = \beta = \eta = 0$, $\mu(\theta) = const$, $k(\phi) = k \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}$, ($[k] = \text{м}^2$). Результаты численного исследования [4,8] приведены на рисунках 1 – 3.

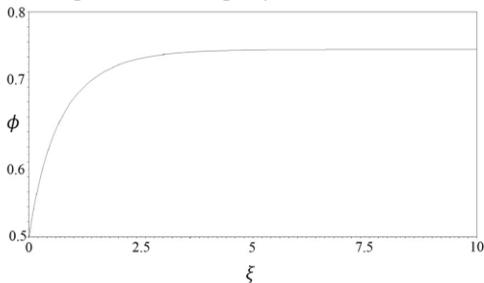


Рисунок 1 – Распределение функции пористости.

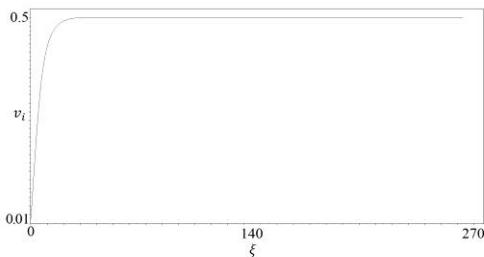


Рисунок 2 – Распределение функции скорости льда.

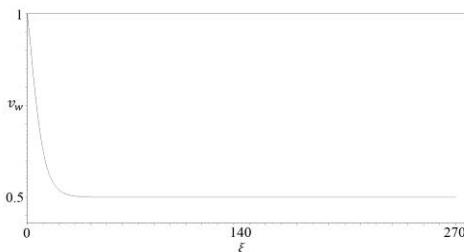


Рисунок 3 – Распределение функции скорости воды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ТУБИТАК по НИР №20–58–46009.

Библиографический список

1. Токарева М.А., Папин А.А. Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – 141 с.
2. Sibin A. N., Papin A. A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. V. 62. N 1, P. 96–104.
3. Tokareva M.A., Papin A.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow–ice Cover // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021, V.14. N 1, P.47–56.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. – Москва: Главная редакция физико–математической литературы издательства «Наука», 1978. – 512 с.
5. Morency C. et al. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. – 2007.
6. Fowler A. Mathematical Geoscience. – Springer–Verlag London Limited, 2011.
7. Bagderina Yu.Yu., Equivalence of third–order ordinary differential equations to Chazy equations I–XIII. Stud. Appl. Math. 2008. V. 120, №3. P. 293–332
8. Папин А.А., Сибин А.Н., Шишмарев К.А. Математические модели тающего снежно–ледового покрова и протаивающих грунтов: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. – 91 с.

Разрешимость двумерной задачи фильтрации с переменной пористостью.

П.В. Гилев¹, А.А. Папин²

АлтГУ, г. Барнаул

В работе доказана разрешимость задачи для системы уравнений фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде.

Ключевые слова: *двухфазная фильтрация, разрешимость, пороупругость.*

Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается сформулированная в [1] модель фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде в предположениях теории мелкой воды. После стандартного обезразмеривания системы уравнений, и предельного перехода по малому параметру, приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (s_i \phi u_i) = 0, \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$s_i \phi (u_i - u_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} - g \rho_i^0 \right), i = 1, 2, \quad (2)$$

$$s_1 + s_2 = 1, p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (3)$$

$$\frac{\partial (1 - \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 - \phi) u_3) = 0, \quad (4)$$

$$a_1(\phi) p_e + a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) = 0, \frac{\partial p_{tot}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta (1 - \phi) \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь ρ_i^0, \vec{u}_i, s_i и p_i – соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i -ой фазы ($i = 1$ – смачивающая фаза, $i = 2$ – несмачивающая фаза, $i = 3$ – твердый деформируемый скелет), ϕ – пористость (доля объема среды, приходящейся на пустоты), $p_e \equiv p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1 - \phi) p_3$ – общее давление, $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$ – давление жидкой фазы, $\rho_{tot} \equiv \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0) + (1 - \phi) \rho_3^0$ – общая плотность; $\eta, \xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и объемной сжимаемости среды, \vec{g} – плотность массовых сил; кроме

того, $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости, μ_i – динамическая вязкость i -ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ – относительная фазовая проницаемость, $p_c(s_1)$ – капиллярное давление есть заданные функции. Система (1) – (6) рассматривается в тонком слое $\Omega = \{(x, y) | -L \leq x \leq L; -H \leq y \leq H\}$ при фиксированном всюду значении z и при следующих дополнительных гипотезах: $\vec{u}_i = (u_i(x, y, t), 0), i = 1, 2, \vec{u}_3 = (u_3(y, t), 0), \vec{g} = (g, 0, 0), K_0(\phi) = \tilde{K}_0(\phi)\delta_{ij}, H/L \rightarrow 0$. Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$ и $t, \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ – оператор градиента, t – время. Истинные плотности принимаются постоянными.

В данной работе исследуется задача, состоящая из уравнений (4), (6) и начально-краевых условий вида:

$$u_3(-1, t) = u_3^-(t), u_3(1, t) = u_3^+(t), \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y). \quad (7)$$

В работе [2] задача решалась в предположении, что $\phi(x, y, t) = \phi_0(y)$.

В обозначениях функциональных пространств следуем [3].

Определение 1. Функции $u_3(y, t)$ и $\phi(x, y, t)$ называются решением задачи (4), (6), (7), если $u_3(y, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\Omega_T), \phi \in C^{1+\alpha}(\Omega_T)$, $u_3(y, t)$ и $\phi(x, y, t)$ – удовлетворяют уравнениям (4), (6) и начально-краевым условиям (7) как непрерывные в Ω_T функции, причем $0 < \phi < 1$.

Теорема. Решение в смысле определения 1 существует, если $u_3^-(t), u_3^+(t) \in C^1[0, T], \phi_0(x, y) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, при этом $1 - \phi_0(x, y)$ определена на

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} = \{ & (x, y) | -1 - \|u_3^-\|_C - \|u_3^+\|_C \leq x \leq \\ & \leq 1 + \|u_3^-\|_C + \|u_3^+\|_C, -1 < y < 1 \} \end{aligned}$$

и $0 < 1 - \phi_0(x, y) < 1, 1 - \phi_0(x, y) = f(x)g(y), f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, и при этом f и $\frac{df}{dx}$ удовлетворяют условию Липшица.

Задача решается методом последовательных приближений.

Положим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1 - \phi^N)}{\partial t} + u_3^N \frac{\partial(1 - \phi^N)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_3^N}{\partial y} (1 - \phi^{N-1}) \right) &= 0, \frac{\partial u_3^N}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

$$u_3^N(-1, t) = u_3^-(t), u_3^N(1, t) = u_3^+(t), \phi^N(x, y, 0) = \phi_0(x, y),$$

где N – натуральное число. В качестве $\phi^0(x, y)$ берется $\phi_0(x, y)$.

Схема доказательства: индукцией по N , доказывается, что если u_3^- и u_3^+ – ограниченные на $[0; T]$ функции, а $1 - \phi_0(x, y) > 0$ на $\bar{\Omega}$, то $\forall N |u_3^N| \leq \|u_3^+\|_C + \|u_3^-\|_C$. Затем, по аналогии с первым утверждением, доказывается, что для того, чтобы было выполнено

равенство $\frac{\partial u_3^N}{\partial x} = 0$, достаточно, потребовать выполнения условия $1 - \phi_0(x, y) = f(x)g(y)$ и $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. Одним из следствий этих утверждений будет тот факт, что если $0 < \varepsilon < \phi_0(x, y) < 1 - \varepsilon < 1$, то $0 < \varepsilon < \phi^N < 1 - \varepsilon < 1$. Далее, аналогично [4], доказывается, что, в этих предположениях и при условии липшицевости f и $\frac{df}{dx}$, последовательности функций ϕ^N и u_3^N – сходятся к некоторым функциям из $C^{1+\alpha}$ и $C^{2+\alpha, 1+\alpha}$ соответственно. Пользуясь определением сходимости в $C^{k+\alpha}$, показывается, что найденные предельные функции и есть искомое решение задачи (4),(6),(7). После этого рассматривается задача для системы (1)-(3),(5). Она сводится к эллиптико-параболической системе и исследуется методами работы [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания министерства высшего образования и науки Российской Федерации ("Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механике" тема FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. // Известия Алтайского государственного университета. 2015-№1-2. DOI:10.14258/izvasu(2015)1.2-24
2. Гилев П.В., Папин А.А. Исследование задачи двухфазной фильтрации в пороупругой среде в приближении двумерной ячейки Хеле-Шоу // Сборник тезисов евразийской конференции по прикладной математике. Новосибирск, Академгородок 16-22 декабря 2021г.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва, 1967.
4. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Барнаул. 2009.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск. 1983.

Математическое моделирование комбинированной терапии рака на основе ингибирования белков БЭТ (ВЕТ) семейства и иммунологических контрольных точек (checkpoint)

И.В. Каракулова

АлтГТУ, г. Барнаул

Работа посвящена литературному обзору математических моделей комбинированной терапии рака на основе ингибирования белков БЭТ семейства и иммунологических контрольных точек анти-CTLA-4.

Ключевые слова: *математическое моделирование, комбинированная терапия рака, иммунологические контрольные точки, оценка побочных эффектов от терапии.*

Проведённый библиографический обзор математического моделирования комбинированной терапии рака выявил наибольшую эффективность модели, разработанной группой американских и китайских учёных [1-7]. Концепция основана на комбинировании ингибиторов белков ВЕТ семейства и анти-CTLA-4 [1].

Бромодомен и экстратерминальный (ВЕТ) белок Brd4 рекрутирует транскрипционные регуляторные комплексы для ацетилованный хроматин. В то время как Brd4 считается общим регулятором транскрипции, фармакологический ингибирование белков ВЕТ проявляет терапевтическую активность при различных патологиях, особенно при модели рака и воспаления [2].

ВЕТi действует как противораковый агент, блокируя продукцию VEGF и подавляя экспрессию MYC (и, следовательно, пролиферацию раковых клеток). Хотя ВЕТi подавляет продукцию TNF- α макрофагами M1, общий эффект ВЕТi является противораковым [5-7]. Иммунологические контрольные точки - это регуляторы иммунной системы, которые подавляют её активный ответ против конкретных патогенных инфекций. Активизация иммунологической контрольной точки на противоопухолевой Т-клетке приводит к ослаблению противоопухолевого иммунного ответа, что в свою очередь приводит к «истощенному» фенотипу Т-клеток. CTLA-4 представляет собой поверхностный белок иммунного ингибитора, экспрессируемый на активированных Т-клетках; когда он соединяется со своим рецептором В7 на дендритных клетках, комплекс CTLA-4 – В7 действует как контрольная точка на противоопухолевых Т-клетках. В последние

годы был достигнут значительный прогресс в разработке ингибиторов контрольных точек, в первую очередь анти-CTLA-4, нейтрализующих антител против PD-1 и анти-PD-L1 [4]. Экспериментально было показано, что BETi подавляет экспрессию иммунного ответа лиганд контрольной точки PD-L1 и комбинация анти-PD-1 с BETi (JQ1) приводит к более высоким противоопухолевым ответам по сравнению с каждым лекарством [2], принимаемым отдельно.

Белки семейства бром- и экстра-терминальных (BET) регулируют транскрипцию нескольких онкогенов. Ингибиторы контрольных точек, такие как анти-CTLA-4, поддерживают противораковую активность цитотоксических Т-клеток. В данной работе рассматривается математическая модель для определения эффективности комбинированной терапии с ингибиторами BET и CTLA-4, которая построена на схеме взаимодействия, изображённой на рисунке 1 [1].

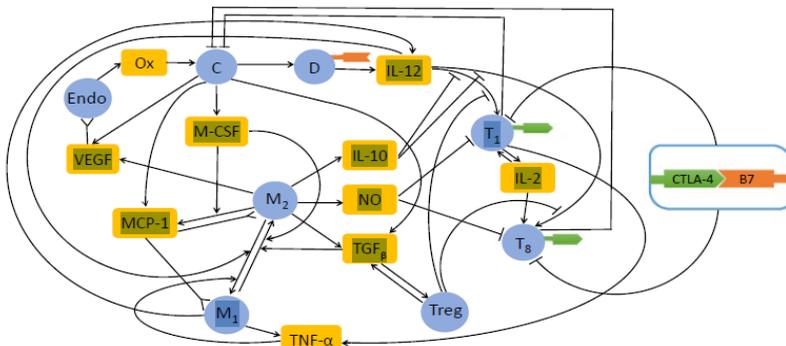


Рисунок 1 – Взаимодействие: C - раковых клеток; D- дендритных клеток; Endo - эндотелиальных клеток; M1 и M2 – макрофагов миелоидных клеток-супрессоров (MDSCs); NO - оксида азота; Oх - кислорода из крови; T1 - CD4+ Th1- клеток; T8 - CD8+ Т-клеток; Treg (Tr)- T- регуляторных клеток.

$$D + T_1 + T_8 + T_r + M_1 + M_2 + E + C = const ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}D) - \delta_D \nabla^2 D = \lambda_{DC} D_0 \frac{C}{K_C + C} - d_D D ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}E) - \delta_E \nabla^2 E = \lambda_E E \left(1 - \frac{E}{E_M} \right) (G - G_0)^+ - \nabla \cdot (\chi_G E \nabla G) - d_E E ,$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T_i) - \delta_r \nabla^2 T_i = \left(\lambda_{T_i I_{12}} T_{i0} \frac{I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} \frac{1}{1 + \frac{I_{10}}{K_{T_{10}}}} \frac{1}{1 + \frac{T_r}{K_{T_r}}} + \lambda_{T_i I_1} T_i \frac{I_2}{K_{I_2} + I_2} \right) \times \frac{1 + \varepsilon_{TB} B}{1 + \frac{Q}{K_{TQ}}} - d_{T_i} T_i, \text{ где } i = \{1, 8\}$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T_r) - \delta_r \nabla^2 T_r = \lambda_{T_r T_\beta} T_{10} \frac{T_\beta}{K_{T_\beta} + T_\beta} \times \frac{1}{1 + \frac{B}{K_{T,B}}} - d_{T_r} T_r,$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}M_i) - \delta_M \nabla^2 M_i = \lambda_{M_i} (M_{i0} - M_i)^+ \cdot \frac{M_P}{K_{M_P} + M_P} - \nabla \cdot (\chi_M M_i \nabla M_P) + (-1)^{i+1} \beta_{M_2} M_2 \left(\frac{I_{12}}{K_{I_{12}} + I_{12}} + \frac{T_\alpha}{K_{T_\alpha} + T_\alpha} \right) + (-1)^i \beta_{M_1} M_1 \left(\frac{T_\beta}{K_{T_\beta} + T_\beta} + \frac{M_C}{K_{M_C} + M_C} \right) - d_{M_i} M_i, \text{ где } i = \{1, 2\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C) - \delta_C \nabla^2 C = \lambda_C (W) C \left(1 - \frac{C}{C_M} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{K_{CB}}} - (\eta_1 T_1 C + \eta_8 T_8 C) \cdot \frac{1}{1 + \frac{N}{K_{TK}}} - d_C C,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \delta_A \nabla^2 A = \gamma_A - \mu_{LA} LA - d_A A,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \delta_B \nabla^2 B = \gamma_B - (\mu_{BC} C + \mu_{BM_1} M_1) \frac{B}{K_B + B} - d_B B.$$

Для упрощения расчётов на начальном этапе опухоль принимается в виде сферы. Её радиус обозначен за $r = R(t)$. Предполагается, что все плотности и концентрации радиально симметричны, то есть функции от (r, t) , где $0 \leq r \leq R(t)$. $\mathbf{u} = u(r, t)\mathbf{e}_r$, где \mathbf{e}_r — единичный радиальный вектор. Моделирование проводится в области со свободной границей.

Предполагается, что свободная граница $r = R(t)$ движется со скоростью клеток.

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(R(t), t).$$

Модель также показывает при различных комбинациях доз, которые приводят к одинаковому уменьшению объёма опухоли, в какой пропорции выбрать два препарата для минимизации повышенного уровня провоспалительного TNF- α , для этого определяется функция эндотелиальных клеток через относительный объём опухоли – V на момент завершения расчётов с разной концентрацией ингибиторов:

$$E(\gamma_B, \gamma_A) = \frac{V_{End}(0, 0) - V_{End}(\gamma_B, \gamma_A)}{V_{End}(0, 0)}.$$

Проведённый библиографический анализ выявил один из эффективных на сегодняшний день подходов к математическому моделированию терапии рака.

Библиографический список

1. Lai X., Stiff F., Duggan M., Wesolowski R., Carson III W. E., Friedman A. Modeling combination therapy for breast cancer with BET and immune checkpoint inhibitors // Proc Natl Acad Sci USA. 2018. 115(21): 5534–5539. DOI: 10.1073/pnas.1721559115.
2. Junwei S, Vakoc C.R. The mechanisms behind the therapeutic activity of bet bromodomain inhibition // [Mol Cell. 2014. 54\(5\): 728–736.](#) DOI: [10.1016/j.molcel.2014.05.016.](#)
3. Wilson S, Levy D. A mathematical model of the enhancement of tumor vaccine efficacy by immunotherapy // Bull Math Biol. 2012. 74(7): DOI: 10.1007/s11538-012-9722-4.
4. Lai X, Friedman A. Combination therapy of cancer with cancer vaccine and immune checkpoint inhibitor: A mathematical model // PLoS One. 2017. 12(5): e0178479. DOI: 10.1371/journal.pone.0178479.
5. Zhu H, et al. Bet bromodomain inhibition promotes anti-tumor immunity by suppressing pd-11 expression // Cell Rep. 2016. 16(11): 2829–2837. DOI: 10.1016/j.celrep.2016.08.032.
6. Adeegbe D, et al. Synergistic immunostimulatory effects and therapeutic benefit of combined histone deacetylase and bromodomain inhibition in non-small cell lung cancer // Cancer Discov. 2017. 7(8): 852–867. DOI: 10.1158/2159-8290.CD-16-1020.
7. Hao W., Friedman A. Serum upar as biomarker in breast cancer recurrence: A mathematical model // PLoS One. 2016. 11(4): e0153508. DOI: 10.1371/journal.pone.0153508.

Анализ условий детонации перед фронтом пламени в водородном двигателе. I. Математическая модель

А.А. Коржавин¹, А.П. Сеначин²

¹Институт химической кинетики и горения СО РАН, г. Новосибирск; ²АлтГУ, г. Барнаул

Численно анализируются условия детонации в водородном двигателе с искровым зажиганием, вызванной самовоспламенением, (тепловым взрывом) смеси перед фронтом пламени.

Ключевые слова: *водородный двигатель, самовоспламенение, тепловой взрыв, математическая модель, численное моделирование.*

В работе моделируется самовоспламенение или тепловой взрыв (ТВ), с последующей детонацией, водородно-воздушной смеси перед фронтом пламени в двигателях с искровым зажиганием. Известно, что детонация («стук») смеси перед фронтом пламени приводит к разрушению деталей цилиндра-поршневой группы и выходу двигателя из строя. Подобное явление, применительно к закрытому сосуду, по-видимому, впервые аналитически рассмотрено в [1], а в двигателях процесс перехода фронтального горения в ТВ перед фронтом пламени экспериментально и теоретически изучался в [2-6] и других работах. Для водородных двигателей с искровым зажиганием (SI Engines) подобные исследования ТВ практически отсутствуют.

Турбулентный фронт пламени распространяется от точечного источника в сферических сечениях камеры сгорания и цилиндра двигателя. ТВ перед фронтом пламени обусловлен адиабатическим (быстрым) сжатием смеси поршнем и в результате расширения продуктов фронтального горения. В задаче имеем конкуренцию трех времен – фронтального горения смеси и движущегося поршня и периода индукции ТВ. Задача решается численно в фазовой плоскости частота вращения – угол зажигания (при варьировании степени сжатия для смесей различного стехиометрического состава). В отличие от более раннего нашего подхода [7], математическая модель учитывает выгорание смеси в течение периода индукции ТВ. Требуется выяснить возможность и условия ТВ в водородном двигателе и его особенности по сравнению с двигателями, работающими на традиционном топливе. Данная задача может решаться с привлечением детального кинетического механизма (ДКМ) или на базе уравнения глобальной кинетики (макрокинетики).

Математическая модель рассматриваемого процесса в двигателе в функции угла $\varphi = 2\pi n_0 t$ поворота коленчатого вала (ПКВ) включает уравнения [7-9]:

- динамики объема цилиндра двигателя с камерой сгорания и зонами исходной (но реагирующей) смеси и продуктов горения и баланса объема системы

$$\frac{dV}{d\varphi} = V_c \frac{\varepsilon-1}{2} \sin \varphi \left(1 + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1/\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} \right), \quad (1)$$

$$V = V_u + V_b, \quad (2)$$

где n_0, t – частота вращения вала и время, V_c – объем камеры сгорания, V_u, V_b – объемы газов перед фронтом и после фронта пламени, $\lambda = r/l$ – отношение радиуса кривошипа к длине шатуна, ε – геометрическая степень сжатия;

- состояния смеси перед фронтом и после фронта пламени

$$pV_u = \frac{m}{M_u} (1-x)RT_u, \quad M_u = \sum_j a_j M_j = \text{vario}, \quad (3)$$

$$pV_b = \frac{m}{M_b} xRT_b, \quad M_b = \text{const}, \quad (4)$$

где p – давление, m – полная масса газа; M_u, M_b и T_u, T_b – средняя молярная масса и температура газа перед фронтом и после фронта пламени; a_j – молярная доля j -го компонента смеси перед фронтом пламени; x – массовая доля газа после фронта пламени; R – универсальная газовая постоянная;

- энергии газа перед фронтом и после фронта пламени

$$\frac{dT_u}{d\varphi} = \frac{RT_u}{C_{pu}} \left(\frac{dp}{pd\varphi} + \frac{dQ_u}{pV_u d\varphi} + \frac{H_u}{RT_u M_u} \sum_j \frac{da_j}{d\varphi} M_j \right), \quad (5)$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} = \frac{RT_b}{C_{pb}} \left[\frac{dp}{pd\varphi} + \frac{dQ_b}{pV_b d\varphi} + \frac{m}{pV_b} \left(\frac{H_u}{M_u} - \frac{H_b}{M_b} \right) \frac{dx}{d\varphi} \right], \quad (6)$$

где C_{pu}, C_{pb} и H_u, H_b – молярные теплоемкости и энтальпии газов; Q_u, Q_b – теплообмен частей газа с окружающей средой;

- динамики давления в системе

$$\left(V - \frac{R}{C_{pu}} V_u - \frac{R}{C_{pb}} V_b \right) \frac{dp}{d\varphi} = -p \frac{dV}{d\varphi} + \frac{Rm}{C_{pb}} \left(\frac{H_u}{M_u} - \frac{H_b}{M_b} \right) \frac{dx}{d\varphi} - p \left(\frac{V_u}{1-x} - \frac{V_b}{x} \right) \frac{dx}{d\varphi} + \frac{pV_u}{M_u} \left(\frac{H_u}{C_{pu}} - 1 \right) \sum_j \frac{da_j}{d\varphi} M_j + \frac{R}{C_{pu}} \cdot \frac{dQ_u}{d\varphi} + \frac{R}{C_{pb}} \cdot \frac{dQ_b}{d\varphi}; \quad (7)$$

- динамики относительных (a_j) и абсолютных (A_j) концентраций компонентов смеси (j -х частиц) перед фронтом пламени) [7]

$$\frac{da_j}{d\varphi} = a_j \left(\frac{dA_j}{A_j d\varphi} - \frac{dp}{pd\varphi} + \frac{dT_u}{T_u d\varphi} \right), \quad (8)$$

$$\frac{dA_j}{d\varphi} = \frac{B_j}{2\pi n_0} + A_j \left(\frac{dp}{pd\varphi} - \frac{dT_u}{T_u d\varphi} - \frac{RT_u}{2\pi n_0 p} \sum_j B_j \right), \quad (9)$$

$$B_j = \sum_i W_{ij}, \quad \sum_j B_j = \sum_i \sum_j W_{ij},$$

где B_j – скорости образования j -х частиц в единице объема,

W_{ij} - скорость образования j -й частицы в i -й реакции (для ДКМ или глобальной кинетики), $\sum_j B_j$ - скорость образования частиц в единице объема (молярного превращения перед фронтом пламени), n_0 - частота вращения коленчатого вала;

- динамики скорости фронтального горения (массовой доли) [7-9]

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{F_f}{2\pi n_0} \cdot \frac{1-x}{v_u} \sqrt{S_u^2 + u_t^2} \quad (10)$$

где F_f - площадь поверхности фронта пламени, определяемая как поверхность сферических сечений рабочего объема через приведенную координату фронта пламени r_f и текущую координату поршня z ;

$$S_u = S_{u0}(p/p_0)^{m_p}(T/T_0)^{m_T}, \quad (11)$$

$$u_t = k_t u_p = 4r n_0, \quad (12)$$

где S_{u0} - скорость пламени при нормальных условиях; p_0, T_0 - нормальные давление и температура; k_t, u_p, r - коэффициент турбулентности пламени, средняя скорость поршня и радиус кривошипа, m_p, m_T - эмпирические коэффициенты.

В задаче (1)-(12) заданы начальные условия по давлению, температуре и концентрации частиц в моменты закрытия впускного клапана (индекс "а") и искрового зажигания (индекс "1")

Для решения задачи (1)-(12) необходимо задать блок уравнений детального кинетического механизма (ДКМ) окисления водорода при высоких давлениях (например [10]) или воспользоваться надежным уравнением макрокинетики (например [11])

Не зависимо от того, выбрана ли кинетика ДКМ или соответствующая макрокинетика, в уравнении (9) величины W_{ij} скорости образования x частиц (компонентов газовой смеси) в i -х реакциях определяются как произведение $W_i \xi_{ij}$ - скорости i -й реакции W_i (в случае макрокинетики $i = 1$) на соответствующий стехиометрический коэффициент ξ_{ij} в этой реакции.

Численное интегрирование уравнений (1)-(12) производится по собственной программе методом Рунге-Кутты четвертого порядка и с привлечением других методов решения систем жестких уравнений.

Библиографический список

1. Сеначин П.К., Бабкин В.С. Самовоспламенение газа перед фронтом пламени в закрытом сосуде // Физика горения и взрыва. - 1982. - Т. 18, № 1. - С. 3-8.
2. Nakaguwa Y., Takagi Y., Itoh T., Iijima T. Laser Shadowgraphic Analysis of Knocking in SI Engine // SAE Paper. - 1984. - No. 845001.

3. König G., Sheppard C.G.W. End Gas Autoignition and Knock in a Spark Ignition Engine: A Theoretical and Experimental Study of the Modes of End Gas Autoignition Leading to Knock in SI Engines // SAE Paper. - 1990. - No. 902135.

4. Pan J., Sheppard C.G.W. A Theoretical and Experimental Study of the Modes of End Gas Autoignition Leading to Knock in SI Engines // SAE Paper. - 1994. - No. 942060.

5. Сеначин П.К., Бабкин В.С., Борисенко А.В.. Самовоспламенение смеси перед фронтом пламени в поршневых двигателях с искровым зажиганием // Физика горения и взрыва. - 1997. - Т. 33, № 6. - С. 3-13.

6. Bradley D., Kalghatgi G.T. Influence of Autoignition Delay Time Characteristics of Different Fuels on Pressure Waves and Knock in Reciprocating Engines // Combustion and Flame. - 2009. - Vol. 156 (8). - P. 2307-2318.

7. Сеначин П.К., Сеначин А.П. Моделирование самовоспламенения перед фронтом пламени в двигателях с искровым зажиганием на основе детальной кинетики элементарных реакций // Известия Самарского научного центра РАН. - 2011. - Том 13, № 1(2). - С. 487-491.

8. Сеначин А.П. Моделирование образования токсичных веществ в двигателе с искровым зажиганием // Ползуновский вестник. - Барнаул, 2012. - № 3/1. - С. 140-149.

9. Brutov A.A., Senachin A.P., P.K. Senachin P.K. Turbulent Charge Burning in SI Engines // Journal of Physics Conference Series. - 2019. - No. 1382, December.

10. Li J., Zhao Z., Kazakov A., Dryer F.L. An Updated Comprehensive Kinetic Model of Hydrogen Combustion // Int. J. Chem. Kinet. - 2004. - No. 36. - P. 566-575. - DOI: 10.1002/kin.20026.

11. Бунев В.А., Сеначин А.П. Численное моделирование окисления водорода при высоких давлениях с помощью глобальной кинетики // Известия Алтайского государственного университета. - Барнаул, 2022. - №1 (123). - С. 83-88. - DOI: 10.14258/izvasu(2022)1-13.

УДК 532.135

**Новая реологическая модель концентрированных
полимерных систем как аппроксимация
мезоскопического подхода в их динамике**

А.А. Лаас

*Алтайский государственный университет, Барнаул,
Российская Федерация*

В работе предложена новая структурно-феноменологическая реологическая модель, которую можно рекомендовать для инженерных расчетов течений растворов и расплавов полимеров. Тензор дополнительных напряжений содержит два слагаемых: стационарный вклад и тензор возмущений. Простота и надежность реологической модели обусловлены линейным характером уравнения для тензора возмущений, которое получено исходя из модифицированной модели Виноградова-Покровского. Расчет стационарного вклада предложено проводить по аппроксимационным выражениям, содержащим неизвестные функции. Для определения этих функций используется условие адекватности моделирования стационарных вискозиметрических течений. Это позволило вместо неизвестных функций ввести в рассмотрение семь скалярных параметров. На основе полученной модели были рассчитаны стационарные вискозиметрические функции при простом сдвиге и одноосном растяжении: стационарная сдвиговая вязкость, коэффициент первой разности нормальных напряжений, стационарная вязкость при одноосном растяжении. Также было исследовано влияние параметров модели на вид этих зависимостей. Показано, что модель с хорошей точностью описывает нелинейное вязкоупругое поведение текучих полимерных систем: аномалию вязкости, падение коэффициента первой разности нормальных напряжений, немонотонный характер зависимости стационарной вязкости при растяжении от скорости растяжения. Проведено сравнение вискозиметрических функций с экспериментальными данными для расплава промышленного образца полиэтилена. Также на основе полученной модели методом конечных элементов были выполнены расчеты напорного течения полимерной жидкости в каналах с параллельными стенками под действием постоянного перепада давления. Для сравнения были взяты канал с квадратным сечением и

целевой канал. При анализе линий тока показано, что в канале с квадратным сечением образуются восемь вихревых зон, а в целевом канале их только четыре.

Ключевые слова: реология, полимеры, реологическая модель, сдвиговая вязкость, вязкоупругость, нелинейные эффекты, одноосное растяжение, вязкость при растяжении.

Изучение вязкоупругих неустойчивостей и других проявлений нелинейности в реологии полимерных сред имеет широкое практическое значение и вызывает растущий интерес. Обнаружить нелинейные эффекты можно уже в самых простых экспериментах. Например, в простом сдвиговом течении, осциллирующем сдвиговом течении или одноосном растяжении. Часто такие измерения непосредственно имеют практическое значение, так как позволяют выбрать оптимальные режимы хранения, переработки и доставки до потребителя производимой продукции. Применение математического моделирования в различных областях инженерной практики предоставляет исследователям ряд существенных преимуществ [1-5]. Главным требованием к математической модели является ее адекватность [1-9]. Теоретическая значимость изучения нелинейных эффектов обусловлена возможностью тестирования применяемых реологических моделей и выбора наиболее адекватной модели, а также возможностью дальнейшего прогноза с помощью выбранных моделей [2]. В литературе упоминается несколько реологических моделей, которые с приемлемой для практики точностью описывают нелинейные эффекты при одноосном растяжении и простом сдвиге, поэтому возникает потребность в проведении и последующей интерпретации реологических измерений с более сложной структурой течений. Вместе с тем к инженерным моделям предъявляют требования простоты и надежности в вычислениях [10,11].

Все модели разделяют на два принципиально разных класса, которые отличаются подходами к описанию процессов, это феноменологический и микроструктурный подход. К феноменологическому типу относят модели Максвелла [12], Олдройда [13], Прокунина–Леонова [4,14], а также модель К-ВКЗ [15]. Из реологических моделей мезоскопического подхода чаще всего используются модель РТТ [7], модель Гизекуса [3], модель Pom-Pom [5,8,9] и Виноградова–Покровского [1,6,15-17].

Реологическая модель Максвелла [2] первой была предложена для описания вязкоупругости и фактически является интерполяцией между ньютоновской вязкой жидкостью и гуковским упругим телом. Эта

модель используется для определения компонент динамического модуля сдвига, функций релаксации и запаздывания. Исследование функции релаксации показывает ее монотонность, что объясняет согласие модели с термодинамическими принципами. Заметим, что в этом случае течения жидкости не происходит, исследуемый образец подвергается периодическим воздействиям по гармоническому закону.

Модель Олдройда [13] обобщает модель Максвелла на случай течения линейной вязкоупругой жидкости, сопровождающегося переносом вязкоупругих напряжений в направлении потока. Хотя эта модель пригодна для описания только линейной вязкоупругости, тем не менее она широко используется в инженерной практике при проведении тестовых расчетов.

Вязкоупругое поведение полимерных систем, основанное на модели Леонова–Прокунина [4,14], исследуется для роста напряжения при постоянной скорости деформации, роста напряжения при постоянной скорости сдвига и упругого восстановления при растяжении. Параметры модели определяются на основе имеющихся реологических данных, полученных либо в установившемся сдвиговом течении (сдвиговая вязкость и первая разность нормальных напряжений как функции скорости сдвига), либо в осциллирующем сдвиговом течении (модули сдвига и потерь как функции частоты в линейной области), или при одноосном растяжении при малых скоростях деформации (зависящая от времени элонгационная вязкость в пределе линейной вязкоупругости). Полученные прогнозы хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными из литературы.

Альтернативная формулировка реологического уравнения состояния вязкоупругих материалов с акцентом на высокомолекулярные вязкоупругие жидкости может быть представлена обобщением идеализированной модели Максвелла путем разделения механизмов упругости и релаксации. Понятие относительной скорости изменения упругого напряжения формулируется в рамках нелинейной теории упругости изотропных материалов. Для описания нелинейной вязкоупругости полимерных расплавов сформулировано понятие скорости изменения упругого напряжения и его демпфированного накопления. В условиях умеренных скоростей деформации данная схема приводит к интегральной реологической модели К-ВКЗ [15] для полимерных расплавов.

В моделях, основанных на микроструктурном подходе в основу положены представления о динамике полимерных цепей. Так как

детальное рассмотрение динамики на молекулярном уровне невозможно, то в таких подходах используют упрощения, движение макромолекул описывают с помощью движения центров трения-«бусинок», соединенных упругими силами – «пружинками». При этом описание концентрированных полимерных систем требует дополнительных предположений. Это могут быть «сеточные», «трубочные» модели или модели, основанные на обобщенном законе трения. Такие модели еще называют мезоскопическими.

Широкий класс реологических моделей порождается «сеточной» моделью Фан-Гъена-Таннера (РТТ) [7]. Эти модели подходят для описания поведения типичных полимерных растворов и расплавов, со свойствами размягчения при сдвиге и деформационного упрочнения.

Модель Гизекуса, предложенная около сорока лет назад [3], положила начало моделям с обобщением коэффициента трения бусинок. Она широко применяется и в настоящее время. В этой модели течение полимерной среды описывается нелинейным дифференциальным уравнением, полученным на основе рассмотрения динамики модели-гантели, и содержащим один параметр, что ограничивает ее применение.

В последние годы был достигнут прогресс в моделировании длинноцепочных разветвленных полимеров за счет введения вместо модели-гантели так называемой модели rom-rom. Это несколько бусинок, связанных упругими силами с двумя центральными бусинками. Первоначально разработанная в работе [5], модель претерпела несколько изменений, что привело к появлению новых формулировок [8-9]. Однако некоторые из этих формулировок обладают определенными математическими недостатками. Поэтому в дальнейшем была предложена альтернативная ее формулировка [8], которая, по-видимому, не демонстрирует математических дефектов. На основе модели [9] исследуются реологические характеристики расплава LDPE в нетривиальных реометрических течениях. Выбранные течения представляют собой двухступенчатую деформацию, а также эксперименты с осциллирующим сдвигом большой амплитуды. Для экспериментов LAOS сравнение включает использование анализа преобразования Фурье.

Наиболее важные реологические и математические особенности Rom-Rom модели в настоящее время используются для сравнения и улучшения других реологических уравнений состояния, таких как модели Гизекуса [3] и РТТ [7]. Предлагаемые изменения к моделям оцениваются в реометрических течениях путем сравнения предсказаний модели с экспериментальными данными.

Отличительной чертой модифицированной модели Виноградова–Покровского или mVP модели [1,6,15-17] является учет тензорного характера коэффициента трения бусинок, связанного с наведенной анизотропией сдвигового потока. Данный вид анизотропии определяется размерами и формой макромолекулярного клубка, что приводит к появлению в уравнениях динамики соответствующих коэффициентов.

Большинство существующих реологических моделей дают хорошие результаты для описания вискозиметрических функций, поэтому их можно использовать для моделирования более сложных течений растворов и расплавов полимеров. Однако проведение расчетов в областях с нерегулярной геометрией может приводить к численной неустойчивости, что требует применения достаточно сложных методов регуляризации. При использовании таких моделей в инженерной практике можно столкнуться с ситуацией, когда незначительное изменение параметров течения приведет к невозможности получить решение.

Покажем, как сформулировать реологическую модель пригодную для использования в инженерных расчетах, опираясь на модель mVP модель, которая имеет вид [2-6]:

$$\sigma = -pI + \frac{3\eta_0}{\tau_0} \left(a - \frac{1}{3} \text{tr } a \cdot I \right) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} a - \nabla v \cdot a - a(\nabla v)^T + \frac{1+(\kappa-\beta)\text{tr } a}{\tau_0} a = \frac{2}{3} \gamma - 3 \frac{\beta}{\tau_0} a \cdot a. \quad (2)$$

Здесь σ является тензором полных напряжений; p – гидростатическое давление; I – единичный тензор; η_0 и τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации; v – скорость; γ – симметричный тензор скоростей деформации; оператор ∇ означает взятие градиента; a – симметричный тензор наведенной анизотропии; $\text{tr } a$ – след безразмерного тензора a ; κ и β – параметры наведенной анизотропии, которые учитывают в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму макромолекулярного клубка соответственно.

Эта модель показала хорошие результаты при описании вискозиметрических течений, однако при ее дальнейшем использовании, например, при моделировании течений в областях со сложной геометрией, можно столкнуться с рядом трудностей.

Недостатком этой модели будет наличие множественности стационарных решений, которая связана с наличием в уравнении (2) слагаемых $a \cdot a$ и $\nabla v \cdot a$. При проведении расчетов течений в областях со сложной геометрией это может приводить к неустойчивости численных алгоритмов. Попробуем сформулировать, опираясь на систему уравнений (1,2), новую реологическую модель, которая будет лишена такого недостатка. Тензор a – зависит от ∇v и t . Выделив стационарную часть, представим a в виде:

$$a(\nabla v; t) = s(\nabla v) + \varepsilon(\nabla v; t), \text{ где} \quad (3)$$

$$\frac{1+(\kappa-\beta)tr s}{\tau_0} s = \frac{2}{3} \gamma + \nabla v \cdot s + s(\nabla v)^T - 3 \frac{\beta}{\tau_0} s \cdot s \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon - \nabla v \cdot \varepsilon - \varepsilon \cdot (\nabla v)^T + \frac{1+(\kappa-\beta)tr s}{\tau_0} \varepsilon = -3 \frac{\beta}{\tau_0} (a \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot a) \quad (5)$$

В (5) опущены слагаемые пропорциональные $\varepsilon \cdot \varepsilon$. Перепишем (4) в виде

$$\frac{1+(\kappa_0 D)^{n_0}}{\tau_0} s = \frac{2}{3} \gamma + \tau_0 \cdot \sigma_1(D)(\omega \cdot \gamma + \gamma \cdot \omega^T) + \tau_0 \cdot \sigma_2(D) \gamma \cdot \gamma, \quad (6)$$

где $D = (\tau_0)^2 tr(\gamma \cdot \gamma)$ – это безразмерный первый инвариант квадрата тензора γ . Выражение (6) является удобной аппроксимацией зависимостей, порождаемых уравнением (4), которое может иметь несколько решений.

Таким образом, система уравнений (1,3,5,6) представляют собой новую реологическую модель, которую можно назвать структурно - феноменологической реологической моделью (SPRM – structural-phenomenological rheological model) и которая удовлетворяет принципу материальной объективности Олдройда [2]. Если продолжить процедуру упрощения, то вместо (5) и (6) можно записать

$$\frac{d}{dt} a + \frac{1+(\kappa_0 D)^{n_0}}{\tau_0} a = \frac{2}{3} \gamma + \tau_0 \cdot \sigma_1(D)(\omega \cdot \gamma + \gamma \cdot \omega^T) + \tau_0 \cdot \sigma_2(D) \gamma \cdot \gamma,$$

где κ_0 , n_0 , $\sigma_1(D)$, $\sigma_2(D)$ – параметры модели. κ_0 , n_0 – константы, $\sigma_1(D)$, $\sigma_2(D)$ – функции инварианта D , которые определим далее.

Система уравнений (1), (7) уже не является реологическим определяющим соотношением в классическом понимании, так как для нее принцип материальной объективности [2] не выполняется. Однако ее стационарные решения совпадают со стационарными решениями системы SPRM и погрешность, допущенная при замене (5,6) на (7), будет проявляться только на начальном участке временной зависимости компонент тензора a и будет пропорциональна D или квадрату градиента скорости. Поэтому уравнение (7) будет представлять собой аналог SPRM, который назовем SPAR моделью. Следует ожидать, что SPAR модель будет успешно использована при проведении инженерных расчетов течений полимерных жидкостей.

Рассмотрим теперь параметры модели $\sigma_1(D)$, $\sigma_2(D)$. Определим их так, чтобы рассчитанные ее основе стационарные (в этом случае $a(\nabla v) = s(\nabla v)$) вискозиметрические функции адекватно описывали поведение реальных полимерных сред. Для этого сначала рассмотрим простое сдвиговое течение. В этом случае только одна компонента тензора градиентов скорости $v_{12} = \varepsilon$ отлична от нуля. Также для наглядности будем использовать индексы для обозначения компонент тензоров.

$$a_{ik} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_0}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \gamma_{ik} + \frac{\sigma_1(D_0)(\tau_0)^2}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} (\omega_{ij} \cdot \gamma_{jk} + \omega_{kj} \cdot \gamma_{ji}) + \frac{\sigma_2(D)(\tau_0)^2}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \gamma_{ij} \cdot \gamma_{jk} \quad (8)$$

$$D = \frac{\varepsilon^2}{2} (\tau_0)^2, \gamma = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & 0 \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon/2 \\ -\varepsilon/2 & 0 \end{bmatrix}, \omega \cdot \gamma = \gamma \cdot \omega^T = \begin{bmatrix} \varepsilon^2/4 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2/4 \end{bmatrix},$$

$$\gamma \cdot \gamma = \begin{bmatrix} \varepsilon^2/4 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2/4 \end{bmatrix}$$

$$\eta(D) = \frac{\eta_0}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}}, \sigma_1(D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}}{1+(\kappa_1 \cdot D)^{n_1}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_1 \cdot \tau_0^2}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \begin{bmatrix} \varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2/2 \end{bmatrix} + \frac{\sigma_2 \cdot \tau_0^2}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \begin{bmatrix} \varepsilon^2/4 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2/4 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{\sigma_1 \cdot (D)}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot (D)}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{4}$$

$$a_{22} = -\frac{\sigma_1 \cdot (D)}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot (D)}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{4}$$

$$\psi_1 = \frac{3\eta_0}{\tau_0} \cdot \frac{a_{11} - a_{22}}{\varepsilon^2} = \frac{3\eta_0}{\tau_0 \cdot \varepsilon^2} \left(\frac{\sigma_1(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{2} \cdot 2 \right) = 3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \frac{\sigma_1(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} = \frac{3\eta_0 \cdot \tau_0}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}}{1 + (\kappa_1 \cdot D)^{n_1}}$$

$$\psi_1(D) = \frac{2\eta_0 \cdot \tau_0}{1 + (\kappa_1 \cdot D)^{n_1}}, D = \frac{1}{2}(\varepsilon \cdot \tau_0)^2, \sigma_2(D) = \frac{A(1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0})}{1 + (\kappa_2 \cdot D)^{n_2}}$$

Найдем A из условия

$$\frac{\psi_2(0)}{\psi_1(0)} = -\frac{\beta}{2}, \psi_1(0) = 2\eta_0 \cdot \tau_0$$

$$\psi_2(D) = \frac{3\eta_0}{\tau_0} \cdot \frac{a_{22}}{\varepsilon^2} = \frac{3\eta_0}{\tau_0 \cdot \varepsilon^2} \left(-\frac{\sigma_1(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{2} + \frac{\sigma_2(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{(\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{4} \right) =$$

$$= 3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \left(-\frac{\sigma_1(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sigma_2(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \right)$$

$$\psi_2(0) = 3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \left(-\frac{\sigma_1(0)}{2} + \frac{\sigma_2(0)}{4} \right)$$

$$\sigma_1(0) = \frac{2}{3}, \sigma_2(0) = A, \psi_1(0) = 2\eta_0 \cdot \tau_0$$

Тогда $\psi_2(0) = 3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{A}{4} \right) = 3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{3} \right)$. $\frac{\psi_2(0)}{\psi_1(0)} =$

$$\frac{3\eta_0 \cdot \tau_0 \cdot \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{3} \right)}{2\eta_0 \cdot \tau_0} = \frac{3}{8}A - \frac{1}{2} = -\frac{\beta}{2}, \text{ откуда следует: } A = \frac{4}{3}(1 - \beta).$$

Тогда $\sigma_2(D) = \frac{4}{3}(1 - \beta) \cdot \frac{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}}{1 + (\kappa_2 \cdot D)^{n_2}}$

Теперь рассмотрим на основе модели (1,7) одноосное растяжение.

$$(\nu_{ij}) = (\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon/2 \end{pmatrix}, \omega = 0, \gamma \cdot \gamma =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2/4 \end{pmatrix}, D = \frac{3}{2}\tau_0^2 \cdot \varepsilon^2$$

Подставив в (8)

$$a_{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_0 \cdot \varepsilon}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} + 0 + \frac{\sigma_2(D) \cdot \tau_0^2 \cdot \varepsilon^2}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}}$$

$$a_{22} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_0 \cdot \varepsilon}{2(1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0})} + \frac{\sigma_2(D)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \cdot \tau_0^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\varepsilon} = \frac{3\eta_0}{\tau_0 \cdot \varepsilon} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau_0 \cdot \varepsilon}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_2(D) \cdot (\tau_0 \cdot \varepsilon)^2}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \right)$$

$$\lambda(\varepsilon) = 3\eta_0 \left(\frac{1}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_2(D) \cdot (\tau_0 \cdot \varepsilon)}{1 + (\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \right)$$

Введем безразмерную скорость растяжения $s = \tau_0 \cdot \varepsilon$

$$\lambda(s) = 3\eta_0 \left(\frac{1}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_2 \cdot (D) \cdot s}{1+(\kappa_0 \cdot D)^{n_0}} \right) == \frac{3\eta_0}{1+(\kappa_0 \cdot \frac{3}{2} s^2)^{n_0}} \cdot$$

$$\left(1 + (1 - \beta) \cdot \frac{s}{1+(\kappa_2 \cdot \frac{3}{2} s^2)^{n_2}} \right)$$

Таким образом, основе SPAR модели были рассчитаны стационарные вискозиметрические функции и исследовано влияние параметров модели на вид этих зависимостей:

Стационарная сдвиговая вязкость:

$$\eta(s) = \frac{\eta_0}{1+(\kappa_0 \cdot s^2/2)^{n_0}} \quad (9)$$

Коэффициент первой разности нормальных напряжений:

$$\psi_1(s) = \frac{2\eta_0 \tau_0}{1+(\kappa_1 \cdot s^2/2)^{n_1}} \quad (10)$$

Стационарная вязкость при одноосном растяжении:

$$\lambda(s) = \frac{3\eta_0}{1+(\kappa_0 \cdot \frac{3}{2} s^2)^{n_0}} \left(1 + \frac{(1-\beta) \cdot s}{1+(\kappa_2 \cdot \frac{3}{2} s^2)^{n_2}} \right) \quad (11)$$

где $s = \tau_0 \nu_{12}$ - безразмерная скорость сдвига или $s = \tau_0 \varepsilon$ - безразмерная скорость растяжения.

Из выражений (9-11) видно, что реологическое поведение системы характеризуется параметрами κ_0 , n_0 , κ_1 , n_1 , κ_2 , n_2 и β . Также из (9-11) можно сделать вывод, что η и ψ_1 - убывающие функции скорости сдвига, λ демонстрирует немонотонную зависимость, сначала вязкость при растяжении является возрастающей функцией скорости растяжения, а затем после перехода через максимум, убывает.

Рассмотрим, как влияют параметры κ_0 , n_0 , κ_1 , n_1 , κ_2 , n_2 и β на вид вискозиметрических функций (9-11). Как видно из выражения (9) параметры κ_0 , n_0 влияют только на стационарную сдвиговую вязкость. Характер их влияния виден на рисунках 1 и 2, откуда следует, что при малых s $\eta(s)$ принимает постоянные значения - η_0 , с ростом s $\eta(s)$ убывает с постоянным наклоном. При увеличении κ_0 зависимости $\eta(s)$ сдвигаются влево без изменения своего наклона. С ростом n_0 (рисунок 2) наклон кривых увеличивается и при этом сдвига зависимостей не наблюдается.

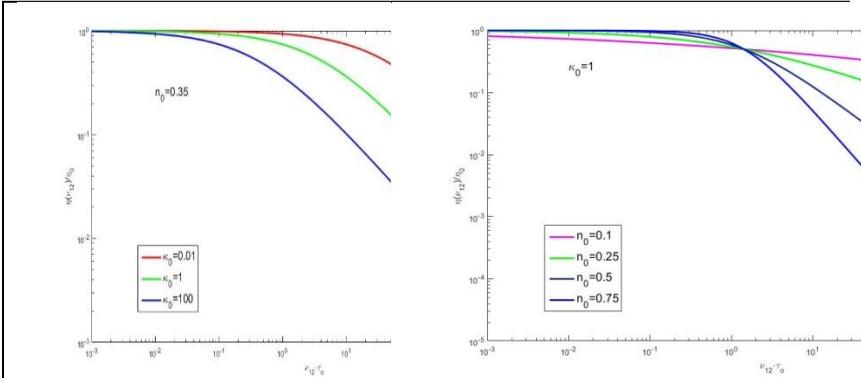


Рисунок 1 - Влияние параметра модели κ_0 на зависимость сдвиговой вязкости от градиента скорости

Рисунок 2 - Влияние параметра модели n_0 на зависимость сдвиговой вязкости от градиента скорости

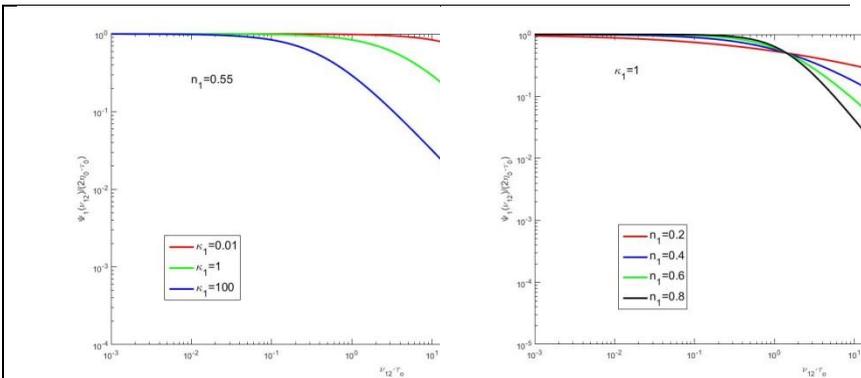


Рисунок 3 - Влияние параметра модели κ_1 на зависимость коэффициента первой разности нормальных напряжений от градиента скорости

Рисунок 4 - Влияние параметра модели n_1 на зависимость коэффициента первой разности нормальных напряжений от градиента скорости

Как видно из выражения (10) параметры κ_1 , n_1 влияют только на стационарный коэффициент первой разности нормальных напряжений ψ_1 . Характер их влияния виден на рисунках 3 и 4, откуда следует, что он подобен влиянию параметров κ_0 , n_0 на сдвиговую вязкость (рисунки 1,2). То есть, при малых s $\psi_1(s)$ принимает постоянные

значения - $2\eta_0\tau_0$, с ростом s $\psi_1(s)$ убывает с постоянным наклоном. При увеличении κ_1 зависимости $\psi_1(s)$ сдвигаются влево без изменения своего наклона. Как видно из рисунка 4 параметр n_1 ведет себя аналогично параметру n_0 .

На рисунках 5, 6 и 7 показано влияние параметров κ_2 , n_2 и β на вид зависимости стационарной элонгационной вязкости $\lambda(s)$ от скорости растяжения s . Из рисунка 5 видно, что при уменьшении κ_2 на зависимости $\lambda(s)$ появляется характерный максимум, который наблюдается в экспериментах для расплавов линейных полимеров. С ростом κ_2 этот максимум сглаживается и может совсем исчезнуть. Такая картина характерна для расплавов разветвленных полимеров. Влияние параметра n_2 , которое можно наблюдать на рисунке 6 тоже значительно. При малых n_2 наблюдается рост $\lambda(s)$, который с увеличением n_2 переходит в убывание. На рисунке 7 демонстрируется влияние параметра β на зависимость $\lambda(s)$. Видно, что этот параметр позволяет управлять величиной максимума на зависимости $\lambda(s)$.

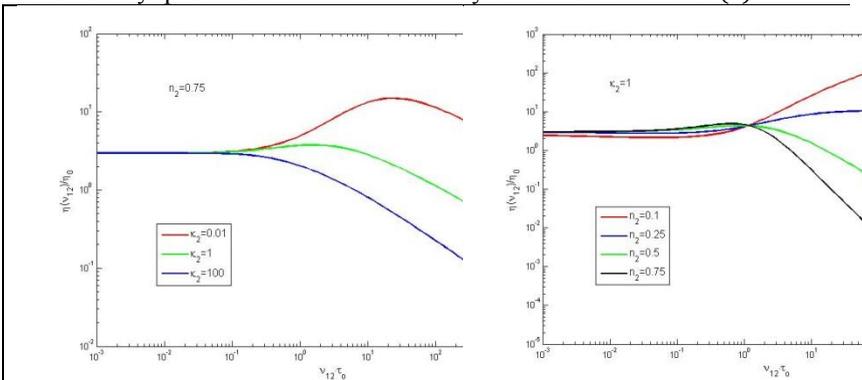


Рисунок 5 - Влияние параметра модели κ_2 на зависимость вязкости при растяжении от безразмерной скорости растяжения

Рисунок 6 - Влияние параметра модели n_2 на зависимость вязкости при растяжении от безразмерной скорости растяжения

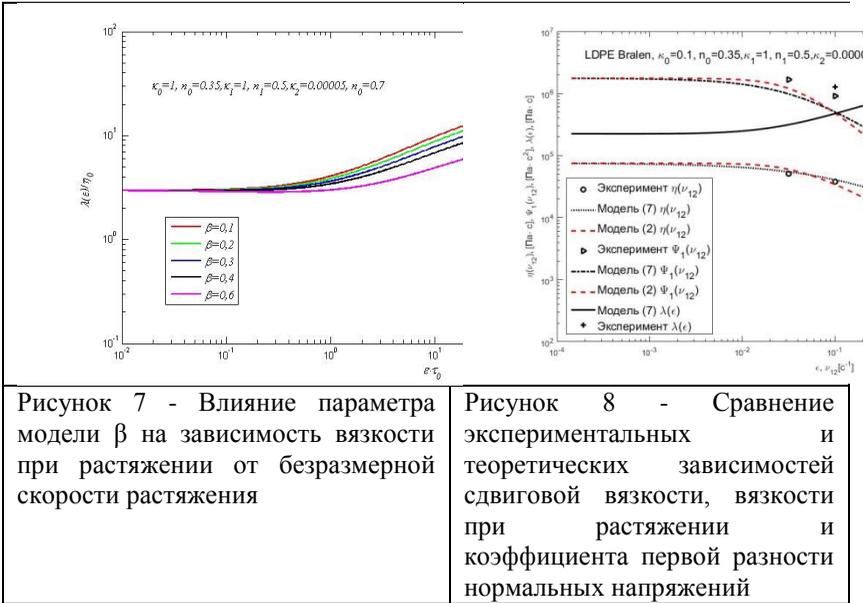


Рисунок 7 - Влияние параметра модели β на зависимость вязкости при растяжении от безразмерной скорости растяжения

Рисунок 8 - Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей сдвиговой вязкости, вязкости при растяжении и коэффициента первой разности нормальных напряжений

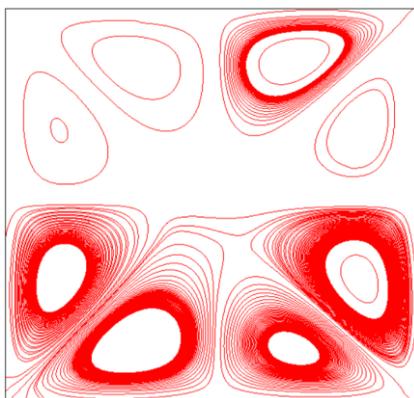
Из приведенных рисунков видно, что $\eta(s)$ – убывающая функция скорости сдвига, $\psi_1(s)$ также является убывающей функцией скорости сдвига, и $\lambda(s)$ демонстрирует немонотонную зависимость, сначала вязкость при растяжении является возрастающей функцией скорости растяжения, а затем после перехода через максимум, убывает. Также из этих рисунков можно сделать вывод о том, что подбор параметров модели κ_0 , n_0 , κ_1 , n_1 , κ_2 , n_2 и β легко осуществить путем сопоставления расчетных зависимостей сдвиговой вязкости, коэффициента первой разности нормальных напряжений и элонгационной вязкости с экспериментальными данными. Причем параметры κ_0 , n_0 определяются при сравнении сдвиговой вязкости. Параметры κ_1 и n_1 при сравнении с коэффициентом первой разности нормальных напряжений, а параметры κ_2 , n_2 и β при сравнении с элонгационной вязкостью.

Проведем теперь сравнение с экспериментальными данными для промышленного образца полиэтилена Bralen [11], результаты которого приведены на рисунке 8. На этом рисунке точками обозначены экспериментальные данные, черными кривыми обозначены результаты расчета по новой модели (7-9), красные кривые относятся к расчетам по mVP модели.

Продemonстрируем преимущества использования реологической модели (1,3,5,6) при расчетах пуазейлевских течений в плоских каналах. На основе модели (1,3,5,6) были выполнены расчеты напорного течения полимерной жидкости в каналах с параллельными стенками под действием постоянного перепада давления. В этом случае систему уравнений необходимо дополнить уравнением сохранения импульса и уравнением неразрывности. Три компоненты вектора скорости, поле давления и шесть компонент тензора дополнительных напряжений при этом являются функциями двух пространственных координат. Для сравнения были взяты канал с квадратным сечением (14×14) и щелевой канал с сечением (1×14). Расчеты производились в вычислительной среде FEMLAB, которая реализует метод конечных элементов. В расчетах были использованы следующие значения параметров: $\kappa_0 = 0,1$; $n_0 = 0,35$; $\eta_0 = 5000$; $\tau_0 = 0,1$.

Эти значения соответствуют течению расплава полиэтилена при температуре 200С [18].

А)



Б)



Рисунок 9 - Сравнение гидродинамической структуры вторичных течений в плоских каналах с различной геометрией. А) канал с квадратным сечением (14×14), Б) щелевой канал (1×14)

Были получены компоненты вектора скорости и компоненты тензора дополнительных напряжений в двух режимах: течение в

квадратном (14×14) канале и течение в щелевом (1×14) канале. Построены графики профиля скорости при различных расстояниях от оси канала. Произведено сравнение с экспериментами. Из сравнения линий тока для канала с квадратным сечением (14×14) и щелевого канала (1×14) видно, что в канале с квадратным сечением образуются восемь вихревых зон, а в щелевом канале их только четыре. Таким образом, можно сделать вывод о существенном влиянии геометрии канала с прямоугольным сечением на гидродинамическую структуру вторичных потоков. Заметим, что это влияние легко можно будет обнаружить в реальных течениях.

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность проведения инженерных расчетов течений полимерных сред на основе структурно-феноменологической модели (1,3,5,6). Полученная модель позволяет достаточно точно описывать стационарные и нестационарные характеристики расплавов разветвленных и линейных полимеров. При этом следует ожидать, что полученная здесь модель окажется пригодной и для концентрированных растворов полимеров. В дальнейшем предполагается использовать эту модель для проведения более сложных расчетов, а также при разработке численных методов трехмерных течений в качестве простой прогнозной модели для стабилизации вычислительных процедур.

Библиографический список

1. Pokrovskii V. N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics 2nd Edition, Springer, Berlin, 2010, 256 p. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2231-8>
2. Малкин А. Я. Исаев А. И. Реология: концепция, методы, приложения Перевод с английского (Rheology: Concepts, Methods, and Applications) СПб.: Профессия, 2007, 560 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-04626-4>
3. Giesekus H. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1982, 11, pp 69–109, [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(82\)85016-7](https://doi.org/10.1016/0377-0257(82)85016-7)
4. Leonov A. I., Prokunin A. N. Analysis of simple constitutive equations for viscoelastic liquids J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992, 42, 323, https://doi.org/10.1007/978-94-011-1258-1_3
5. Inkson N. J., McLeish T. C. B., Harlen O. G., Groves D. J. Predicting low density polyethylene melt rheology in elongational and shear

flows with “pom-pom” constitutive equations *J. Rheol.* 1999, 43, pp 873–896, <https://doi.org/10.1122/1.551036>

6. Алтухов Ю. А., Головичева И. Э., Пышнограй Г. В. Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2000, 1, pp 3-13, <https://doi.org/10.1007/BF02698779>

7. Phan-Thien N., Tanner R. I. A new constitutive equation derived from network theory *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1977, 2, pp 353-365, [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(77\)80021-9](https://doi.org/10.1016/0377-0257(77)80021-9)

8. Verbeeten W. M. H., Peters G. W. M., Baaijens F. P. T. Differential constitutive equations for polymer melts: the extended Pom-Pom model *J. Rheol.* 2001, 45, 823-843, <https://doi.org/10.1122/1.1380426>

9. Bishko G., McLeish T. C. B., Harlen O. G., Larson R. G. Theoretical Molecular Rheology of Branched Polymers in Simple and Complex Flows: The Pom-Pom Model *Physical Review Letters* 1997, 79(12), pp 2352-2355, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.2352>

10. Малкин А. Я., Куличихин В. Г. Применение метода высокоамплитудных гармонических воздействий для анализа свойств полимерных материалов в нелинейной области механического поведения Высокомолекулярные соединения Серия А. 2014, 56(1), pp 99–112, <https://doi.org/10.7868/S2308112014010039>

11. Pivokonsky R., Filip P., Zelenkova J. Two Ways to Examine Differential Constitutive Equations: Initiated on Steady or Initiated on Unsteady (LAOS) Shear Characteristics *Polymers* 2017, 9, 205, <https://doi.org/10.3390/polym9060205>

12. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases *Trans. Roy. Soc.* 1867, 157, pp 49-88, https://doi.org/10.1142/9781848161337_0014

13. Oldroyd J. G. On the Formulation of Rheological Equations of State *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 1950, 200, pp 523-541, <https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035>

14. Leonov A. I., Prokunin A. N. *Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids* Chapman and Hall, New York, 1994, 475, <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1258-1>

15. Pyshnograй G. V., Gusev A. S., Pokrovskii V. N. Constitutive equations for weakly entangled linear polymers *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 2009, 164(1-3), pp 17-28, <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2009.07.003>

16. Мерззликина Д. А., Пышнограй Г. В., Пивоконский Р., Филип П. Реологическая модель для описания вискозиметрических течений

расплавов разветвленных полимеров Инженерно-физический журнал 2016, 89(3), pp 643-651, <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1423-7>

17. Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе Инженерно-физический журнал 2005, 78(5), С. 55-61, <https://doi.org/10.1007/s10891-006-0009-1>

18. Hertel D., Münstedt H. Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 2008, 153, pp 73–81, <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.12.004>

Об устойчивости одной модели двухфазных течений в пороупругой среде

Э.И. Леонова¹, А.А. Папин¹
¹АлтГУ, Барнаул

В работе рассмотрена устойчивость для полной системы уравнений фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде.

Ключевые слова: *двухфазная фильтрация, устойчивость, пороупругость.*

В статье рассматривается математическая модель совместного движения двух жидкостей (1-нефть, 2-вода) в пороупругой среде [1-4]:

$$\frac{\partial(\phi\rho_1^0s_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\rho_1^0s_1\vec{u}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_2^0s_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\rho_2^0s_2\vec{u}_2) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_3^0\vec{u}_3) = 0, \quad (3)$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{oi}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \frac{\partial p_e}{\partial x} \right), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} + \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{2} (1-\phi) \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial x} \right)^* \right) \right) = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (6)$$

Здесь ϕ – пористость среды; \vec{u}_i – скорость i -й фазы; ρ_i^0 – истинная плотность; s_i – насыщенность i -й фазы ($s_1 + s_2 = 1$); $K_0(\phi)$ – тензор фильтрации; $k_{oi}(s_i)$ – относительные фазовые проницаемости ($k_{oi} = k_{oi}(s_i) \geq 0, k_{oi}|_{s_i=0} = 0$); μ_i – динамическая вязкость; p_i – давление i -й фазы ($p_2 - p_1 = p_c(s_1)$); \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести; $a_1(\phi), a_2(\phi)$ – параметры пороупругой среды, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление; $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$ – давление жидкой фазы; $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi\rho_1^0s_1 + \phi\rho_2^0s_2$ – плотность среды; $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление. Искомые являются: $s_1, s_2, p_1, p_2, \phi, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, p_s$.

При выполнении условий $\rho_i^0 = const$ ($i = \overline{1,3}$), $\vec{g} = 0$ и $p_c = 0$ стационарное решение (1)-(6) имеет вид

$$s_1 = s_1^0, \quad s_2 = s_2^0, \quad p_1 = p_2 = p_s = p_{tot}^0 = p, \\ \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0, \quad \phi = \phi^0.$$

Возмущенное решение задачи (1)-(6) ищется в окрестности стационарного решения в виде:

$$u_1 = \bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad u_3 = \bar{u}_3, \quad p_1 = p_{tot}^0 + \bar{p}_1, \\ p_2 = p_{tot}^0 + \bar{p}_2, \quad p_s = p_{tot}^0 + \bar{p}_s, \quad s_1 = s_1^0 + \bar{s}_1, \quad s_2 = s_2^0 + \bar{s}_2 \\ s_1^0 + s_2^0 = 1, \quad \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = 0, \quad \phi = \phi^0 + \bar{\phi} \quad (0 \leq \phi^0 + \bar{\phi} \leq 1),$$

где функции $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_s, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\phi}$ – малы и имеют непрерывные производные.

Для функциональных параметров $K_0(\phi), k_{oi}(s_i), a_1(\phi), a_2(\phi)$ имеем:

$$K_0(\phi) = K_0(\phi^0) + K_0'(\phi^0)\bar{\phi}, \quad k_{oi}(s_i) = k_{oi}(s_i^0) + k_{oi}'(s_i^0)\bar{s}_i, \\ a_1(\phi) = a_1(\phi^0) + a_1'(\phi^0)\bar{\phi}, \quad a_2(\phi) = a_2(\phi^0) + a_2'(\phi^0)\bar{\phi}.$$

После стандартных преобразований приходим к следующей системе для $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_s, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\phi}$

$$\phi^0 \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial t} + s_1^0 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \phi^0 s_1^0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\phi^0 \frac{\partial \bar{s}_2}{\partial t} + s_2^0 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \phi^0 s_2^0 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(1-\bar{\phi})}{\partial t} + (1-\phi^0) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$s_i^0 \phi^0 (\bar{u}_i - \bar{u}_3) = -K_0(\phi^0) \frac{k_{oi}(s_i^0) \partial \bar{p}}{\mu_i \partial x}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$[1 - a_1(\phi^0) \eta(1 - \phi^0)] \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} - \\ -a_2(\phi^0) \eta(1 - \phi^0) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} \right) = -a_1(\phi^0) (h(t) - \bar{p} - p_{tot}^0) - \quad (11)$$

$$-a_1'(\phi^0) \bar{\phi} (h(t) - p_{tot}^0) + a_2(\phi^0) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x},$$

$$p_{tot} = -\eta(1 - \phi^0) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} + h(t),$$

$$p_e = -\eta(1 - \phi^0) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} + h(t) - \bar{p} - p_{tot}^0, \quad (12)$$

$$p_s = \frac{-\eta(1-\phi^0) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} + h(t) - \phi^0 p_{tot}^0 - \phi^0 \bar{p} - p_{tot}^0 \bar{p}}{1-\phi^0}.$$

Складывая уравнения (7) - (9) и выражая \bar{u}_3 , имеем

$$\bar{u}_3 = \frac{\tilde{c}(t)}{1-\phi^0} - \frac{\phi^0}{1-\phi^0} (s_1^0 \bar{u}_1 + s_2^0 \bar{u}_2). \quad (13)$$

С учетом (13), уравнения (10) принимают вид

$$\bar{u}_1 (2s_1^0 \phi^0 - s_1^0 (\phi^0)^2) + \bar{u}_2 s_2^0 \phi^0 = A_1 (1 - \phi^0) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tilde{c}(t),$$

$$\bar{u}_1 s_1^0 \phi^0 + \bar{u}_2 (2s_2^0 \phi^0 - s_2^0 (\phi^0)^2) = A_2 (1 - \phi^0) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tilde{c}(t).$$

Определитель последней системы относительно \bar{u}_1 и \bar{u}_2 не равен нулю, поэтому имеем

$$\bar{u}_1 = B_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tilde{c}_1(t), \quad \bar{u}_2 = B_2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tilde{c}_2(t).$$

Получим уравнение для $\bar{\phi}$. Складывая уравнения (7) и (8), выводим

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = C \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}.$$

Чтобы получить уравнение для \bar{p} , подставим в уравнение (11) найденные функции \bar{u}_3 и $\bar{\phi}$. Продифференцируем обе части по t . Тогда получим

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^4 \bar{p}}{\partial t^2 \partial x^2} = \varepsilon_3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \varepsilon_4 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \varepsilon_5 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2}, \quad (14)$$

где $\varepsilon_1 = 1 - a_1(\phi^0)\eta(1 - \phi^0)B_3$, $\varepsilon_2 = -a_2(\phi^0)\eta(1 - \phi^0)B_3$,
 $\varepsilon_3 = a_1(\phi^0)$, $\varepsilon_4 = -a_1(\phi^0)(h(t) - p_{tot}^0)C$, $\varepsilon_5 = a_2(\phi^0)$.

Уравнение (14) является ключевым для решения задачи. Его решение имеет вид:

$$\bar{p} = (C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x))(C_3 e^{k_1 t} + C_4 e^{k_2 t}), \quad (15)$$

где

$$k_{1,2} = \frac{-(\varepsilon_3 + \lambda^2 \varepsilon_1) \pm \sqrt{(\varepsilon_3 + \lambda^2 \varepsilon_1)^2 + 4 \cdot (\varepsilon_5 + \lambda^2 \varepsilon_2) \varepsilon_4 \lambda^2}}{2 \cdot (\varepsilon_5 + \lambda^2 \varepsilon_2)}.$$

Для остальных функций справедливы представления

$$\bar{\phi} = C \lambda^2 \left(\frac{C_3}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{C_4}{k_2} e^{k_2 t} \right) (-C_1 \cos(\lambda x) - C_2 \sin(\lambda x)),$$

$$\bar{s}_1 = - \left(\frac{s_1^0 C}{\phi^0} + s_1^0 B_1 \right) \lambda^2 \left(\frac{C_3}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{C_4}{k_2} e^{k_2 t} \right) (-C_1 \cos(\lambda x) - C_2 \sin(\lambda x)).$$

Условие $Re \ k_i < 0$, $i = 1, 2$ является необходимым для устойчивости решений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета – 2015. – № 1-2(85). – С. 131-140.
2. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия

Алтайского государственного университета – 2016. – № 1(89). – С. 152-155.

3. Глушкова А.А., Папин А.А. Устойчивость двухфазных течений в пороупругой среде // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию – 2019. – № 5. – С. 55-59.

4. Токарева М.А., Папин А.А. Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22, № 2 (78). – С. 81-93.

Численное исследование динамики углерода в болотных экосистемах

М.В. Липатов, С.П. Семенов

*Югорский Государственный Университет, г. Ханты-
Мансийск*

Статья посвящена построению математической модели углеродного цикла и её численному исследованию при различных значениях параметров.

Ключевые слова: *динамика углерода, геохимический цикл углерода, matlab, математическое моделирование, модель.*

Человеческая деятельность требует всё большего количества ресурсов и мощностей, что, в свою очередь, увеличивает воздействие антропогенных факторов на окружающую среду [1, с. 52-53]. В числе прочего – влияние на углеродный цикл.

Нарушения в балансе углерода могут привести к негативным последствиям как для биосферы в нынешнем её состоянии в целом, так и для человека в частности. Использование моделей углеродного цикла может помочь прогнозировать и контролировать количество выбросов углерода, прогнозировать эффекты, которые эти выбросы могут за собой повлечь.

В контексте болотных экосистем это имеет особое значение, т.к. болота являются одними из важнейших экосистем, поглощающих и консервирующих углерод в виде слаборазложившегося органического вещества, они являются активным источником метана и стоком углекислого газа из атмосферы.

В данной работе рассматриваются две модели на основе базовой модели (рисунок 1) DALEC [2, с. 2729-2731].

В рассматриваемой модели углерод поступает в систему через валовую первичную продуктивность (GPP), которая относится к автотрофному дыханию (R_a) и живым тканям без растительного покрова на основе фиксированных фракций. Разложение мертвого органического вещества и связанное с ним гетеротрофное дыхание (R_h) следует кинетике первого порядка с экспоненциальной температурной чувствительностью.

Рассмотрим каждый из элементов отдельно.

GPP (gross primary production) – общее количество углекислого газа, «фиксируемое» наземными растениями в единицу времени путем фотосинтетического восстановления CO_2 до органических соединений.



Рисунок 1 – Базовая модель, представленная в наборе моделей DALEC

NPP (net primary production) – скорость, с которой все автотрофы в экосистеме производят чистую полезную химическую энергию.

Автотрофное (растительное) дыхание (R_a) является ключевым потоком углерода в экосистеме, возвращающим примерно половину GPP обратно в атмосферу.

Гетеротрофное дыхание (R_h) является результатом процессов разложения и минерализации в углеродных запасах, содержащих мертвое органическое вещество. В модели предполагается, что гетеротрофное дыхание происходит в виде CO_2 .

Обозначим: $x(t)$ и $y(t)$ – концентрации углерода в фитомассе и, соответственно, мортмассе в момент времени t .

Предположим, что скорость изменения концентрации углерода в фитомассе определяется следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = NPP - PM \quad (1)$$

Далее, предположим, что чистый обмен экосистемы пропорционален текущей концентрации углерода в фитомассе:

$$NPP = A(x, y) * x \quad (2)$$

Интенсивность чистого обмена определим, как разность:

$$A(x, y) = a(t) - b(t) * (x + y) \quad (3)$$

где $a(t)$ – интенсивность фотосинтеза (GPP), $b(t) * (x + y)$ – интенсивность дыхания растений (R_a) и мортмассы (R_h).

Моделирование процесса отмирания живых частей растений PM производится посредством слагаемого:

$$PM = \frac{c * x}{x + D} * y \quad (4)$$

Подставляем последовательно выражения (2)-(4) в (1) получим:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - b(x + y)) - \frac{c * xy}{x + D}$$

Для получения второго уравнения, введем величину j как количество фитомассы, необходимое для формирования единицы мортотомассы.

Второе уравнение нужно построить уравнение так, чтобы количество мортотомассы не превышало критическую величину $\frac{x}{j}$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - b(x + y)) - \frac{c*xy}{x+D} \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{j}{x} * y\right) * y \end{cases} \quad (5)$$

$x(0) = x_0, y(0) = y_0$

Получившаяся модель представляет собой аналог классической модели Холлинга-Тэннера для динамики биологических популяций.

Уравнения (5) представляют собой динамическую модель круговорота углерода в экосистеме «растения-почва». Параметры модели определяются факторами окружающей среды, в том числе нелинейно зависят от фотосинтетической активной радиации (PAR), температуры воздуха (T), осадков и уровня грунтовых вод (WTL) и т.п. В целях упрощения дальнейшего анализа модели будем считать, что a, b, c, D, s, j – положительные константы.

Для модели (5) была построена численная реализация с использованием MATLAB, и был проведён ряд экспериментов с различными значениями параметров модели, в частности, исследовались характеры неподвижных точек. Полученные в ходе экспериментов результаты соответствуют теоретическим выкладкам, представленным в работе Эрроусмита [3] для модели Холлинга-Тэннера, что позволяет говорить о том, что модели являются адекватными и могут использоваться для исследования динамики углерода.

Примеры результатов представлены на рисунке 2: в эксперименте слева наблюдается предельный цикл, справа – устойчивый фокус. Стоит отметить, что в представленных результатах $s*j < a$, таким образом учтена ключевая особенность болотных экосистем, а именно – их незамкнутость: болотные экосистемы возвращают в атмосферу меньшее количество CO_2 , чем поглощают в процессе фотосинтеза, аккумулируя в себе таким образом углерод.

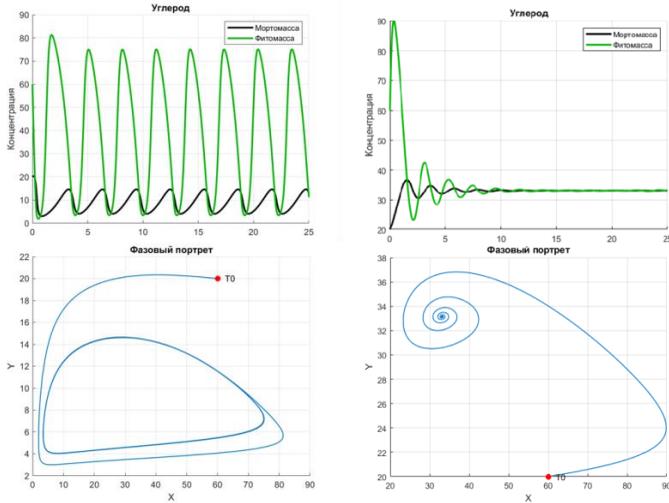


Рисунок 2 – Результаты. Значения коэффициентов: $x(0) = 60$, $y(0) = 50$, $a = 10$, $b = 0.1$, $c = 21$, $D = 10$, $s = 1$, $j = 2$ (слева); $x(0) = 60$, $y(0) = 50$, $a = 15$, $b = 0.1$, $c = 21$, $D = 50$, $s = 0,75$, $j = 1$ (справа).

Несмотря на наличие множества моделей, сохраняется проблема недостаточности данных наблюдений за болотными экосистемами, которые позволили бы более точно настроить модели, например, подобрать функцию изменения температуры, от которой зависит гетеротрофной дыхание и подобрать значения коэффициентов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (Грант № 22-11-20031)

Библиографический список

1. Тарко А.М., Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 232 с.
2. Famiglietti, C. A., Smallman, T. L., Levine, P. A., Flack-Prain, S., Quetin, G. R., Meyer, V., Parazoo, N. C., Stettz, S. G., Yang, Y., Bonal, D., Bloom, A. A., Williams, M., and Konings, A. G.: Optimal model complexity for terrestrial carbon cycle prediction // Biogeosciences, 2021, №18, 8, С. 2727–2754.
3. Arrowsmith D. K., Place C. M. Ordinary differential equations. – London : Chapman & Hall, 1982. – 252 с.

Исследование изменения мутности воды при расчистке русла реки Уса

Т.А. Пекарская, А.Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию движения смеси воды и твердых частиц грунта, попавших в реку во время проведения работ по расчистке русла выше по течению.

Ключевые слова: *мутность, гидравлическая крупность, математическое моделирование, модель.*

Моделирование распределения мутности воды вдоль рек демонстрирует вклад основных процессов, определяющих поведение взвешенных частиц в потоке, исключая влияние локальных факторов. Взвесь частиц оказывает отрицательное влияние на водный объект и окружающую среду. Растворенные ионы могут влиять на пригодность воды для целого ряда промышленных и бытовых целей. Актуальность теоретического исследования задач мутности воды при расчистке русел рек связана с их широким применением в решении важных практических задач. Увеличение мутности вызывают добыча россыпей в долинах рек, работа землеройной техники в руслах (сооружение траншей трубопроводов, русловыправительные работы, расчистка русла). Расчистка русла реки – это эффективное средство борьбы с паводками. Водный поток становится шире, течение реки не замедляется, следовательно, такие неприятные явления, как наводнения, представляют меньшую угрозу. Для расчёта, прогноза и предотвращения негативного влияния поступления дополнительной мутности необходимо создание четких, универсальных алгоритмов оценки переноса взвешенных частиц ниже хозяйственных объектов.

При проведении расчистки русла р. Уса ожидается увеличение мутности воды в водном объекте, связанное с увеличением концентрации взвешенных веществ при проведении земляных работ непосредственно в водном объекте. Расчет увеличения мутности воды (повышения концентрации взвешенных частиц) в результате проведения земляных работ в русле при расчистке русла р. Уса выполнен в виде математической модели, за основу которой взята методика расчета зон мутности (математическая модель явления осаждения грунта в русле), описанная в РП.1.204-1-84 «Кабельные переходы связи через водные преграды с учетом требований охраны

окружающей среды. Методическое руководство по проектированию» [1].

Используемая математическая модель, основанная на аналитическом решении уравнения турбулентной диффузии, удовлетворяет условиям поставленной задачи и подтверждена опытным путем. Модель позволяет рассчитать величину добавочной концентрации взвешенных веществ (добавочной мутности), поступающих в поток в результате проведения земляных работ в русле реки, в заданном контрольном створе, расположенном на расстоянии 500 м ниже по течению.

В соответствии с таблицей № 1 [2], п. 22а [3], табл. 3.1 [4], при производстве работ на водном объекте и в прибрежной зоне содержание взвешенных веществ в контрольном створе (пункте) не должно увеличиваться по сравнению с естественными условиями более чем на 0,25 мг/л для высшей и первой категории водных объектов рыбохозяйственного значения. Таким образом, принятое нормативное значение добавочной концентрации взвешенных веществ в контрольном створе установлено на уровне 0,25 мг/л.

Математическая модель явления осаждения грунта принимается нами со следующими допущениями: поток жидкости и поток загрязненной струи считается стационарным и имеет постоянную ширину и глубину. Грунт считается состоящим из конечного числа «n» - фракций [5]. Поперечная и вертикальная составляющие v_y и v_z , скорости потока малы по сравнению с продольной составляющей v_x . Влиянием деформации дна (вызванном осаждением частиц грунта) на скоростное поле потока пренебрегаем. Указанные допущения вполне правомерны, что подтверждается экспериментальными данными [1].

Система координат выбирается таким образом, что начало координат совпадает с центром загрязненной струи на свободной поверхности потока. Ось «Ox» направлена вдоль потока по свободной поверхности. Ось «Oy» — перпендикулярно к ней, ось «Oz» — в глубину потока. Мутность S_i — «i»-ой фракции в потоке определяется, согласно теории турбулентной диффузии, дифференциальным уравнением:

$$v_0 \frac{\partial S_i}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial z^2} \right) - U_i \frac{\partial S_i}{\partial z}$$

где D — коэффициент турбулентной диффузии [1]

$$D = \frac{gHv_0}{\rho MC}$$

где

$$M = f(C) = \begin{cases} 0,7C + 6, & 10 \leq C < 60; \\ 48, & C > 60. \end{cases}$$

Результаты расчета приведены в таблице 1.

Фракция i	Диапазон изменения диаметра частиц, мм	S _{i,ср} мг/л
S1	0,005-0,001	0.001
S2	0,01-0,05	0.007
S3	0,05-0,01	0.011
S4	0,1-0,05	0.010
S5	0,25-0,1	0.002
S6	0,5-0,25	< 0,001
S7	1-0,5	< 0,001
Суммарная добавочная мутность S, мг/л		0,031

Таблица 1 – Результаты расчета средней по сечению добавочной мутности в зависимости от фракции взвешенных веществ при $x = 500$ м

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. РП.1.204-1-84 «Кабельные переходы связи через водные преграды с учетом требований охраны окружающей среды. Методическое руководство по проектированию». Гипросвязь. – М., 1984. – 55 стр.
2. Приказ Минсельхоза России от 13.12.2016 N 552(ред. от 10.03.2020)"Об утверждении нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения" (Зарегистрировано в Минюсте России 13.01.2017 N 45203)
3. Приказ Минприроды России от 29.12.2020 N 1118(ред. от 17.05.2021)"Об утверждении Методики разработки нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты для водопользователей" (Зарегистрировано в Минюсте России 30.12.2020 N 61973)

4. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.01.2021 N 2 "Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 "Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания" (вместе с "СанПиН 1.2.3685-21. Санитарные правила и нормы...") (Зарегистрировано в Минюсте России 29.01.2021 N 62296)

5. Папин А. А., Сибин А. Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 4. – С. 82-94.

Об асимптотически автомодельном решении задачи о плоском стационарном пограничном слое в водном растворе полимера

А.Г. Петрова

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается асимптотическое представление по степеням малого параметра, связанного со временем ретардации решения задачи о плоском стационарном слое в слабом водном растворе полимера. Показывается, что задачи последовательных приближений по малому параметру, в отличие от исходной задачи, имеют автомодельные решения.

Ключевые слова: *пограничный слой, модель Павловского, асимптотическое разложение, автомодельное решение.*

Введение и постановка задачи. Теория движения вязкой жидкости, основанная на уравнениях Навье-Стокса, не пригодна для описания течения слабых водных растворов полимера, так как не учитывает свойства, при которых равновесие состояние в жидкости, соответствующее реологическому закону Ньютона, устанавливается не мгновенно после изменения внешних условиях, как того требует этот закон, но через некоторое время, характеризующееся величиной времени релаксации [1-2]. Эти релаксационные свойства жидкости резко различаются для воды и растворов полимеров. Одна из моделей, применяемых для теоретическим описанием динамики растворов полимеров является модель Павловского [2], активно исследуемая в настоящее время [3-9].

Управляющие уравнения модели имеют вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{\kappa}{\rho} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь \mathbf{v} – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, κ – коэффициент, связанный с релаксационными свойствами жидкости. В рамках этой модели рассмотрим систему уравнений плоского нестационарного течения в пограничном слое в водном растворе полимера

$$(u - u_{yy})_t + u(u - u_{yy})_x + v(u - u_{yy})_y = -p_x + \chi u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) выведены в работе С.В. Мелешко и В.В. Пухначева [8]. Параметр χ равен отношению толщины пограничного слоя Прандтля к величине $\kappa^{1/2}$, где κ – нормализованный коэффициент релаксационной вязкости. Давление p считается заданной функцией переменных x и t . Область определения решения системы (1) $\Omega = \{x, y, t : 0 < x < L, y > 0, 0 < t < T\}$. Начальное условие:

$$u = u_0(x, y), \quad x \in [0, L], \quad y > 0. \quad (2)$$

Краевые условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad y = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

$$u \rightarrow u_\infty(x, t), \quad y \rightarrow \infty, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

(условие сопряжения с внешним потенциальным потоком; здесь функция u_∞ удовлетворяет соотношению $u_{\infty,t} + u_\infty u_{\infty,x} = -p_x$ при $x \in [0, L], t \in [0, T]$). Нас интересует классическое решение задачи (1)-(4), поэтому будем предполагать функции p, u_0, u_∞ достаточно гладкими и удовлетворяющими условиям согласования $u_0(x, 0) = 0, x \in [0, L]; u_0(x, y) \rightarrow u_\infty(x, 0), y \rightarrow \infty, x \in [0, L]$. Кроме того, физический смысл имеют решения, в которых $u > 0$ в области Ω .

Полагая $p=0$, а движение установившимся, перепишем систему (1)-(4) в виде

$$uw_x + vw_y + \chi w = \chi u, \quad u_x + v_y = 0, \quad w = u - u_{yy}, \quad (5)$$

Для системы (5) ставятся краевые условия

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0,$$

$$u \rightarrow 1 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \\ 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где l – длина пластинки. Для замыкания постановки задачи требуется еще задать начальное условие по координате x , играющей роль эволюционной переменной,

$$u = u_0(y) \text{ при } x = 0, y \geq 0, \quad (7)$$

В отличие от задачи Блазиуса [9] система (5) с краевыми условиями (6) не имеет автомодельного решения (этому препятствует неизменность переменной y при сохраняющем систему (4) преобразовании растяжения $x = cx'$, $v = c^{-1}v'$, $u = u'$). Тем не менее удается привести эту задачу к более обзримому виду.

В системе (5) сделаем замену $\tilde{x} = x/\chi$, $\tilde{y} = y/\chi$. Опуская «волны», получим систему

$$u(u - \varepsilon u_{yy})_x + v(u - \varepsilon u_{yy})_y = -p_x + u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0. \quad (8)$$

Здесь $\varepsilon = 1/\square^2$. Вспомнив, что $\square = \nu/V\kappa$, где κ - параметр, отвечающий за релаксационные свойства жидкости, будем считать параметр ε малым.

Вернемся к форме (13) управляющего уравнения. При $\varepsilon = 0$ приходим к классической задаче Блазиуса [10]. Обозначим ее решение через $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Эти функции удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$u^{(0)}u_x^{(0)} + v^{(0)}u_y^{(0)} = u_{yy}^{(0)}, \quad u_x^{(0)} + v_y^{(0)} = 0, \quad u^{(0)} = v^{(0)} = 0 \text{ при } y = 0, \\ u^{(0)} \rightarrow 1 \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (9)$$

Эта задача имеет автомодельное решение [9]

$$u^{(0)} = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right), \quad v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{x}} g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right),$$

где функции f и g находятся из решения следующей краевой задачи на полубесконечном интервале для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f''(\xi) - f'(\xi)(g(\xi) - f(\xi)\frac{\xi}{2}) = 0, \quad (10)$$

$$g'(\xi) - f'(\xi)\frac{\xi}{2} = 0 \quad (11)$$

$$f(0) = g(0) = 0, f(\infty) = 1.$$

(12)

Исключим функции g из (10)-(12) запишем задачу для f в виде

$$2f'' + f' \int_0^{\xi} f d\xi = 0, \quad f(0) = 0, f(\infty) = 1.$$

(13)

Найдем асимптотику решения (13) в нуле, решив задачу

$$2f_i'' + f_i' \xi = 0, \quad f_i(0) = 0, f_i(\infty) = 1.$$

$$f_i(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \exp(-\eta^2 / 2) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-\eta^2 / 2) d\eta$$

Таким образом, $f(\xi) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi, \xi \rightarrow 0$.

Будем искать решение задачи (8) в виде ряда по положительным целым степеням ε :

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \dots, \quad v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots$$

Задача нулевого приближения уже выписана, это задача (13). Для первого приближения получим задачу:

$$u^{(0)} u_x^{(1)} + v^{(0)} u_y^{(1)} + u^{(1)} u_x^{(0)} + v^{(1)} u_y^{(0)} - u_{yy}^{(1)} = u^{(0)} u_{xyy}^{(0)} + v^{(0)} u_{yyy}^{(0)},$$

$$u_x^{(1)} + v_y^{(1)} = 0,$$

$$u^{(1)} = v^{(1)} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u^{(1)}(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

(14)

Задача (14) также допускает автомодельное решение

$$u^{(1)} = \frac{1}{x} h\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right), \quad v^{(1)} = \frac{1}{x\sqrt{x}} p\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right).$$

(15)

Для функций h и p получим следующую задачу:

$$-\frac{\xi}{2} fh' - fh + gh' - \frac{\xi}{2} hf' + pf' - h'' = -\frac{\xi}{2} ff''' + gf''',$$

$$p'(\xi) - h'(\xi) \frac{\xi}{2} - h = 0, \quad h(0) = p(0) = 0, \quad h(\infty) = 0$$

(16)

Здесь функция f является решением задачи (13). Исключая из (16) функцию p , получим:

$$2h'' + h' \int_0^{\xi} f d\xi + 2fh - f' \int_0^{\xi} h d\xi = f''' \int_0^{\xi} f d\xi, \quad h(0) = 0, h(\infty) = 0,$$

(17)

Линейные задачи следующих приближений выписываются аналогично и имеют такую же структура, что и (32). Таким образом

$$u = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \varepsilon \frac{1}{x} h\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \dots, \quad v = \frac{1}{\sqrt{x}} g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \varepsilon \frac{1}{x\sqrt{x}} p\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \dots$$

Вопрос о пригодности разложения вблизи $x=0$ упирается в поведение функций h, p при $x \rightarrow 0$, т.е. при $\xi \rightarrow \infty$. Это поведение вполне поддается исследованию, но выходит за рамки данной работы.

Заключительные замечания. Нелинейная задача о плоском стационарном пограничном слое, возникающем при движении слабых водных растворов полимеров исследована асимптотически в автомодельных переменных. Найден вид функций, составляющих двучленное разложение по степеням малого параметра. Вопросы разрешимости возникающих линейных задач и обоснования асимптотического разложения остаются открытыми.

Библиографический список

1. Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Павловский В. А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института —1970. - т. 69. - С. 19-26.
2. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. 1971. Т. 200, №4. С. 809–812.
3. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136.
4. Звягин В.Г., Турбин М.В. "Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред" М.: УРСС: КАСАНДР, 2016, 416 с.
5. Пухначев В.В., Фроловская О.А. О модели Войткунского – Амфилохьева -Павловского движения водных растворов полимеров //Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2018, Т. 300, с. 176-189.
6. Пухначев В.В., Фроловская О.А., Петрова А.Г. Растворы полимеров и их математические модели. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.(2):82-91, 2020

7. Petrova, A.G. On the unique solvability of the problem of the flow of an aqueous solution of polymers near a critical point. *Mathematical Notes* 2019, 106, 784.
8. Meleshko, S.V.; Pukhnachev, V.V. Group analysis of boundary layer equations in the models of polymer solutions. *Symmetry* 2020, 12, 1084.
9. Schlichting, H.; Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*; Springer-Verlag: Berlin, 2000. 8th Edition.

Математическая модель биологической ткани: клетка, межклеточная жидкость, внеклеточный матрикс

В.Б. Погосян¹, М.А. Токарева¹, А.А. Папин¹

¹АлтГУ, г. Барнаул

В работе приведена математическая модель биологической ткани с учетом деформации внеклеточного матрикса.

Ключевые слова: математическое моделирование, биологическая ткань, пористость, фазовый переход, фильтрация.

Рассматривается математическая модель биологической ткани, которая представляет собой многофазную структуру. Ткань состоит по меньшей мере из трех основных компонентов, занимающих соответствующую долю пространства: клеток, внеклеточного матрикса (ЕСМ) и внеклеточной жидкости. Кроме того, следует учитывать компоненты (и химические факторы), диффундирующие в жидкости и поглощаемые/вырабатываемые клетками. Однако в данной работе они не рассматриваются.

При описании процесса используются уравнения баланса масс для каждой из фаз:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\mathbf{v}_0) = \Gamma_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi s}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi s \mathbf{v}_T) = \Gamma_T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi(1-s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi(1-s)\mathbf{v}_l) = \Gamma_l, \quad (3)$$

где ϕ – пористость, s – насыщенность клеточной фазы, $(1-s)$ – насыщенность жидкости, а $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_T, \mathbf{v}_l$ – истинные скорости внеклеточного матрикса, клеток и внеклеточной жидкости соответственно, $\Gamma_0, \Gamma_T, \Gamma_l$ – фазовые переходы, которые включают в себя плотности фаз ($\Gamma_0 + \Gamma_T + \Gamma_l = 0$). Предполагается, что плотности всех фаз одинаковые: $\rho_0 = \rho_T = \rho_l = \rho$.

Уравнения баланса импульса для каждой составляющей записываются следующим образом

$$\rho(1-\phi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla v_0 \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{b}_0 + \mathbf{m}_0^\sigma, \quad (4)$$

$$\rho\phi s \left(\frac{\partial v_T}{\partial t} + v_T \cdot \nabla v_T \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_T + \mathbf{b}_T + \mathbf{m}_T^\sigma, \quad (5)$$

$$\rho\phi(1-s) \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l \cdot \nabla v_l \right) = \nabla \cdot \mathbf{T}_l + \mathbf{b}_l + \mathbf{m}_l^\sigma, \quad (6)$$

где \mathbf{T}_i – тензор напряжений, \mathbf{b}_i – внешние силы, а \mathbf{m}_i^σ – сила взаимодействия, действующая на i -ую составляющую из-за её

взаимодействия с другими составляющими. Интенсивности обмена импульсом имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0^\sigma &= P\nabla(1 - \phi) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \\ \mathbf{m}_T^\sigma &= P\nabla(\phi s) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \\ \mathbf{m}_l^\sigma &= P\nabla(\phi(1 - s)) - \mathbf{M}_{T0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_T) - \mathbf{M}_{l0}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_l) - \frac{\Gamma_0}{2}\mathbf{v}_0 + \\ &\quad \frac{\Gamma_0 - \Gamma_T}{6}\mathbf{v}_T + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_l}{6}\mathbf{v}_l, \end{aligned}$$

где \mathbf{M}_{ij} – взаимодействие между i -ым и j -ым компонентами и

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_l &= -(P\phi(1 - s))\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_l, \\ \mathbf{T}_T &= -(P\phi s)\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_T, \\ \mathbf{T}_0 &= -(P(1 - \phi))\mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_0, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{T}}_i$ – избыточное напряжение.

Предполагается, что основной вклад в силы взаимодействия вносят слагаемые, пропорциональные разнице скоростей между составляющими. Члены в \mathbf{m}_i^σ , пропорциональные скоростям массового производства Γ_i , незначительны [3].

При описании биологических процессов инерцией можно пренебречь, а также сила взаимодействия между внеклеточным матриксом и жидкостью пренебрежимо мала по отношению к силе взаимодействия между клеткой и жидкостью и, прежде всего, клеткой и ЕСМ. Однако это последнее предположение не является существенным и может быть отброшено. Кроме того, в первом приближении ЕСМ рассматривается как жесткий. В соответствии с этими предположениями уравнения (1)–(6) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} &= \Gamma_0, \\ \frac{\partial\phi s}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi s \mathbf{v}_T) &= \Gamma_T, \\ \frac{\partial\phi(1-s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi(1-s)\mathbf{v}_l) &= \Gamma_l, \\ 0 &= -\phi s \nabla P + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}_T + \mathbf{b}_T + \mathbf{M}_{lT}(\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_l) - \mathbf{M}_{T0}\mathbf{v}_T, \\ 0 &= -\phi(1-s)\nabla P + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}_l - \mathbf{M}_{lT}(\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_l), \end{aligned} \right. \quad (7)$$

так как предположение о жесткости ЕСМ подразумевает, что тензор напряжений T_0 просто реагирует на силы, приложенные к ЕСМ. Массовая сила \mathbf{b}_T отражает, например, хемотаксическое или гаптотаксическое действие на клетки, а также предполагается, что \mathbf{b}_l исчезает.

Если предположить, что $\hat{\mathbf{T}}_l = 0$, то последнее уравнение можно записать в виде закона Дарси:

$$\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_T = -\mathbf{K}\nabla P,$$

где \mathbf{K} проницаемость, являющаяся функцией объемной доли жидкой фазы.

Сложив два уравнения импульса, можно исключить из системы силы взаимодействия между жидкостью и клетками

$$-\phi\nabla P + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}_T - \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{v}_T + \mathbf{b}_T = 0 \quad (8)$$

где $\mathbf{K}_0 = \mathbf{M}_{T0}^{-1}$ проницаемость липкого гранулированного потока в пористой структуре образованной сетью внеклеточного матрикса. Уравнения модели примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = \Gamma_0, \\ \frac{\partial\phi s}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi s \mathbf{v}_T) = \Gamma_T, \\ \nabla \cdot (\phi s \mathbf{v}_T + \phi(1-s)\mathbf{v}_l) = 0, \\ \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_T = -\mathbf{K}\nabla P, \\ \mathbf{v}_T = \mathbf{K}_0[-\phi\nabla P + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}_l + \mathbf{b}_T], \end{array} \right. \quad (9)$$

где третье уравнение системы (9) было получено путем суммирования уравнений баланса массы.

Рассмотрим случай, когда тензор проницаемости изотропен. Поскольку $\mathbf{M}_{T0} \geq \mathbf{M}_{lT}$, то $\mathbf{K}_0 \ll \mathbf{K}$. Тогда, подставляя градиент давления из закона Дарси в (8), получим, что

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{K}_0(\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}_T + \mathbf{b}_T), \quad (10)$$

Предположим, что тензор напряжений изотропен $\hat{\mathbf{T}}_T = -\Sigma(\phi s)\mathbf{I}$, а $\mathbf{b}_T = 0$ (отсутствует хемотаксическое действие). Также отсутствуют фазовые превращения жидкость – клетка, жидкость – ЕСМ, тогда $\Gamma_0 = -\Gamma_T$. Положим, что $\Sigma(\phi s)$ зависит только от s : $\Sigma(s) = s - s^0$, где $s^0 = s|_{t=0}$ – заданная функция [4].

Подставляя \mathbf{v}_T во второе уравнение из (9), получим систему уравнений для нахождения ϕ и s :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\Gamma_T, \\ \frac{\partial\phi s}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}_0\phi s\nabla s) = \Gamma_T, \end{array} \right.$$

Для данной системы уравнений при определенных начально-краевых условиях можно установить принцип максимума для s и ϕ . Подобная по структуре система уравнений исследована в работе [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования,

индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Graziano L., Preziosi Luigi, Mollica Francesco, Rajagopal K.R. Modeling of Biological Materials. Mechanics in tumor growth. 2007. pp.263-321.
2. Preziosi, L., and Farina, A., On Darcy's law for growing porous media, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2001, pp. 485–491.
3. Kowalczyk, R., Preventing blow-up in a chemotaxis model, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, pp. 566–588
4. Astanin, S.V., Tosin, A. Mathematical model of tumour cord growth along the source of nutrient. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2, pp. 153-177.
5. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии / Известия АлтГУ. – 2015. – №1/2, с. 136-140.

Усреднённые двухмасштабные уравнения динамики термоупругого композита

С.А. Саженков^{1,2}, Чжун Цзябинь²

¹ИГиЛ СО РАН, Новосибирск; ²НГУ, Новосибирск

Аннотация. Доклад посвящён исследованию пространственно-одномерной начально-краевой задачи для классической системы нестационарных уравнений линейной термоупругости с периодически быстро осциллирующими по пространственной переменной физическими характеристиками. Задача содержит положительный малый параметр ε – отношение минимального периода пространственных осцилляций и всего термоупругого тела. Проводится процедура гомогенизации, то есть предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$. В результате конструируется двухмасштабная предельная система, решением которой служит предел семейства решений исходной задачи.

Ключевые слова: *линейная термоупругость, гомогенизация, слабое решение.*

1. Постановка и разрешимость исходной задачи. Объектом нашего изучения является пространственно-одномерная начально-краевая задача для системы классических линейных нестационарных уравнений термоупругости [1, гл. 1] в несколько упрощённом случае, когда поле смещения описывается скалярной функцией:

$$\rho \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \alpha \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon \right) \right], \quad (x, t) \in Q, \quad (1a)$$

$$\beta \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \right] - a \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t \partial x}, \quad (x, t) \in Q, \quad (1b)$$

$$u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad \tau^\varepsilon(0, t) = 0, \quad u^\varepsilon(1, t) = 0, \\ \tau^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1c)$$

$$u^\varepsilon = u_0(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \quad \tau^\varepsilon(x, 0) = \tau_0(x), \\ x \in (0, 1). \quad (1d)$$

В (1a)-(1b) и далее через Q обозначен пространственно-временной прямоугольник $\{0 < x < 1\} \times \{0 < t < T\}$, т.е. $Q = (0, 1) \times (0, T)$.

Поскольку коэффициенты уравнений зависят от пространственной переменной, можем говорить, что задача (1) описывает динамику термоупругого *композиционного* материала. Постановка (1) содержит малый параметр $\varepsilon > 0$, что приводит к частым (по пространству) колебаниям коэффициентов, соответственно, (1) – это постановка, заданная на *микроскопическом масштабе*.

Искомые функциями в (1) являются смещение $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$ и температура $\tau^\varepsilon = \tau^\varepsilon(x, t)$. Остальные функции в (1a)-(1b) являются заданными коэффициентами и имеют следующий физический смысл: $\rho = \rho(y)$ – плотность материала, $\beta = \beta(y)$ – объёмная удельная теплоёмкость, $a = a(y)$ – коэффициент упругости, $\alpha = \alpha(y)$ – модуль линейного теплового расширения и $\lambda = \lambda(y)$ – коэффициент теплопроводности. На них накладываются следующие требования:

$\rho = \rho(y)$, $\beta = \beta(y)$, $a = a(y)$, $\alpha = \alpha(y)$, $\lambda = \lambda(y)$ — это 1-периодические функции, $Y = (0, 1)$ – период;

$\rho, \beta, a, \alpha, \lambda$ строго положительны, т.е. они удовлетворяют оценке

$$\phi(y) \geq c_* \quad \forall y \in Y, \quad \phi := \rho, \beta, a, \alpha, \lambda,$$

с некоторой постоянной $c_* > 0$;

$\rho, \beta, a, \alpha, \lambda$ – ограниченные функции, т.е. существует постоянная $c_{**} > 0$, такая, что

$$(|\rho(y)|, |\beta(y)|, |a(y)|, |\alpha(y)|, |\lambda(y)|) \leq c_{**} \quad \forall y \in Y.$$

Функции u_0, v_0 и τ_0 – это заданные гладкие начальные распределения полей смещения, скорости и температуры, соответственно.

Заметим, что не исключается возможность того, что коэффициенты в уравнениях (1a) и (1b) терпят скачок в некоторых точках y_k^* на Y . Поэтому задача (1) понимается в *слабом смысле*. Слабая постановка задачи (1) корректна, то есть для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \ll 1$) существует единственное решение $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$. Обоснование этого утверждения проводится стандартными методами теории линейных эволюционных уравнений.

2. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Усреднённая двухмасштабная модель. Основным результатом работы являются теорема о предельном переходе в задаче (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и конструкция предельной усреднённой двухмасштабной модели.

Для того, чтобы сформулировать эту теорему и предельную модель, введём некоторые дополнительные обозначения.

Через $\langle \dots \rangle_Y$ будем обозначать среднее по периоду $Y = (0, 1)$ от всевозможных 1-периодических функций $\phi = \phi(y)$:

$$\langle \phi \rangle_Y = \int_Y \phi(y) dy.$$

Через $H_{per}^1(Y)$ обозначим подпространство в $H_{loc}^1(\mathbb{R})$, состоящее из 1-периодических по y функций.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2-sc. *Существуют последовательность $\{(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ обобщённых решений задачи (1) и четвёрка предельных функций $u_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, $\tau_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, $U \in L^2(Q; H_{per}^1(Y))$, $\Theta \in L^2(Q; H_{per}^1(Y))$, такие, что*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u_*, \quad \tau^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \tau_* \quad \text{слабо в } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{двухмасштабно,} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\partial \tau_*}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad \text{двухмасштабно} \quad (2c)$$

и четвёрка функций (u_*, τ_*, U, Θ) служит решением нижеследующей двухмасштабной усреднённой модели 2-sc.

Модель 2-sc. Требуется найти макроскопические поля смещения $u_* = u_*(x, t)$ и распределения температуры $\tau_* = \tau_*(x, t)$ и двухмасштабные поля смещения $U = U(x, y, t)$ и распределения температуры $\Theta = \Theta(x, y, t)$, удовлетворяющие условиям регулярности

$$\begin{aligned} u_* &\in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), & \frac{\partial u_*}{\partial t} &\in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \\ \tau_* &\in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\ U &\in L^2(Q; H_{per}^1(Y)), & \frac{\partial U}{\partial t} &\in L^2(Q; H_{per}^1(Y)), \\ \Theta &\in L^2(Q; H_{per}^1(Y)) \end{aligned}$$

интегро-дифференциальному макроскопическому уравнению баланса количества движения

$$\langle \rho \rangle_Y \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} - \langle a \rangle_Y \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_Y a(y) \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \alpha(y) \tau_* \right) dy = 0, \\ (x, t) \in Q,$$

интегро-дифференциальному макроскопическому уравнению баланса тепла

$$\langle \beta \rangle_Y \frac{\partial \tau_*}{\partial t} - \langle \lambda \rangle_Y \frac{\partial^2 \tau_*}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_Y \lambda(y) \frac{\partial \Theta}{\partial y} dy + \langle a \alpha \rangle_Y \frac{\partial^2 u_*}{\partial t \partial x} \\ + \int_Y a(y) \alpha(y) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y} dy - \delta_{t=0} \int_Y a(y) \alpha(y) \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0, \quad (x, t) \in Q,$$

дифференциальному уравнению баланса количества движения на микроскопическом уровне

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(y) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u_*}{\partial x} - \alpha(y) \tau_* \right) \right] = 0, \quad y \in Y,$$

дифференциальному уравнению баланса тепла на микроскопическом уровне

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(y) \left(\frac{\partial \tau_*}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad y \in Y,$$

и начальным данным

$$u_* = u_0(x), \quad \frac{\partial u_*}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \quad \tau_*(x, 0) = \tau_0(x), \quad x \in (0, 1).$$

В макроскопическом уравнении баланса тепла через $\delta_{t=0}$ стандартно обозначена дельта-функция Дирака. Решение модели 2-сc понимается в слабом обобщённом смысле.

Доказательство теоремы 2-сc основано на получении стандартных равномерных по ε оценок на семейство решений $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ задачи (1) и на дальнейшем применении метода двухмасштабной сходимости Аллера — Нгуетсенга [2,3].

Завершим изложение сути проведённого исследования несколькими замечаниями.

Замечание 1. Заметим, что существование решений у модели 2-сc сразу следует из теоремы 2-сc в силу предельного перехода. Вопрос о единственности решения модели 2-сc является открытым. Также открытым является вопрос о разделении масштабов в модели 2-сc и построении эффективной макроскопической модели, не содержащей микроскопическую переменную y . Исследование модели 2-сc является целью дальнейшей работы.

Замечание 2. Исследуемая в настоящей работе задача гомогенизации ранее уже рассматривалась в многомерном случае Ж. Франкфором [4]. Однако, в работе [4] автор применил совершенно другой метод, основанный на применении теории полугрупп. В результате автором получена усреднённая система уравнений термоупругости, в которой начальные данные для распределения температуры не совпадают с исходными, а сложным образом выражаются через них и другие данные задачи. Планируемый далее анализ полученной в настоящей работе двухмасштабной системы позволит сравнить результат Ж. Франкфора с результатом применения метода Аллера — Нгуетсенга.

Замечание 3. Следуя Ж. Франкфору, мы можем заметить, что замена более соответствующего реальной физике векторного поля смещений на скалярное в исследуемой задаче на самом деле не

ограничивает общности рассмотрения, а именно, все результаты, получаемые для скалярного поля смещения аналогичным образом, выводятся и для векторного поля смещения.

Библиографический список

1. *В.Д. Купрадзе и др.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. — М.: Наука, 1976. — 664 стр.
2. *G. Allaire.* Homogenization and two-scale convergence // *SIAM J. Math. Anal.* 1992. Vol. 23, No. 6. P. 1482-1518.
3. *G. Nguetseng.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* 1989. Vol. 20, No. 3. P. 608-623.
4. *G. Francfort.* Homogenization and linear thermoelasticity // *SIAM J. Math. Anal.* 1983. Vol. 14, No. 4. P. 696-708.

УДК 517.972.5

Односторонняя задача для оператора Баренблатта — Желтова — Кочиной

Т.В. Саженкова¹, С.А. Саженков², Е.В. Саженкова³
*¹АлтГУ, Барнаул; ²ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, ³НГУЭУ,
Новосибирск*

Аннотация. Доклад посвящён исследованию односторонней задачи для псевдопараболического оператора Баренблатта — Желтова — Кочиной в одномерном случае. Эта задача формулируется в виде вариационного неравенства и с физической точки зрения моделирует нестационарный процесс фильтрации вязкой жидкости в трещиновато-пористой галерее с ограничением на модуль скорости фильтрации по трещинам. Теорема существования слабого обобщённого решения этой задачи известна в литературе как в одномерном, так и многомерном случаях, и следует из результатов, полученных М. Пташник (Nonlinear Analysis, 2007, vol. 66, pp. 2653-2675) с применением метода штрафа. При этом оператор штрафа выбирался в стандартном виде.

В настоящем исследовании рассматривается приближённая начально-краевая задача с оператором штрафа А. Каплана и изучается семейство её решений. Благодаря специфической структуре оператора А. Каплана, удаётся получить повышенную регулярность слабого обобщённого решения исходной задачи по отношению к ранее известным свойствам регулярности, а также найти усиленное свойство аппроксимации этого решения последовательностью решений приближённой задачи с оператором А. Каплана. Основные результаты исследования подробно изложены в статье [Т.В. Саженкова, С.А. Саженков, Е.В. Саженкова. Регулярность и аппроксимация решения односторонней задачи для псевдопараболического оператора Баренблатта — Желтова — Кочиной // Матем. заметки СВФУ, 2022, 29 (1), 69 – 87].

Ключевые слова: *вариационное неравенство, псевдопараболический оператор, обобщённое решение, метод штрафа, фильтрация.*

1. Постановка задачи. Положим

$$K := \{\phi \in H_0^{1,2}(0,1): |\partial_x \phi(x)| \leq 1 \text{ при п. в. } x \in (0,1)\}. \quad (1)$$

Заметим, что K – выпуклое и замкнутое множество в $H_0^{1,2}(0,1)$.

Пусть $u_0 = u_0(x)$ и $f = f(x, t)$ – функции, заданные на отрезке $[0,1]$ и в прямоугольнике $\bar{\Omega}_T := [0,1] \times [0, T]$, соответственно, причём

$u_0 \in K$, $f \in C(\bar{\Omega}_T)$, а $T > 0$ – произвольно фиксированный момент времени. Пусть χ и ν – два заданных положительных постоянных коэффициента. Пусть $\Omega_T = (0,1) \times (0,T)$.

Задача А. В Ω_T требуется найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую условиям регулярности

$$u \in L^2(0,T; H_0^{1,2}(0,1)), u(\cdot, t) \in K \text{ при п.в. } t \in (0,T), \quad (2a)$$

вариационному неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_0^1 (\partial_t v(v-u) + \chi \partial_t \partial_x v \partial_x(v-u) + \nu \partial_x u \partial_x(v-u)) dxdt \leq \\ & \leq \int_0^s \int_0^1 f(v-u) dxdt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (|v(x,s) - u(x,s)|^2 \\ & \quad + \chi |\partial_x v(x,s) - \partial_x u(x,s)|^2) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 (|v(x,0) - u_0(x)|^2 \\ & \quad + \chi |\partial_x v(x,0) - \partial_x u_0(x)|^2) dx, \quad s \in (0,T], \quad (2b) \end{aligned}$$

в котором $v \in L^2(0,T; H_0^{1,2}(0,1))$ – произвольная пробная функция, такая, что $\partial_t v \in L^2(0,T; H_0^{1,2}(0,1))$ и $v(\cdot, t) \in K$ при п.в. $t \in (0,T)$, и начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (2c)$$

в смысле сильного следа в $L^2(0,1)$.

Определение 1. Решение задачи А называется *слабым обобщённым решением* вариационного неравенства (2b), снабжённого начальными данными (2c).

Имеет место утверждение о корректности задачи А [1].

Предложение 1. Для любых заданных $u_0 \in K$ и $f \in C(\bar{\Omega}_T)$ задача А имеет единственное решение. При этом, решение обладает свойствами регулярности

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^{1,2}(0,1)), \quad \partial_t u \in L^2(0,T; H_0^{1,2}(0,1)). \quad (3)$$

Замечание 1. Вследствие включений (3), вариационное неравенство (2b) выполняется также в эквивалентной «сильной» версии

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_0^1 (\partial_t u(v-u) + \chi \partial_t \partial_x u \partial_x(v-u) + \nu \partial_x u \partial_x(v-u)) dxdt \\ & \leq \int_0^s \int_0^1 f(v-u) dxdt \quad \forall s \in (0,T]. \quad (4) \end{aligned}$$

Замечание 2. Введём обозначения для зависящих от решения множеств в Ω_T :

$$\Omega_- := \{(x, t) \in \Omega_T: |\partial_x u(x, t)| < 1\},$$

$$\Omega_1 := \{(x, t) \in \Omega_T: |\partial_x u(x, t)| = 1\}.$$

В смысле теории распределений, вариационное неравенство (4) эквивалентно в Ω_- одномерному уравнению Баренблатта — Желтова — Кочиной

$$\partial_t u - \chi \partial_t \partial_{xx}^2 u - \nu \partial_{xx}^2 u = f. \quad (5)$$

В Ω_1 уравнение (5) из (4), вообще говоря, не следует.

Напомним, что уравнение (5) описывает динамику неустановившейся фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде [2, уравнение (10)]. При этом, роль искомой функции u выполняет давление в трещинах, f — это внешняя заданная распределённая нагрузка, d — коэффициент пьезопроводности среды, χ — коэффициент, сложным образом характеризующий геометрические и упругие свойства среды. В этих рамках, ограничение $|\partial_x u| \leq 1$ является ограничением на скорость фильтрации по трещинам, поскольку в силу закона Дарси скорость фильтрации пропорциональна сумме градиента давления и распределённой массовой силы.

2. Задача со штрафом. Мы изучаем приближённую постановку для задачи А с интегральной версией оператора штрафа А. Каплана [3] с внутренней регуляризацией, ранее успешно применённой для получения результатов о равномерном приближении решений многомерных ϵ -эллиптических и $p(x)$ -эллиптических задач с односторонними ограничениями [4]-[6]. Целями рассмотрений в настоящей работе являются нахождение новых повышенных свойств регулярности решения задачи А в дополнение к (3) и построение семейства приближённых решений, обладающего свойством усиленной аппроксимации. Постановка задачи с оператором штрафа А. Каплана состоит в следующем.

Задача В. При каждом фиксированном $\epsilon \in (0, 1]$ в области Ω_T требуется найти решение u^ϵ квазилинейного псевдопара-болического уравнения

$$\partial_t u^\epsilon - \chi \partial_t \partial_{xx}^2 u^\epsilon - \nu \partial_{xx}^2 u^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \left[\left(1 + \frac{|\partial_x u^\epsilon|^2 - 1}{\sqrt{(|\partial_x u^\epsilon|^2 - 1)^2 + \epsilon^{2+\theta}}} \right) \partial_x u^\epsilon \right] = f, \quad (6a)$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u^\epsilon(0, t) = u^\epsilon(1, t) = 0, \quad t \in (0, 1] \quad (6b)$$

и начальным данным (2с). Значение $\theta > 0$ является фиксированным параметром.

Уравнение (6а) содержит оператор штрафа А. Каплана $\beta_\varepsilon^{(\theta)}$, действующий из $H_0^{1,2}(0,1)$ в $H^{-1,2}(0,1)$ (при п.в. $t \in (0, T)$) и заданный формулой

$$\beta_\varepsilon^{(\theta)}: \phi \mapsto -\partial_x \left[\left(1 + \frac{|\partial_x \phi|^2 - 1}{\sqrt{(|\partial_x \phi|^2 - 1)^2 + \varepsilon^{2+\theta}}} \right) \partial_x \phi \right]$$

или, эквивалентно,

$$\langle \beta_\varepsilon^{(\theta)}(\phi), \psi \rangle = \int_0^1 \left(1 + \frac{|\partial_x \phi|^2 - 1}{\sqrt{(|\partial_x \phi|^2 - 1)^2 + \varepsilon^{2+\theta}}} \right) \partial_x \phi \partial_x \psi dx$$

$\forall \phi, \psi \in H_0^{1,2}(0,1). \quad (8)$

Этот оператор является дифференциальным, ограниченным и монотонным [5]. В силу этого, имеет место следующее утверждение о корректности задачи В.

Предложение 2. (*[7.Theorems 3.2, 4.1]*) Пусть $f \in C(\bar{\Omega}_T)$, $u_0 \in K$. Пусть дополнительно $u_0 \in H^{2,2}(0,1)$. Тогда для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0,1]$ задача В имеет единственное сильное обобщённое решение $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$.

Определение 2. Говорим, что функция $u^\varepsilon: \Omega_T \mapsto \mathbb{R}$ – это сильное обобщённое решение задачи В, если она удовлетворяет уравнению (6а) п.в. в Ω_T , начальному условию (2с) всюду на $(0,1)$ и условиям регулярности

$$u^\varepsilon, \partial_t u^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^{1,2}(0,1) \cap H^{2,2}(0,1)). \quad (9)$$

Первым основным результатом работы является следующая теорема о сходимости решений задачи В к решению задачи А.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in K \cap H^{2,2}(0,1)$ и $f \in C(\bar{\Omega}_T)$. Пусть $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ – семейство сильных обобщённых решений задачи В, u – решение задачи А, соответствующее заданным u_0 и f . Тогда имеет место предельное соотношение

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ слабо* в } L^\infty(0, T; H_0^{1,2}(0,1)). \quad (10)$$

Далее введём в рассмотрение множество

$$K_\gamma := \{ \phi \in K : |\partial_x \phi|^2 \leq 1 - \gamma \text{ п.в. на } (0,1) \} \subset K. \quad (11)$$

Из теории нелинейных краевых задач с односторонними ограничениями известно, что с помощью уравнений со штрафом, в принципе, можно устанавливать не только разрешимость вариационных неравенств, но и дополнительную регулярность их решений. Такой результат доставляет следующая теорема, которая является вторым основным результатом исследования.

Теорема 2. Пусть $f \in C(\bar{\Omega}_T)$ и $u_0 \in K_\gamma \cap H^{2,2}(0,1)$, $\gamma > 0$. Тогда семейство $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сильных обобщённых решений задачи В и

решение и задачи A в дополнение к (10) связаны следующими предельными соотношениями:

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ сильно в } C([0, T]; H_0^{1,2}(0,1)), \\ \text{слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, T; H^{2,2}(0,1)), \quad (12)$$

$$\partial_t u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_t u \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^{1,2}(0,1)). \quad (13)$$

Соответственно, решение $u = u(x, t)$ задачи A в дополнение к (2a) и (3) обладает повышенным свойством регулярности

$$u \in L^\infty(0, T; H^{2,2}(0,1)). \quad (14)$$

Замечание 3. В случае выпуклого замкнутого множества K достаточно общего вида и начальных данных $u_0 \in K$, стандартная конструкция штрафа в [1] позволила автору установить аппроксимацию решения задачи A с помощью семейства приближённых решений $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$ в виде предельных соотношений

$$u_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} u \text{ слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, T; H_0^{1,2}(0,1)), \\ \text{сильно в } L^2(\Omega_T), \quad (15)$$

$$\partial_t u_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \partial_t u \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^{1,2}(0,1)). \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что усиление свойств аппроксимации решения задачи A с повышением регулярности u_0 и конкретизацией множества K в виде (1) не очевидно в рамках исследований, проведённых в [1].

Сравнивая предельные соотношения (15) – (16) с (12) – (13), замечаем, что (12) являются более сильными (регулярными). Это усиление свойств аппроксимации, как видно из проведённых выше рассуждений, оказалось возможным в силу структуры оператора штрафа A . Каплана $\beta_\varepsilon^{(\theta)}$.

Библиографический список

1. Ptashnyk M. Degenerate quasilinear pseudoparabolic equations with memory terms and variational inequalities // *Nonlinear Anal.* 2007. Vol. 66. P. 2653 – 2675.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // *ДАН СССР.* 1960. Т. 132, № 3. С. 545 – 548.
3. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. Новосибирск: Наука, 1981.
4. Саженкова Т. В., Саженков С. А. Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции // *Труды*

семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 4. / главный редактор Е. Д. Родионов. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. С. 15 – 24.

5. Sazhenkova T. V., Sazhenkov S. A. Kaplan's penalty operator in approximation of a diffusion-absorption problem with a one-sided constraint // Sib. Electron. Mat. Izv. 2019. V. 16. P. 236 – 248.

6. Саженкова Т. В., Саженкова Е. В., Саженков С. А. Аппроксимация решения односторонней задачи для $p(x)$ -эллиптического уравнения // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 6. / главный редактор Е. Д. Родионов. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. С. 82 – 92.

7. Ptashnyk M. Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations // Appl. Anal. 2006. Vol. 85, N 10. P. 1285 – 1299.

Математическое моделирование пористого ледового покрова

К.С. Серых, К.А. Шишмарев
АлтГУ, Барнаул

Исследование задачи о прогибах пористого льда под действием движения внешней нагрузки. Построение функций, описывающих прогиб льда. Определение влияния параметра пористости и толщины льда на гидроупругие волны, распространяемые от нагрузки, в случае конечной глубины.

Ключевые слова: *пористость, ледовый покров, внешняя нагрузка, гидроупругие волны.*

Рассматривается задача определения прогибов ледового покрова бесконечной длины под действием движущейся внешней нагрузки. Замороженный водоем имеет конечную ширину, $-H < z < 0$, в направлении x канал неограничен, Oxz – двумерная декартова система координат. Водоем заполнен идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_l и покрыт льдом. Ледовый покров рассматривается как тонкая упругая пластина с постоянной толщиной h_i и жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E – модуль Юнга ν – коэффициент Пуассона. Внешняя нагрузка (Рисунок 1) моделируется движущимся с постоянной скоростью U локализованным гладким распределением давления по верхней поверхности ледового покрова. Задача определения прогибов ледового покрова в канале формулируется в рамках линейной теории гидроупругости. Прогиб ледового покрова $w(x)$ описывается вертикальным перемещением пластины из состояния покоя, которое удовлетворяет уравнению тонкой упругой пластины [1, 2, 3]

$$Mw_{tt} + Dw_{xxxx} = \rho(x, 0, t) + P(x - Ut), (-\infty < x < \infty, z = 0) \quad (1)$$

Прогибы льда затухают в отдалении от нагрузки

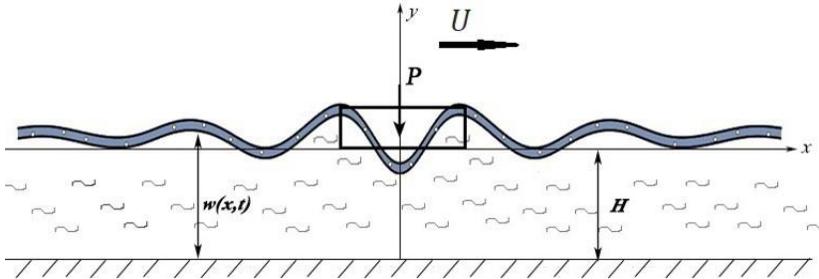


Рисунок 1 – Движение судна на воздушной подушке

$$w \rightarrow 0 \quad |x - Ut| \rightarrow +\infty \quad (2)$$

Внешняя нагрузка моделируется гладким локализованным пятном давления и имеет вид

$$P(x - Ut) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\cos(\pi c(x - Ut)) + 1}{2} \right) & |x - Ut| < \frac{1}{c} \\ 0 & |x - Ut| > \frac{1}{c} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь P_0 – амплитуда приложенного давления, c – параметр, характеризующий размер нагрузки. Потенциал скорости течения жидкости $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (4)$$

условию непротекания на дне:

$$z = 0 \quad (z = -H) \quad (5)$$

и кинематическому условию на границе лёд-жидкость

$$\varphi_z = w_t + \alpha p \quad (z = 0) \quad (6)$$

Пористость льда моделируется с использованием параметра α в уравнении (6). В рассматриваемой модели жидкость может проникать в пластину на нижней границе. На верхней границе пластина непроницаемая. Движение жидкости в самой пластине не учитывается. Давление жидкости $p(x, 0, t)$ определяется через линейризованный интеграл Коши-Лагранжа:

$$p(x, 0, t) = -\rho_e g w - \rho_e \varphi_t(x, 0, t) \quad (7)$$

Задача (1) – (7) решается в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Пусть $\tilde{x} = x - Ut$. Тогда уравнения (1)–(7) примут вид:

$$\widetilde{MU^2 \tilde{W}_{\tilde{x}\tilde{x}}} + D \widetilde{W_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}} = -\rho_e g \tilde{W} + \rho_e U \tilde{\varphi}_{\tilde{x}} + P(\tilde{x}) \quad (8)$$

$$W \rightarrow 0 \quad |\tilde{x}| \rightarrow +\infty \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}_z = -U \tilde{w}_{\tilde{x}} + \alpha \tilde{p} \quad (\tilde{z} = 0) \quad \tilde{\varphi}_z = 0 \quad (\tilde{z} = -H) \quad (10)$$

$$w(x, t) = \tilde{w}(\tilde{x}), \varphi(x, z, t) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}), p(x, z, t) = \tilde{p}(\tilde{x}, z), \frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x}.$$

Искомой функцией является \tilde{W} . Решение задачи 8 – 10 зависит от параметров льда M , D , параметров жидкости ρ_e , H , параметров нагрузки P_0 , c и параметра пористости α . Выбор параметра α является затруднительным. В данной работе исследуются прогибы льда \tilde{W} для некоторых характерных параметров задачи. В дальнейшем знак \sim опускаем.

Вычисления линейных гидроупругие волн в ледовом покрове выполнены для пресноводного льда с плотностью $\rho = 917 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Толщина льда h_i ледового покрова равна 10 см. Глубина воды H равна 2 метрам. Ниже представлены результаты расчётов для волн льда, параметр пористости которого варьируется от 0,00005 до 0,00009, а скорость движения нагрузки изменяется от 3 м/с до 7 м/с.

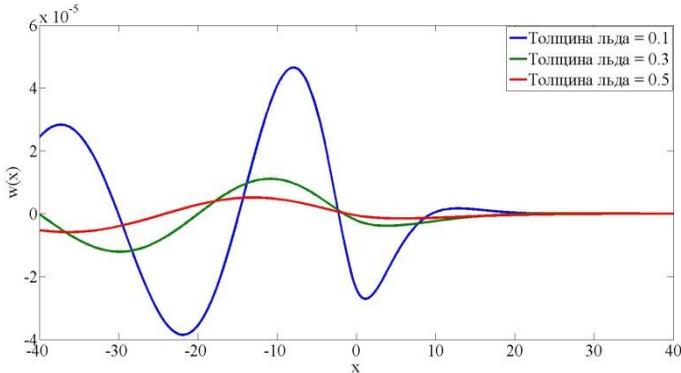


Рисунок – 2: $U=3 \text{ м/с}$

На результатах, изображенных на Рисунке. 2 представлены прогибы льда для случая движения нагрузки со скоростью $U=3 \text{ м/с}$. Можно сказать, о том, что для рассмотренного случая гидроупругие волны берут свое начало позади судна на воздушной подушке и распространяются сзади нее. Амплитуда и длина волны сильно зависит от параметра пористости. В случае увеличения параметра пористости амплитуда волн уменьшается, а длина волны увеличивается. Можно говорить о том, что пористость имеет свойство демпфирования (затухания) колебаний.

Основные результаты, полученные в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

1. Выбрана модель пористого льда. В рассматриваемом случае пористость моделируется учетом параметра, отвечающего за интенсивность проникания жидкости в пластину на нижней поверхности пластины.

2. Исследована задача о движении внешней нагрузки по пористой ледовой пластине. Задача решена в рамках линейной теории гидроупругости методом преобразования Фурье вдоль пластины.

3. Исследовано влияние параметра пористости на прогибы ледового покрова. Получено, что влияние пористости уменьшается с увеличением скорости движения нагрузки по ледовому покрову при постоянной толщине льда. Основным эффектом пористости заключается в уменьшении амплитуд прогибов льда и увеличении длины волны, что говорит о демпфирующем характере пористости. Для большой толщины льда увеличивается эффект пористости на длину волн спереди нагрузки.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008)

Библиографический список

1. Шишмарев, К. А. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления / К. А. Шишмарев, Т. И. Хабахпашева // Вычислительные технологии. – 2019. Т. 24, № 2. – С. 111–128.

2. Shishmarev, K. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // Applied Ocean Research. – 2016. – 59. – p. 313-326.

3. Shishmarev K., Zavyalova K., Bityaev E., Khabakhpasheva T. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice. Water, 2022,14, 281.

Решение задачи о движении подводного тела в замороженном канале с линейно изменяющейся толщиной льда

Т.А. Сибирякова, К.А. Шишмарев

АлтГУ, г. Барнаул;

Рассматривается трехмерная задача о распространении колебаний в ледовом покрове с линейно изменяющейся толщиной льда, вызванных движением подводного тела. Подводное тело моделируется трехмерным диполем постоянной интенсивности, который движется с постоянной скоростью вдоль канала. Диполь, движущийся в канале, моделирует движение сферического твердого тела, если интенсивность диполя достаточно мала и радиус сферы значительно меньше расстояния между диполем и стенками.

Ключевые слова: *идеальная жидкость, гидроупругие волны, диполь, потенциальное течение, неравномерная толщина льда.*

Рассматривается прямоугольный канал, который покрыт льдом. Глубина канала H ($-H < z < 0$), ширина канала $2b$ ($-b < y < b$), вдоль оси абсцисс канал не ограничен ($-\infty < x < \infty$). Рассматривается случай симметричного изменения толщины льда поперек канала. Схема задачи изображена на рисунке 1.

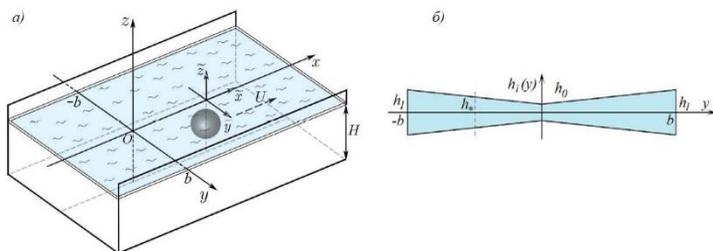


Рисунок 1. а) Схема канала и диполя; б) Схема профиля льда поперек канала

Лед моделируется как тонкая вязкоупругая пластина в рамках линейной теории гидроупругости [1]

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) - \rho_i h_i(y) w_{tt} + p(x, y, 0, t) = 0 \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty, -b < y < b, z = 0)$$

где $w(x, y, 0, t)$ - прогиб ледового покрова, $h_i(y)$ - функция, описывающая изменяющуюся толщину пластины, $p(x, y, 0, t)$ - гидродинамическое давление, вызванное движением тела и отклонением льда, ρ_i - плотность льда, $D = Eh_i^3(y)/(12(1 - \nu^2))$ - жесткость, ν - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, τ - коэффициент релаксации (время запаздывания), соответствующий модели вязкоупругой пластины Кельвина-Фойгта.

Лед приморозен к стенкам канала, что моделируется условиями жесткого защемления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y \pm b) \quad (2)$$

Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Суммарный поток жидкости, вызванный движением диполя и прогибом пластины, является потенциальным с потенциалом скорости течения жидкости $\varphi_{tot}(x, y, z, t)$. Гидродинамическое давление задано нелинейным уравнением Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \left(\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_{tot}|^2 + gz\right). \quad (3)$$

Суммарный потенциал скорости течения жидкости удовлетворяет нелинейному кинематическому условию на границе лед-жидкость

$$\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial y} - \frac{1}{2} h_i'(y)\right)$$

$$\left(-\infty < x < \infty, -b < y < b, z = w(x, y, t) - \frac{1}{2} h_i(y)\right), \quad (4)$$

условиям непротекания на стенках и дне канала

$$\varphi_{tot,y} = 0 \quad (y \pm b), \quad \varphi_{tot,z} = 0 \quad (z = 0) \quad (5)$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_{tot} = 0. \quad (6)$$

в области течения жидкости, исключая небольшую окрестность диполя, расположенного в точке (x_0, y_0, z_0) . В системе координат O_{xyz} , где $X = x - Ut$, движущейся вместе с диполем, диполь является стационарным и в этом случае жидкость движется в отрицательном направлении x с постоянной скоростью U . Тогда потенциал трехмерного диполя в неограниченной жидкости описывается формулой

$$\varphi^D \sim -\frac{UR^3 X}{2 r^3}, \quad \text{где } r = \sqrt{X^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

при $r \rightarrow 0$ и $t = 0$. Здесь $R = (2I/U)^{\frac{1}{3}}$ – радиус сферы, описываемой диполем, полученный из уравнения $d(-IX/r^3 - UX)/dr = 0$.

Потенциал трехмерного диполя, с учетом условий непротекания на границах $y = \pm b, z = 0, z = -H$, определяется с помощью метода зеркальных отображений. Сначала определяется потенциал φ^{D1} с учетом стенок $y = \pm b$, затем на основе φ^{D1} получаем потенциал φ^D с учетом условий на $z = 0, z = -H$

$$\begin{aligned} \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0) = & -\frac{UR^3}{2} X \left[\frac{1}{r^3(y_0, z_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^3(y_0 + 4nb, z_0)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r^3((4n-2)b - y_0, z_0)} + \frac{1}{r^3(y_0 - 4nb, z_0)} + \frac{1}{r^3(-(4n-2)b - y_0, z_0)} \right) \right] \\ \varphi^D(X, y, z) = & \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left((\varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0 + 2mH) + \right. \\ & \left. + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, -z_0 - 2mH) + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0 - 2mH) + \right. \\ & \left. + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, -z_0 + 2(m-1)H) \right) \end{aligned}$$

Таким образом суммарный потенциал имеет вид

$$\varphi_{tot} = \varphi^D(X, y, z) + \varphi^E(X, y, z, t),$$

где φ^E – потенциал течения жидкости, вызванный прогибом пластины w .

Мы рассматриваем случай слабого диполя, когда радиус сферы много меньше половины ширины канала $R/b \ll 1$. После перехода в безразмерные переменные члены при малом параметре $\varepsilon = R/b$ отбрасываются и система уравнений (1) – (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \mu h_{sc} Fr^2 h_i(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \left(1 - \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) [h_i^3(y) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \\ + 6h_i^2(y) \frac{dh_i}{dy} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + 6h_i(y) \left(\frac{dh_i}{dy} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)] + \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} + w - Fr^2 h_{sc} \frac{\partial \varphi^E}{\partial x} = \beta \frac{\partial \varphi^D}{\partial x} \quad (|x| < \infty, |y| < 1, z = 0) \\ w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm 1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\nabla_z^2 \varphi = 0 \quad (|x| < \infty, |y| < 1, -h < z < 0) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_z^E = -w_x(z = 0), \quad \varphi_z^E = 0 \quad (z = -h), \quad \varphi_y^E = 0 \quad (y = \pm 1) \quad (10) \\ \varphi^E \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

где $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$, $\varepsilon = \frac{R}{b}$, $\delta = \frac{\tau U}{b}$, $L_c = \left(\frac{D_*}{\rho_l g} \right)^{\frac{1}{4}}$, $\beta = \frac{L_c}{b}$, $\mu = \frac{\rho_l h_{sc}}{\rho_l b}$, $h_{sc} = \frac{H}{b}$.

Задача (7) – (10) решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и разложения образа Фурье прогиба льда на собственные функции поперек канала, описывающие колебания балки с линейно изменяющейся толщиной льда. Решение задачи поперек канала ищется

в виде ряда функций Бесселя. Похожим образом решается задача о профиле потока. Затем определяются коэффициенты разложения и прогиб ледового покрова $w(x, y)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье. Более детально метод решения приведен в [2] и [3].

Распределение давления от диполя $\varphi_x^D(x, y, 0, 0, -h/2)$ показано на рисунке 2 для диполя, расположенного в центре сечения канала.

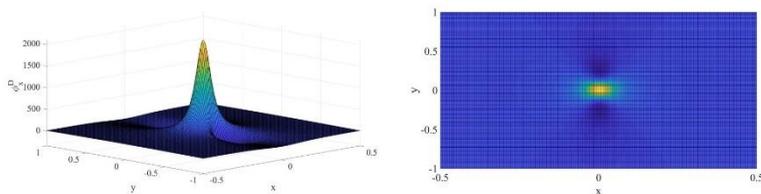


Рисунок 2. Безразмерная функция распределения давления диполя $\varphi_x^D(x, y, 0, 0, -h/2)$

Найдены установившиеся прогибы ледового покрова $w(x, y)$ и распределение деформаций в ледовом покрове $\epsilon(x, y)$ для некоторых характерных параметров задачи. Исследовано влияние разного положения диполя в сечении канала на прогибы ледового покрова и распределение деформаций, а также влияние параметра изменения толщины льда на прогибы льда и распределение удлинений. Получено, что деформации в ледовом покрове сильно зависят, от скорости диполя, его траектории, а также от параметра изменения толщины льда. Вычислены профили волн, создаваемых в канале, а также относительные удлинения в ледовом покрове при изменении его толщины и изменения скорости диполя. Также проведено сравнение с результатами для канала постоянной толщины [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008)

Библиографический список

1. V.A. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne, Moving loads on ice plates. Kluwer Academic Publishers – 1996.

2. K.A. Shishmarev, T.I. Khabakhpasheva, A.A Korobkin, Ice response to an underwater body moving in a frozen channel. *App Oc Res.* 2019, 91, 101877
3. K. Shishmarev, K. Zavyalova, E. Batyaev, T. Khabakhpasheva. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice. *Water.* 2022, 14, 281.

Аналитическое решение дифференциального уравнения насыщения раствора

В.В. Смирнов, Т.М. Тушкина, Д.С. Глушко
БТИ (филиал) АлтГТУ, г. Бийск

В настоящей работе представлен вывод дифференциального уравнения, описывающего процесс насыщения раствора в некотором конечном объёме. Решение соответствующей задачи Коши получено аналитическим способом. Его анализ позволяет ответить на многие вопросы практической направленности.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, насыщение раствора, аналитические методы решения.*

Процессы насыщения растворов играют важную роль в природе и технике, в частности, они имеют широкое применение в пищевой и химической промышленности, где находят реализацию в специализированных диффузионных аппаратах. В этой связи качественное и количественное описание таких процессов является актуальной практической задачей [1]. Ввиду непрерывности процесса во времени в качестве математического аппарата здесь можно использовать дифференциальные уравнения.

Положим, что в некотором объёме диффузионного аппарата находится N литров исходного чистого вещества. Затем в эту ёмкость со скоростью V_1 л/мин начинает поступать то же вещество, но с добавлением примеси в некоторой концентрации K кг/л. Будем считать, что получающийся раствор мгновенно перемешивается, а из рассматриваемого объёма образующаяся смесь удаляется со скоростью V_2 л/мин. Определим, как изменяется концентрация раствора в исходном объёме.

Содержание растворяемого в исходном объёме вещества меняется во времени от начального значения $A_{t=0} = 0$ кг до величины $K \cdot N$ кг. Явная зависимость насыщения раствора от времени $A(t)$ неизвестна, но известна скорость его изменения. Скорость поступления раствора в ёмкость – величина постоянная, равная произведению $V_1 \cdot K$ кг/мин. Концентрация раствора в ёмкости $\frac{A}{N}$ кг/л изменяется во времени с постоянной скоростью V_2 . Отсюда следует уравнение:

$$\frac{dA}{dt} = V_1 \cdot K - V_2 \frac{A}{N}.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим:

$$-\frac{N}{V_2} \cdot \ln \left(V_1 \cdot K - V_2 \frac{A}{N} \right) = t + C. \quad (1)$$

Значение константы интегрирования C может быть получено из начальных условий ($A = 0$ при $t = 0$):

$$C = -\frac{N}{V_2} \ln(V_1 \cdot K).$$

Частное решение уравнения (1), удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид:

$$A(t) = \frac{V_1}{V_2} KN \left(1 - e^{-\frac{V_2}{N}t} \right). \quad (2)$$

Соотношение (2) может быть использовано для расчета концентрации в текущий момент времени. Например, если изначально в ёмкости содержалось $N = 100$ л воды, куда со скоростью $V_1 = 7$ л/мин поступал водный солевой раствор с концентрацией $K = 0,25$ кг/л и удалялась смесь со скоростью $V_2 = 8$ л/мин, то выражение (2) принимает вид:

$$A(t) = 21,875(1 - e^{-0,08t}).$$

Используя последнее уравнение, можно решить две взаимно обратные задачи: определить объем соли в емкости через заданное с момента начала диффузии время и определить время, необходимое для достижения заданной массы соли в аппарате. Например, через 10 минут в емкости окажется 12,046 кг соли, а на получение 10 кг соли понадобится 30,71 мин.

На рисунке 2 представлено поле направлений исходного дифференциального уравнения, здесь же изображено несколько интегральных кривых, соответствующих различным начальным условиям.

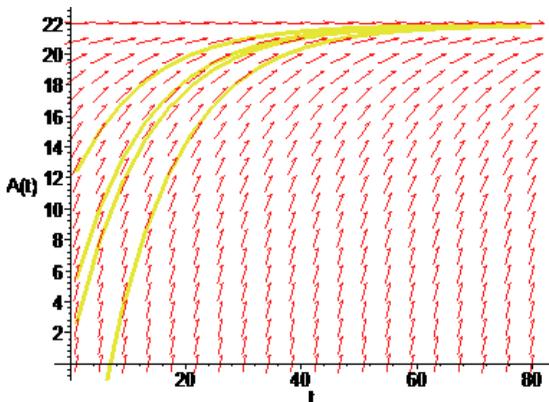


Рисунок 2 – Поле направлений исходного дифференциального уравнения

Из рисунка 2 видно, что независимо от начального уровня насыщения при заданных скоростях введения и удаления раствора, его концентрация в течении часа будет стремиться достичь некоторого предельного значения (около 22 кг на заданный объём 100 литров), меньшего, чем исходная концентрация соли в поступающем потоке (0,25 кг/л).

В настоящей работе получено и аналитически решено дифференциальное уравнение, описывающее процесс насыщения раствора в диффузионном аппарате. Анализ решения уравнения позволяет ответить на многие вопросы, которые могут возникнуть на практике при приготовлении различного рода смесей.

Библиографический список

1. Бекман И.Н. Высшая математика: математический аппарат диффузии. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 397 с.

2. Спиридонов Ф.Ф., Тушкина Т.М., Смирнов В.В. Анализ поведения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Научно-образовательный журнал АлтГТУ. - 2002. - Вып. 4. – 9 с.

Об одной модели распространения периодических волн в замороженном канале с произвольной переменной толщиной льда

К.А. Шишмарев¹, К.Н. Завьялова¹
¹АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию линейных гидроупругих волн, распространяющихся в канале, покрытом льдом. Вдоль канала толщина льда непостоянна. Канал конечной глубины имеет прямоугольное поперечное сечение. В направлении оси х канал неограничен. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Течение, вызванное прогибом льда, является потенциальным. Лед моделируется тонкой упругой пластиной переменной толщины. Метод решения представлен на одном конкретном случае распределения толщины льда.

Ключевые слова: *лед, ледяной канал, гидроупругие волны, переменная толщина льда, кусочно-линейная аппроксимация, упругая пластина.*

В течение последних десятилетий в условиях освоения полярных территорий активно исследуется проблема распространения изгибно-гравитационных волн в ледяных покровах. Основная часть подобных исследований проведена для неограниченного ледового покрова. Вместе с тем, научно-технические эксперименты с ледяным покровом проводятся в ледяных резервуарах конечных размеров и прямоугольных поперечных сечений. Это является причиной тому, что изучение особенностей волн в каналах и того, чем они отличаются от волн в неограниченном ледовом покрове, очень важно. На результаты исследований влияют граничные условия на стенках канала и параметры неоднородного льда. Задачи распространения гидроупругих волн в канале были изучены авторами статьи в разных постановках и для разных ледовых условий в [1] – [3].

Рассматриваемая задача связана с изучением гидроупругих волн, распространяющихся вдоль канала, покрытого льдом переменной толщины и влиянием переменной толщины на характеристики таких волн.

Рассмотрены периодические гидроупругие волны, распространяющиеся в замершем канале. Канал имеет прямоугольное

сечение конечной глубины H ($-H < z < 0$) и конечной ширины $2b$ ($-b < y < b$), в направлении оси x канал неограничен. Здесь $Oxyz$ – декартова система координат. Жидкость в канале невязкая, несжимаемая и покрыта тонким слоем льда. Лед моделируется тонкой упругой пластиной с заданной постоянной плотностью ρ_i и переменной жесткостью $D(y)$, где $D(y) = Eh_i^3(y) / [12 * (1 - \mu^2)]$, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $h_i(y)$ – переменная толщина ледового покрова. В общем случае толщина льда может варьироваться произвольно.

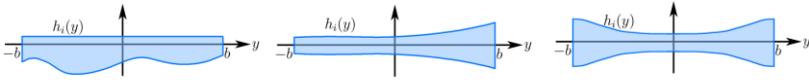


Рисунок 1 – Схемы различных случаев изменения толщины льда в канале

Рассматриваемая задача решается в рамках линейной теории гидроупругости и состоит из двух связанных частей. Первая часть связана с определением прогибов льда $w(x, y, t)$. Другая часть задачи связана с описанием гидродинамики в канале и определением потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$. Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению тонкой упругой пластины переменной толщины поперек канала и условиям жесткого закрепления на стенках канала. Потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области канала и граничным условиям непроницаемости на жестких границах канала и линеаризованному кинематическому условию на границе раздела лед-жидкость. Подробная система уравнений представлена в [4]. Искомые функции $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$ представляются в виде периодических гидроупругих волн с постоянной амплитудой A , волновым числом k и частотой ω распространяющихся вдоль канала

$$w(x, y, t) = A \operatorname{Re}(F(y)e^{i(kx + \omega t)}), \quad (1)$$

$$\varphi(x, y, z) = A \operatorname{Re}(i\Phi(y, z)e^{i(kx + \omega t)}). \quad (2)$$

С помощью формул (1) – (2) определяются дисперсионные соотношения $\omega(k)$ и другие характеристики периодических волн.

Задача решается в безразмерных переменных. Все переменные и функции записываются в безразмерной форме и имеют те же обозначения, что и размерные. Масштаб длины принимается равным половине ширины канала b , масштаб по времени $\frac{1}{\omega}$, масштаб отклонения амплитуды A , $\rho_l g A$ – масштаб давления жидкости, $Ab\omega$ – масштаб потенциала скорости. Здесь ρ_l – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

В результате подстановки (1) – (2) в уравнение тонкой упругой пластины, рассматриваемая задача сводится к поиску вида представлений для $F(y)$ и $\Phi(y, z)$

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(y), \quad (3)$$

$$\Phi(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(y, z). \quad (4)$$

$F(y)$ нормальные моды ледяной пластины с переменной толщиной рассчитываются с использованием кусочно-линейной аппроксимации толщины пластины. Модели представлены функциями Бесселя с интервалами, где толщина пластины линейна, и тригонометрическими и гиперболическими функциями, где толщина аппроксимируется как постоянная. Описанный способ решения может быть применен для толщины льда произвольной формы. Потенциал скорости $\Phi(y, z)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = \kappa^2 \Phi_n, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = 0, (y = \pm 1), \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = 0, (z = -h), \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = \psi_n, (z = 0) \quad (6)$$

Результирующая система линейных уравнений для главных координат a_n запишется в матричном виде

$$\{\beta[D - 6\mu\kappa^2 T + \kappa^4 K + 2\kappa^2 S] + M_1 - \gamma[\delta I + M_2]\}a = 0, \quad (7)$$

где все матрицы $D = \text{diag}\{D_n\}$, $T = \{T_{nm}\}$, $K = \{K_{nm}\}$, $S = \{S_{nm}\}$, $M_1 = \{M_{nm}^{(1)}\}$, $M_2 = \{M_{nm}^{(2)}\}$ повторно симметричны, I – единичная матрица.

Нетривиальное решение результирующей системы уравнений существует, если определить матрицы в фигурных скобках равными

нулю. Учитывая это условие, частоты ω определяются для каждого k . Таких соотношений будет бесконечно много. В рассмотренном случае вычисляются только первые N частот. Точность вычислений возрастает с увеличением числа N . Дисперсионные соотношения нумеруются как наименьшие для $n=1$ и увеличиваются с числом n для того же k . Каждое дисперсионное соотношение соответствует моде колебаний льда в канале с профилем $F_n(y)$ поперек канала. Результаты расчетов показали, что характеристики гидроупругих волн, распространяющихся вдоль канала, покрытого льдом переменной толщины, зависят от распределения толщины льда в канале.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Библиографический список

1. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves propagating along a channel with ice cover // *Eur. J. Mech.-B/Fluids*. – 2014. – 47. – P. 166–175.
2. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet // *Fluid Dyn.* – 2015. – 50. – P. 775–788.
3. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.* – 2016. – 59. – P. 313–326.
4. Shishmarev K., Zavyalova K., Batyaev E., Khabakhpasheva T. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice // *Water*. – 2022. – 14. – P. 281.

**Исследование поведения распространяющихся
гидроупругих волн в случае симметричного изменения
толщины ледового покрова в канале**

К.А. Шишмарев¹, К.Н. Завьялова¹, Т.И. Хабахпашева²
*¹АлтГУ, г. Барнаул; ²Институт гидродинамики им.
Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск*

Исследуются периодические изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся по замершему каналу с учетом симметричного и несимметричного изменения толщины льда. Канал имеет прямоугольное поперечное сечение. Жидкость в канале вязкая, несжимаемая и покрыта льдом. Течение, вызванное прогибом льда, является потенциальным. Лед моделируется тонкой упругой пластиной, толщина которой изменяется линейно. Периодическая двумерная задача сводится к задаче о профилях волн поперек канала. Решение последней получено методом нормальных мод упругой пластины с линейным изменением толщины.

Ключевые слова: *изгибно-гравитационные волны, канал, ледяной покров, неравномерная толщина льда, упругая пластина, критическая скорость, дисперсионные соотношения.*

Существуют разные прикладные задачи, связанные со льдом. В частности, с транспортировкой грузов по замороженным рекам, с посадкой самолетов на лед. С другой стороны, есть задачи, связанные с разрушением ледового покрова судном, движущимся на воздушной подушке. В работах [1] – [3] представлены схожие по постановке задачи. Еще один тип задач связан с исследованиями в экспериментальных бассейнах. В такого типа задачах необходимо при интерпретации результатов учитывать наличие стенок бассейна.

В работе исследуются изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся в замершем канале. Искомыми функциями являются прогибы ледового покрова $w(x, y, t)$ и потенциал скорости течения $\varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющие системе уравнений, представленной в [4]. Задача решается в безразмерных переменных. Все переменные и функции записываются в безразмерной форме и имеют те же обозначения, что и размерные. В процессе обезразмеривания

введены следующие масштабы: по времени – $\frac{1}{\omega}$; для давления жидкости – $\rho_l g A$; для потенциала скорости – $Ab\omega$; A – амплитуда гидроупругих волн.

Толщина льда является функцией поперечной координаты y . Основными параметрами толщины льда являются ее среднее значение h_s , минимальное значение h_0 и максимальное значение h_1 . Тогда $h_i(y)$ можно представить в виде

$$h_i(y) = h_0(1 + \alpha_1 |y/b|), \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{h_1 - h_0}{h_0}, \quad h_i(0) = h_0, \quad h_i(\pm b) = h_1.$$

В результате подстановки представлений искомым функций $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$ в уравнение пластины и группировки слагаемых, получена комбинация, представляющая собой дифференциального уравнения Бесселя

$$h_i(y)[h_i^2(y)F'''' + 6h_i(y)h_i'F'' + 6(h_i')^2F'] = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) удобно искать в виде бесконечного ряда

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(y), \quad (3)$$

где $\psi_n(y)$ – моды колебаний балки непостоянной толщины, представлены функциями Бесселя, удовлетворяющие одному из двух уравнений в зависимости от знака y

$$(1 + \alpha_1 y)^2 \psi_n'''' + 6\alpha_1(1 + \alpha_1 y)\psi_n'' + 6\alpha_1^2 \psi_n'' = \theta_n^4 \psi_n, \quad (0 \leq y < 1), \quad (4)$$

$$(1 - \alpha_1 y)^2 \psi_n'''' - 6\alpha_1(1 - \alpha_1 y)\psi_n'' + 6\alpha_1^2 \psi_n'' = \theta_n^4 \psi_n, \quad (-1 < y < 0), \quad (5)$$

Легко показать, что решением системы (4) – (5) могут быть как четные, так и нечетные функции. Эти решения будут найдены независимо друг от друга посредством одного и того же алгоритма. На первом шаге находим решение уравнения (4), затем четным или нечетным способом, в зависимости от случая, продолжаем найденное решение до отрицательных значений y . Для двух решений граничные условия при $y=1$ одинаковы, но при $y=0$ они различны. Нечетные моды $\psi_n(y)$ являются решениями спектральной задачи с управляющим уравнением (4), граничные условия при $(y=1)$

$$A_n J_1(\eta_n \zeta_+) + B_n Y_1(\eta_n \zeta_+) + C_n I_1(\eta_n \zeta_+) + D_n K_1(\eta_n \zeta_+) = 0, \quad (6)$$

$$A_n J_0(\eta_n \zeta_+) + B_n Y_0(\eta_n \zeta_+) + C_n I_0(\eta_n \zeta_+) + D_n K_0(\eta_n \zeta_+) = 0, \quad (7)$$

где $\zeta_+ = \sqrt{1 + \alpha_1}$ и граничные условия нулевого прогиба льда и нулевого изгибающего момента в центре балки, ($y = 0$)

$$A_n J_1(\eta_n \zeta_0) + B_n Y_1(\eta_n \zeta_0) + C_n I_1(\eta_n \zeta_0) + D_n K_1(\eta_n \zeta_0) = 0, \quad (8)$$

$$A_n J_0(\eta_n \zeta_0) + B_n Y_0(\eta_n \zeta_0) + C_n I_0(\eta_n \zeta_0) - D_n K_0(\eta_n \zeta_0) - \eta_n \psi_{1n}(\zeta_0) = 0, \quad (9)$$

$$\psi_{1n}(\zeta_0) = A_n J_1(\eta_n \zeta_0) - B_n Y_1(\eta_n \zeta_0) + C_n I_1(\eta_n \zeta_0) + D_n K_1(\eta_n \zeta_0) = 0.$$

Здесь $\zeta_0 = 1$. Четные моды $\psi_n(y)$ являются решениями той же спектральной задачи с условиями (8) – (9), замененными условиями нулевого наклона и нулевых поперечных сдвигов балки с неравномерной толщиной в центре

$$A_n J_1(\eta_n \zeta_0) + B_n Y_1(\eta_n \zeta_0) + C_n I_1(\eta_n \zeta_0) + D_n K_1(\eta_n \zeta_0) - \eta_n \psi_{0n}(\zeta_0) / 2 = 0, \quad (10)$$

$$\psi_{1n}(\zeta_0) - \eta_n \psi_{2n}(\zeta_0) / 2 = 0, \quad (11)$$

$$\psi_{0n}(\zeta_0) = A_n J_0(\eta_n \zeta_0) + B_n Y_0(\eta_n \zeta_0) + C_n I_0(\eta_n \zeta_0) - D_n K_0(\eta_n \zeta_0),$$

$$\psi_{2n}(\zeta_0) = -A_n J_0(\eta_n \zeta_0) - B_n Y_0(\eta_n \zeta_0) + C_n I_0(\eta_n \zeta_0) - D_n K_0(\eta_n \zeta_0).$$

Резльтирующее уравнение пластины переписывается в матричном виде

$$[\beta D + \beta \kappa^4 K + 2\beta \kappa^2 S + M_1 - \gamma M_2] \vec{a} = 0, \quad (12)$$

где $D = \text{diag}(\Theta_n^4 - 6\alpha^2 \mu \kappa^2 - \frac{\gamma \delta}{\beta})$, $S = \int_{-1}^1 h_i^3 \psi_n' \psi_m' dy$, $K = \int_{-1}^1 h_i^3 \psi_n \psi_m dy$,

$$M_1 = \int_{-1}^1 \psi_n \psi_m dy, \quad M_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_{nj} \bar{A}_{mj}}{\mu_j \tanh(\mu_j h)} - \text{нечетный случай},$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{A}_{n0} \bar{A}_{m0}}{\mu_0 \tanh(\mu_0 h)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_{nj} \bar{A}_{mj}}{\mu_j \tanh(\mu_j h)} - \text{четный случай}.$$

Численные результаты показали, что дисперсионные соотношения, фазовые и групповые скорости для неравномерного льда наиболее близки к аналогичным значениям для равномерного льда с толщиной равной значению средней толщины неравномерного льда. Также получено, что увеличение коэффициента изменения толщины понижает дисперсионные соотношения, фазовые и групповые скорости; сдвигает максимальные значения амплитуд волн к центру канала.

Работа выполнена при поддержке совместного проекта ТУБИТАК и РФФИ 20-58-46009 СТ_а «Нагрузки на инженерные сооружения в морском льду».

Библиографический список

1. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии // Полярная механика. – 2016. – № 3. – С. 997-1007.

2. Shishmarev K.A., Papin A.A. Uniqueness of a solution of an ice plate oscillation problem in a channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2018. – 11(4) . – P. 449-458.

3. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2019. – 86. – P. 154–165.

4. Shishmarev K., Zavyalova K., Batyaev E., Khabakhpasheva T. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice // Water. –2022. –14. – P. 281.

Ограниченность решения задачи Коши для неоднородной системы движения вращающейся жидкости при малых финитных колебаниях

С.И. Янов

АлтГПУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию ограниченности решения задачи Коши для неоднородной системы движения вращающейся жидкости при малых финитных колебаниях.

Ключевые слова: *ограниченность решения, задача Коши, неоднородная система Соболева.*

Исследуется ограниченность решения задачи Коши для системы С.Л. Соболева [1, с. 51], описывающей малые колебания вращающейся жидкости:

$$\begin{aligned} \vec{V}_t - [\vec{V} \times \vec{\omega}] + \text{grad } P = \vec{f}, \quad \vec{x} = (x, y, z) \in R^3, \quad t \geq 0 \quad (1) \\ \text{div } \vec{V} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{V}|_{t=0} = 0, \quad P|_{|(x,y,z)|=\infty} = 0, \quad \vec{\omega} = (0, 0, 1).$$

Ранее поведение решения задачи Коши исследовалось для уравнения Соболева:

$$\Delta u_{tt} + u_{zz} = h \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi.$$

В работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4-], С.И. Янова [5], [6-9] была получена асимптотика в разных случаях для задачи (2).

В работе С.И. Янова [10] установлена асимптотика давления P задачи (1) в зависимости от воздействия силы \vec{f} ($D_x^B P = O(t^{-2/5})$, $|B| \geq 0$), и характер поведения скоростей (либо осциллирующие, либо суммируемы по t на $[0, \infty)$) и не меняют своего знака в некоторой окрестности $t = \infty$. Однако осцилляция скоростей не была исследована. Она возможна с ограниченной амплитудой или с неограниченной, даже для функций, преобразование Лапласа от которых ограничено, например $f(t) = t \sin(at)$, (см. [6], § 2.1, пример 5

). Настоящая работа уточняет результаты работы [10] для случая финитной функции \vec{f} по x и по t и колебательного $f_3(t, x)$.

Теорема. Если при каждом $t \geq 0$ $f_i(t, \bar{x}) \in C_0^\infty(R^3)$, $i=1,2,3$ и $\text{supp}_x f_i(t, \bar{x}) \subset U_R = \{ \bar{x} : |\bar{x}| \leq R \} \quad \forall t \geq 0$
 $\text{supp}_t f_i(t, \bar{x}) \subset (t_1, t_2)$, $0 < t_1 < t_2$, функции $f_i(t, \bar{x})$ непрерывно дифференцируемы и финитны по t , причем $f_3(t, \bar{x})$ имеет «колебательный характер», то есть существует финитная по t непрерывно дифференцируемая функция $g(t, \bar{x})$, такая что $f_3 = g'_t$, тогда решение задачи (1) является ограниченной функцией.

Замечание. Кратко, содержание теоремы можно сформулировать так, колебания $f_i(t, x)$, $i=1,2,3$, $f_3(t, x) = g'(t, x)$ финитные в пространстве и во времени $t_1 < t < t_2$ не могут вызвать неограниченный рост абсолютной величины давления или скоростей. Однако, если увеличивать интервал финитности $((t_1', t_2') \supset (t_1, t_2))$, или $\text{supp}_x f_i$, то это может привести к увеличению максимальной абсолютной величины давления или максимальных абсолютных величин скоростей в некоторых точках x из R^3 в определенные моменты времени.

Библиографический список

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. -1954. – Т. 18. - № 1. – С. 3 – 50.
2. Масленникова В.Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – Т.103.- С. 117 – 141.
3. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24. - № 5. – С. 199 – 210.
4. Успенский С.В., Васильева Е.Н. Качественное исследование решения одной задачи С.Л. Соболева при $t \rightarrow \infty$ // Тр. МИАН. – 1995. – Т. 210. – С. 274 – 283.
5. Успенский С.В., Васильева Е.Н., Янов С.И. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 311 – 319.
6. Янов С.И. Пространства типа Соболева – Винера и асимптотические свойства их функций. – Барнаул: Изд-во БГПУ. 2007. – 113 с.
7. Янов С.И. Приложения пространств типа Соболева – Винера. – Барнаул: Изд-во АлтГПА. – 2012. – 91 с.

8. Янов С.И. Асимптотика решения задачи Коши для системы Соболева // INFO'17: сборник трудов № 9 (!?). – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ. 2017. – С. 182-184.

9. Янов С.И. Асимптотическое разложение решения первой начально-краевой задачи для системы малых колебаний вращающейся жидкости // МАК: «Математики - Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул, 1 – 5 июля 2020 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – С. 100 – 102.

10. Янов С.И. Асимптотика решения задачи Коши для неоднородной системы Соболева при малых финитных возмущениях // МАК 2021. Сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2021, - С. 129-131.

СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА

УДК 519.8

К условиям сходимости модели коллективного поведения к равновесию в линейной модели олигополии

Д.Г. Алгазина
АлтГУ, г. Барнаул

Обсуждаются условия сходимости модели динамики коллективного поведения к равновесию Нэша в модели олигополии Курно в условиях неполной информации.

Ключевые слова: коллективное поведение, модель олигополии, равновесие, неполная информация.

Исследования и опыт применения теоретико-игровых моделей конкурентного рынка свидетельствует о том, что имеет место фундаментальная проблема априорной неосведомленности агентов о выборе действий другими агентами. В рамках своей информированности агенты вынуждены делать прогнозы действий конкурентов и следовать некоторой повторяемой процедуре принятия индивидуальных решений.

Для построения таких процедур может быть показано применение модели динамики коллективного поведения, суть которой заключается в следующем.

В каждый момент времени $(t+1)$ каждый i -й агент наблюдает действия всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t , и корректирует свое действие, делая шаг в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ согласно следующей итерационной процедуре [1, 2]

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N = \{1, \dots, n\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ – параметры, независимо выбираемые агентами, определяют величины их шагов к текущему положению цели. Текущее положение цели i -го агента $x_i(q_{-i}^t)$ зависит от действий остальных агентов, где $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$, и определяется как такое его

действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущий.

Существует как минимум два основания для объяснения интереса к моделям теории коллективного поведения [2, 3]:

1) теория коллективного поведения занимается исследованием динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Нет необходимости требовать знания агентами множеств допустимых действий и целевых функций конкурентов, их функций затрат и пр.;

2) равновесия динамик коллективного поведения, как правило, являются статическими равновесиями Нэша [4] в теоретико-игровой модели рынка.

Равновесие динамики коллективного поведения не всегда достижимо даже в случае, когда в модели олигополии существует равновесие. Условия сходимости динамики относятся к выбору параметров γ_i^{t+1} , числу агентов n на рынке и к начальным приближениям $q^0 = (q_1^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$

Для модели олигополии Курно с линейными функциями затрат и спроса [5] динамика коллективного поведения сходится к рыночному равновесию при любом числе агентов, если в каждый момент времени агенты корректируют свои предыдущие объемы выпуска малыми шагами γ_i^{t+1} [1, 6, 7]. Динамика также сходится для модели дуополии, если каждый из двух агентов делает максимальный шаг, т. е. в каждый момент времени выбирает свой наилучший ответ $\gamma_i^{t+1} = 1$ на ожидаемый объем выпуска конкурента [5]. Для модели рынка с числом агентов больше двух такая динамика расходится, часто могут расходиться динамики, если агенты выбирают большие шаги [6, 7]. Задаче определения диапазонов независимого выбора агентами параметров γ_i^{t+1} , для которых гарантируется сходимость динамик, посвящено значительное число работ (см., например, [8–11]). Известна закономерность, что при увеличении числа агентов на рынке диапазоны сходимости сужаются.

В ряде случаев начальные условия могут оказывать существенное влияние на сходимость динамик. В частности, показано [6], что для модели олигополии с произвольным числом агентов динамики сходятся $\forall \gamma_i^{t+1} \in (0; 1]$, даже если начальные выпуски всех агентов не

являются равновесными, но в сумме дают равновесный общий выпуск. При других начальных выпусках динамики могут не сходиться.

Библиографический список

1. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
2. Novikov D.A. Models of Strategic Behavior // Automation and Remote Control. – 2012. – V. 73. – No. 1. – P. 1–19.
3. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. – Leiden: CRC Press, 2014. – 298 p.
4. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. – 1951. – No. 54. – P. 286–295.
5. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. – London: Hafner, 1960 (Original 1838). – 213 p.
6. Алгазина Д.Г., Алгазина Ю.Г. Динамика и равновесие в модели Курно при неполной информации // Вестник СибГУТИ. – 2019. – № 4. – С. 10–15.
7. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. – 2022. – Т. 21. – № 2. – С. 339–375.
8. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Сравнительный анализ итерационных процессов вычисления равновесий в моделях олигополии // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2020. – № 1 (111). – С. 63–67.
9. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Applied Mathematics and Computation. – 2019. – vol. 362 // <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535>.
10. Askar S.S., Elettreybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Applied Mathematics and Computation. – 2017. – vol. 312. – pp. 169–176.
11. Fedyanin D.N. Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // Procedia Computer Science. – 2021. – vol. 186(3). – pp. 411–417.

Разработка конструкции парктроника с помощью ультразвукового устройства для автомобиля

А.С. Амангелдин^{1,2}, Е.В. Понькина¹, А. Салтанат²

1 - Алтайский государственный университет, Россия

2 - Восточно-Казахстанского университета им. С.

Аманжолова

В работе представлены результаты разработки конструкции парктроника, позволяющей в интерактивном режиме осуществлять автоматические измерения дистанции до ближайшего объекта, записывать и воспроизводить информацию на дисплее для пользователя. Также устройство снабжено световыми индикаторами и пьезозвуковым устройством. В качестве базовой платформы разработки устройства рассматривается Ардуино.

Ключевые слова: *ультразвуковой датчик, Ардуино, автоматические измерения*

Задачи анализа данных возникают в различных областях деятельности. Одной из таких областей является измерение и анализ параметров, связанных с состоянием автомобиля в ходе его движения. Анализ данных парковки автомобиля или сохранения дистанции до ближайшего объекта во время движения автомобиля за некоторый период позволяет оценить степень «опасности» вождения, стиль вождения, выявить критические точки и в целом дать информацию для повышения безопасности управления транспортным средством. В связи с этим разработка различного рода устройств, позволяющих измерять различные параметры автомобиля, собирать и хранить информацию является актуальной.

Целью работы – разработка и сборка модельной конструкции парктроника для автомобиля на платформе Arduino, с последующим тестированием и оценкой работоспособности конструкции.

Парктроник снабжен пьезозвуковым устройством, издающим специальный сигнал. При приближении опасности (барьера, преграды) датчик издает голосовой сигнал с различной частотой. Поэтому чем ближе опасность, тем чаще слышен сигнал. Если сигнал слышен

непрерывно, это означает, что опасный объект находится очень близко к автомобилю, поэтому необходима экстренная остановка.

Общая конструкция. Конструкция парктроника была собрана в электронном комплекте Arduino Uno R3. Плата Arduino Uno является центром огромной империи Arduino, самым популярным и доступным устройством. В его основе лежит чип ATmega-Arduino Uno R3 – это ATmega328, на рынке можно также встретить варианты платы ATmega168 UNO.

Рассмотрим основные характеристики, характеристики и устройство платы Arduino Uno R3, требования к мощности, возможности подключения внешних устройств, отличия от других плат (Mega, Nano).

В состав системы входят:

- 1) датчики;
- 2) блок индикации (ЖК-дисплей, светодиодный дисплей, звуковой сигнал и т. д.);
- 3) блок управления (может быть интегрирован с блоком индикации);
- 4) ультразвуковой датчик.

При обнаружении помехи система издает предупреждающий звук и в некоторых версиях отображает на дисплее информацию о расстоянии. Первые сигналы появляются при приближении к барьеру на 1-2 метра, а при опасном приближении к барьеру сигнал становится более тревожным. В некоторых моделях можно отключить систему по желанию пользователя. Как правило, парктроник содержит датчики, устанавливаемые с переди автомобиля и в задней части. Датчик, расположенный в задней части автоматически включается вместе с включением задней передачи автомобиля. В системах с передними датчиками, а также называемыми угловыми датчиками (corner sensors) запуск происходит на низкой скорости (до 20 км/ч). Индикаторный блок подключается к датчикам через провод, проложенный вдоль кузова автомобиля, но существуют и беспроводные системы, отличающиеся удобством монтажа.

Ультразвуковой датчик запатентован в 1978 году. Принцип действия аналогичен эхолоту: датчик генерирует короткий ультразвуковой (около 40 кГц) импульс, после чего окружающие объекты принимают отраженный сигнал. Электронный блок измеряет время между выходом и приемом отраженного сигнала и вычисляет расстояние до объекта, принимая скорость звука в воздухе за пределы постоянной. Ультразвуковые датчики устанавливаются на бампер автомобиля, а направленный характер излучателей позволяет

сформировать необходимую зону чувствительности. Первичные системы имели отдельные излучающие и принимающие датчики, а затем занимались передачей и приемом одного пьезоэлемента. Дороговизна электроники изначально привела к механическому сканированию заднего полушария одним датчиком. Сегодня датчики устанавливаются регулярно, а отсутствие мертвых зон достигается установкой нескольких датчиков. Простые системы используют два датчика. Наиболее распространенные системы, использующие в заднем бампере 4 датчика, расположенные на расстоянии 30-40 см друг от друга. Такое расположение датчиков позволяет избежать появления "мертвых зон". В более сложных системах на передний бампер устанавливается 2 или 4 датчика. Уникальные системы могут использовать большое количество датчиков, а также датчиков, расположенных по бокам автомобиля.

Парктроник не имеет возможности воспроизведения изображения, а в качестве монитора чаще всего используется небольшая цифровая дисплей с индикатором расстояния. Такая система очень проста, а ультразвуковые датчики на заднем бампере сканируют обширную область в задней части автомобиля. В случае обнаружения помехи на близком расстоянии от автомобиля датчик мгновенно посылает сигнал в центральный блок. Звуковой сигнал встроенного бипера сразу же привлечет внимание водителя, после чего, ориентируясь на световой индикатор, можно определить местоположение мешающего предмета и расстояние до него. В современных парковочных радарах используются датчики, способные работать в любую погоду и при различных температурах.

Сложность установки парктроников заключается в правильном расположении ультразвуковых датчиков. Они должны быть расположены таким образом, чтобы ультразвуковой сигнал охватывал максимальный фрагмент на пути движения автомобиля. Если все сделать правильно, даже простой парковочный радар не подведет и в любом случае обеспечит целостность автомобиля при парковке.

Для изготовления корпуса парктроника, разработана 3D модель устройства в среде Blender. Печать корпуса выполнена на 3D принтере Duplicator i3. Использование подобного оборудования позволяет выполнять проектирование устройств с индивидуальными параметрами и оригинальной конструкции.

Разработанное устройство было протестировано в лабораторных и реальных условиях и показало свою работоспособность. В дальнейшем планируется дополнить систему мониторинга и сбора данных параметров автомобиля дополнительными элементами, в

частности считывать и записывать сигналы от системы ABS, расхода топлива, скорости движения и т.д. Накопленные данные за ряд периодов и их анализ позволят оценить стиль вождения, частоту возникновения опасных ситуаций, точность парковки автомобиля и др.

Библиографический список

1. Бейктал Дж. Конструируем роботов на Arduino. Первые шаги – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 320 с.
2. Корягин А.В. Образовательная робототехника Lego WeDo. Сборник методических рекомендаций и практикумов. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 254 с.
3. Краснова С.А. Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. – М.: Ленанд, 2014. – 208 с.
4. Крейг Дж. Введение в робототехнику. Механика и управление: моногр. – М.: Институт компьютерных исследований, 2013. – 564 с.

Поддержка принятия решений по страхованию жизни в условиях неопределенности и риска

Е.А. Захарова

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию принятия решений при выборе программы страхования жизни при помощи методов теорий принятий решений, теории вероятностей, теории игр, а также методов прогностической аналитики с применением алгоритмов машинного обучения.

Ключевые слова: *принятие решений, инвестиционное и накопительное страхование жизни, искусственные нейронные сети, матрица рисков, матрица доходов, блокчейн.*

Одной из отличительных черт современной системы поддержки принятий в страховании решений является широкое использование информационных технологий.

Актуальность внедрения технологий в процесс принятия решений можно увидеть в показателях ежегодного роста инвестиций в цифровизацию бизнес-процессов страховой компании. Согласно новому отчету перестраховочного брокера Gallagher Re [1], глобальные инвестиции в сектор страховых технологий достигли 15,8 млрд долларов в 2021 году, что является рекордным показателем [2].

Страховые компании благодаря внедрению цифровых технологий решают поставленные задачи и проблемы в таких направлениях как андеррайтинг, урегулирование убытков, организация работы колл-центров, отслеживание мошеннических действий, контроль страховых резервов, маркетинге и в прочих бэк-офисах (HR, бухгалтерия, финансы).

Инструменты для решения поставленных задач: актуарные расчеты, прогностическая аналитика, технология блокчейн, модель поддержки принятия решений в страховании жизни в условиях неопределенности и риска.

Актуарные расчеты. Актуарные расчеты являются одним из ключевых математических и статистических средств, с помощью которых создаются страховые тарифы [3]. Актуарная оценка необходима для принятия таких важных решений, как расчет

себестоимости продукта страхования и прогноз возможных убытков. На основе актуарных расчетов разработаны, следующие методы [4] прогноза риска: метод одномерного дисперсионного анализа [1], процедура минимальной погрешности (Minimum Bias Procedure) [5], и наиболее сложный, но более востребованный в страховых компаниях по всему миру, метод обобщенных линейных моделей (Generalized Linear Models; Nelder and Wedderburn) [6].

Прогностическая аналитика. Данный метод прогностической аналитики разработан британской многонациональной компанией “Пруденшиал Финанс” [7].

Целью данного метода является разработка прогностической модели, которая классифицирует риски с использованием алгоритмов машинного обучения: множественная линейная регрессия, классификатор дерева решений, рандом дерево, искусственная нейронная сеть. Оценка эффективности модели проводилась с использованием средней квадратической ошибкой (MAE) и среднеквадратической ошибкой (RMSE).

Технология блокчейн. Технология блокчейн способна решить важную проблему страховой компании, а именно - повысить взаимное доверие участников страхового дела. Достигается это благодаря тому, что блокчейн имеет децентрализованную систему, где невозможно подделать или изменить данные о прошлых операциях, а значит исключаются факты мошеннических операциях [8]. Также, технология использует смарт-контракты, помогающие обеспечить автоматические выплаты по страховым событиям и увеличить скорость обработки заявки. Технология блокчейн уже применяется за рубежом и есть некоторые проекты в России [9].

Модель поддержки принятия решений по выбору программы страхования жизни. Модель разработана для для оценки риска и доходности продуктов страхования.

Доход в продуктах страхования складывается из выплаты суммы по страховым рискам, начисленному инвестиционному доходу и получению подоходного налога в продуктах сроком действия от 5 лет. Таким образом, ожидаемый доход зависит от следующим факторов: случайные, неопределенные, детерминированные.

Риски в случайных факторах оцениваются с помощью методов теории игр и математической статистики [10].

Под риском, в данном контексте, мы понимаем отклонение от желаемого результата. Лицо, которому предстоит принять решение, необходимо оценить степень риска, который выражается в размере получения дохода в виде премий по программе накопительного и

инвестиционного страхования жизни. Наступление того или иного события зависит от ряда факторов с определенной долей вероятности. Рассмотрим подход теории “игры с природой”. Пусть у ЛПР имеется m возможных стратегий A_1, A_2, \dots, A_m и возможно предположить n вариантов наступления страхового случая $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ с известной вероятностью их появления p_j . Выиграшем в данной стратегии является ожидаемый доход в виде выплаты страховой премии a_{ij} , которую получает ЛПР при выборе программы страхования A_i для каждого страхового случая Π_j .

В таком случае, можно составить матрицу A ожидаемого дохода, где

страховой случай Π_j имеет вероятностей характер, следует:

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Благодаря этому, мы можем посчитать математическое ожидание наступления страхового случая:

$$M_i = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}.$$

Оптимальной будет считаться та стратегия, для которой математическое ожидание будет максимальным.

Для того, чтобы понять, насколько одно страховое событие влияет на страховые выплаты, вводится параметр риск. Для его оценки, используется матрица риска. При выборе страховой программы A_i и наступления страхового случая Π_j разность между максимально возможным доходом β_j и доходом выбранной программы a_{ij} называется риском r_{ij} :

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где, β_j - максимальное число в столбце страховых случаев Π_j .

Средний риск считаем по формуле:

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} p_{ij}$$

Очевидно, что оптимальной считается та программа страхования, у которой средний риск имеет минимальное значение.

Неопределенные факторы влияют на размер инвестиционного дохода, который зависит от стоимости базового актива. Для прогноза стоимости используется метод машинного обучения с применением рекуррентных нейронных сетей нейронных (RNN) с долговременной и кратковременной памятью (LSTM).

Детерминированные факторы оцениваются исходя из срока накопительного и инвестиционного страхования жизни. В соответствии с Налоговым кодексом РФ [11], налогоплательщик имеет право на получение социального налогового вычета 13% с суммы

уплаты страховых взносов за добровольное страхование жизни сроком не менее 5 лет .

В результате вычислительных экспериментов, формируется итоговая доходность по каждой программе страхования:

Таблица - Фрагмент матрицы прогноза доходности по продуктам страхования, тыс. руб.

Страховая программа			M_i	g_i	Инвест. доход	СНВ	Итого
ИСЖ	A7	Блокчейн	143	705	119	0	967
	A8	Индекс МосБиржи	657	192	187	0	1 036

При выборе программы страхования клиент оценивает основные риски, ожидаемую доходность и принимает решение на основе рассчитанной математической модели.

Библиографический список

1. Gao C., Li Q., Guo Z. Automobile Insurance Pricing with Bayesian General Linear Model // Innovative Computing and Information. Коммуникации в области компьютерных и информационных наук / под ред. M. Dai. Berlin, Heidelberg: Springer. – 2011. – С. 359–365.
2. Gallagher Re Global InsurTech Report for Q1 2022 | Gallagher Re [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ajg.com/gallagher/news-and-insights/2022/april/insurtech-report-for-q1-2022/> (дата обращения: 23.05.2022).
3. Баранова А. Актуарные расчеты в страховании жизни. Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. – Litres, 2022. – 195 с.
4. Deelstra G. etc. Valuation of Hybrid Financial and Actuarial Products in Life Insurance by a Novel Three-Step Method // Astin Bull. J. IAA. – 2020. – V. 50. – № 3. – С. 709–742.
5. Xie S., Lawniczka A. T. Estimating Major Risk Factor Relativities in Rate Filings Using Generalized Linear Models // Int. J. Financ. Stud. – 2018. – V. 6. – № 4. – С. 84.
6. Филипенков Н., Яненко Е., Наместников Н. Актуарные расчеты страховых тарифов: SAS Ratemaking // Актуарий. – 2014. – Т. 1. – № 1 (5).

7. Boodhun N., Jayabalan M. Risk Prediction in Life Insurance Industry Using Supervised Learning Algorithms // Complex Intell. Syst. – 2018. – V. 4. – № 2. – С. 145–154.
8. Технологии блокчейн в страховании - Студенческий научный форум [Электронный ресурс]. URL: <https://scienceforum.ru/2020/article/2018019915> (дата обращения: 19.05.2022).
9. Sergeenkov A. What Is Bitcoin? [Электронный ресурс]. URL: <https://www.coindesk.com/learn/what-is-bitcoin/> (дата обращения: 29.05.2022).
10. Фомин Г.П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 462 с.
11. НК РФ Статья 219. Социальные налоговые вычеты \ Консультант Плюс [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_28165/946cbfc58c05e1392615a251973beb32dc79f94e/ (дата обращения: 19.05.2022).

Проект «Разработка цифрового сервиса прогноза погоды на локальном участке»

Кузнецова К.А., Найманова Е.С., Погосян В.Б., Понькина Е.В.

АлтГУ, г. Барнаул

В работе приводятся результаты разработки цифрового сервиса, позволяющего собирать и обобщать прогнозные данные по погоде с использованием ресурсов ГИСМЕТЕО и Яндекс.Погода для заданной территории. Программа позволяет интерполировать прогнозные значения в целевом пункте с учетом особенностей рельефа местности. Тестирование точности прогноза погоды выполнено на тестовом полигоне в Алтайском крае.

Ключевые слова: *прогноз погоды, парсинг данных, среднее, линейная регрессия, универсальный кригинг, Большой Алтай.*

Информация о прогнозе погоды выступает основной для принятия решений в некоторых областях деятельности. Так, в сельском хозяйстве, для планирования работ по защите растений от вредителей или болезней, уничтожения сорной растительности важно обладать достаточно точным прогнозом погоды относительно ожидаемых осадков на сутки вперед. Выпадение осадков после применения химикатов может полностью нивелировать их эффект, что влечет значительные экономические потери для предприятия. Также информация о прогнозе погоды является важной в туристической индустрии. Сервисы прогноза погоды являются инструментом для принятия решений, позволяющим качественно планировать проведение полевых операций, которые напрямую зависят от погодных условий.

Существует множество сервисов, размещающих информацию о прогнозе погоды (Meteoinfo.ru, Яндекс.Погода, Intellicast, Gismeteo.ru и др.). Каждый из сервисов имеет свои преимущества и недостатки. Так, сервис Яндекс.Погода для расчета прогнозов использует технологию Meteum, в которой прогностическое моделирование сочетается с машинным обучением. Информация о прогнозе погоды по данным различных ресурсов значительно различается. Также отличаются интервалы прогноза и перечень параметров. Кроме того, не все

сервисы реализуют возможность представления результатов прогноза на карте. Таким образом, разработка цифрового сервиса, основанного на принципах интегратора данных из различных источников, обобщения и уточнения прогноза погоды на отдельном локальном участке является актуальной задачей.

Целью работы является создание web-сервиса для прогнозирования погоды на выбранном пользователем локальном участке с использованием информации открытых метеорологических ресурсов Яндекс.Погода и ГИСМЕТЕО.

В качестве методов работы с данными рассматриваются парсинг данных с информационных порталов, захват координат на карте для выбора пользователем целевой точки (x, y) в геодезической системе WGS84, методы пространственного интерполирования без учета особенностей рельефа местности (ordinary kriging) и с учетом (universal kriging). Извлечение данных о рельефе территории – координаты z – осуществляется с использованием открытых данных формата srtm, точность 30 метров. Srtm-рельеф – это космический снимок земной поверхности, созданный при помощи радиолокационного оборудования. Снимок представляет собой обычное растровое изображение, каждый пиксель которого содержит данные о высоте участка, покрываемого этим пикселем.

Общий алгоритм взаимодействия пользователя и обработки данных включает следующие шаги:

Шаг 1. Загрузка исходной интерактивной карты, содержащей векторный точечный слой населенных пунктов, слои векторной карты OpenStreetMap, или подложку, содержащую мозаику обзорных спутниковых данных GoogleMap (рис. а)).

Шаг 2. Пользователь выбирает на карте точку, в которой его интересует прогноз, целевую дату и время (рис. б)).

Шаг 3. По координатам целевой точки (x, y) отбираются населенные пункты, лежащие в окрестности указанной точки, для которых последовательно осуществляется парсинг данных.

Шаг 4. Результаты парсинга обобщаются и выводятся в итоговом окне пользователю.

Шаг 5. Загрузка srtm-рельефа территории и оценка высот для населенных пунктов и целевого пункта.

Шаг 6. Интерполирование результатов прогноза на заданный период времени с использованием процедур простого кригинга и/или универсального кригинга (в зависимости от выбора пользователя).

Шаг 7. Вывод пользователю результатов уточненного прогноза.

Для выполнения поставленных задач был использован язык программирования Python 3.8 совместно с web-фреймворком Plotly Dash, библиотеками Pandas, BeautifulSoup и Request. Для работы с srtm-рельефом использованы библиотека Elevation. Интерполирование в заданной пространственно-определенной точке выполняется с применением функций пакетов PyKrig.



а) б)

Рис. Элементы интерфейса пользователя
а) интерактивная карта б) инструмент выбора целевой точки

Сервис позволяет запрашивать и обобщать данные по температуре воздуха, влажности воздуха и вероятности осадков. В качестве базовой территории рассматривается Алтайский край. В дальнейшем возможно масштабирование работы сервиса на близлежащие территории, в частности территорию Восточно-Казахстанской области, Республику Алтай.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта АлтГУ Приоритет 2030, стратегический проект АгроБиоТех, научный грант «Мониторинг и оценка элементов углеродного и водного балансов как факторов устойчивости агроценозов».

Эконометрический анализ эффективности рекламной кампании

А.А. Куксина¹, Е.В. Понькина¹, Д.В. Курочкин²

¹ АлтГУ, г. Барнаул; ² ИП Курочкин, г. Барнаул

В работе представлены результаты применения методов регрессионного анализа к оценке экономической эффективности рекламы различного вида на примере предприятия общественного питания. В работе использованы данные по суточным продажам и затратам за период 2019-2022 гг. Результаты подтвердили наличие положительного эффекта рекламы, значимо, влияющую на выручку предприятия.

Ключевые слова: *экономическая эффективность рекламы, методы оценки эффективности, линейная регрессия, модель, общественное питание.*

Ни один бизнес не обходится без рекламы. Грамотная рекламная кампания позволяет значительно повысить финансовые показатели деятельности предприятия и привести к увеличению продаж и экономических результатов, а также повысить конкурентоспособность бизнеса в целом [1-2]. Мероприятия по рекламе требуют привлечения дополнительных затрат. Порой суммы затрат достигают значительной доли в общих затратах предприятия. На практике применяются различные виды рекламных продуктов – реклама на телевидении, по радио, в социальных сетях (Вконтакте и Инстаграм), контекстная реклама в Яндекс, наружная реклама и пр. Реализация рекламных мероприятий может осуществляться непоследовательно во времени, а эффект от мероприятия может иметь отсроченный характер. Как правило, в действующем бизнесе, в частности, для сети точек общественного питания, учитывающих доставку продукта, реклама носит постоянный характер, а некоторые ее виды оплачиваются с постоянной периодичностью. В связи с этим, одной из важных задач менеджмента является количественная оценка экономического эффекта рекламных акций и рекламы, реализуемых предприятием. Важно также оценить какие виды рекламы наиболее эффективны.

Объектом исследования выступило предприятие общественного питания, реализующее продукцию через ряд торговых точек, рассредоточенных по городу. Также предприятие оказывает услуги по доставке заказов до определенного адреса. Предприятие регулярно осуществляет вложения в рекламные мероприятия. В качестве периода исследования рассматривается февраль 2020 - апрель 2022 гг., характеризующийся выраженными ограничениями в период пандемии коронавируса. В работе использованы суточные данные по продажам продукции и затратам на производство и рекламу по видам. Общее число наблюдений составило – 790 дней, при этом за этот период было осуществлено 16 платежей за рекламу в социальных сетях, 29 платежей за рекламные сервисы Яндекс, и 13 – за рекламу на радио и прочие виды. В целом за период, среднемесячные затраты на рекламу составляют 7,3% в структуре общих расходов, из них доля затрат на рекламу в социальных сетях - 0,6%, затраты на рекламу в Яндекс – 3,6%, реклама на радио – 2,1% и другие виды рекламы – 0,9%. Количественные оценки эффектов экономической отдачи от рекламы в период пандемии в литературе представлены слабо. В связи с этим, результаты анализа представляют интерес не только для практики, но и для теории, выявляя эффект рекламы в условиях пандемийных ограничений.

Методологически эффект рекламы оценивается количественно величиной прироста выручки от продаж на предприятии в периоды, следующие после момента оплаты стоимости рекламных услуг и непосредственно запуска рекламной кампании. Если известны данные о количестве продаж по видам продуктов, то возможна оценка эффектов как по предприятию в целом, так и по видам или группам продуктов.

Располагаемые данные содержат информацию о выручке за торговый день, затратам по статьям и затратам на рекламу. В связи с этим эффект вложений в рекламу оценивается величиной прироста выручки в сутки на единицу вложенных затрат на рекламу и с учетом длительности реализации рекламы. Если прирост выручки на единицу вложенных средств положительный, то можно судить о положительной экономической отдаче.

Для оценки эффективности рекламы рассмотрим модель вида:

$$\begin{aligned} Revenue(t) = & a Cost(t) + r_1 Adv.Soc_Net(t) + r_2 Adv.Yandex(t) + \\ & + r_3 Adv.Radio(t) + r_4 Adv.Others(t) + s_1 Adv.Others_L(t) + \\ & + s_2 Adv.Soc_Net_L(t) + s_3 Adv.Radio_L(t) + \\ & + s_4 Adv.Yandex_L(t) + d Day_week(t) + Const, \end{aligned}$$

где $Revenue(t)$ – зависимая переменная, характеризующая величину выручки в торговой точке в сутки, руб.; $Cost(t)$ – затраты на

производство продукции в сутки, включая заработную плату, расход сырья (без учета затрат на рекламу), руб.; $Adv.Soc_Net(t)$ – затраты на рекламу в социальных сетях в момент t , руб.; $Adv.Yandex(t)$ – затраты на контекстную рекламу в Яндекс, руб.; $Adv.Radio(t)$ – затраты на рекламу по радио, руб.; $Adv.Others(t)$ – затраты на прочие виды рекламы, руб.; $Adv.Others_L(t)$ – длительность рекламных кампаний, относимых к категории прочих, дней от моменты оплаты; $Adv.Soc_Net_L(t)$ – длительность рекламы в социальных сетях, дней от моменты оплаты; $Adv.Radio_L(t)$ – длительность рекламных кампаний по радио, дней; $Adv.Yandex_L(t)$ – длительность рекламных кампаний в Яндекс, дней; $Day_week(t)$ – день недели; $a, r_1, \dots, r_4, s_1, \dots, s_4, d$ – параметры регрессии, $const$ – постоянная.

В результате для оценки влияния различных видов рекламы на выручку предприятия была идентифицирована модель линейной регрессии на языке статистического анализа и моделирования R в среде Google Colaboratory. Итоговые результаты оценки значимости затрат на разные виды рекламы и других затрат в формировании выручки в таблице.

Таблица

Результаты идентификации параметров модели

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка	t-статистика	p-значение
$Cost^{***}$	1,25	0,078	15,904	<0,001
$Adv.Soc_Net$	1,03	0,069	1,486	0,137
$Adv.Yandex^{***}$	1,36	0,022	6,048	<0,001
$Adv.Radio^{***}$	1,50	0,250	5,977	<0,001
$Adv.Others^*$	1,07	0,440	2,431	0,015
$Adv.Others_L$	0,03	0,023	1,396	0,195
$Adv.Soc_Net_L$	-0,62	0,012	-0,504	0,614
$Adv.Radio_L^{**}$	0,02	0,820	3,020	0,002
$Adv.Yandex_L^{***}$	0,001	0,034	4,301	<0,001
$Day_week=2$	0,06	0,0023	0,244	0,807
$Day_week=3$	0,08	0,0023	0,341	0,733
$Day_week=4^*$	-0,06	0,0023	-2,493	0,013
$Day_week=5^{***}$	0,01	0,0023	3,853	<0,001
$Day_week=6^{***}$	0,0001	0,0023	6,243	<0,001
$Day_week=7^*$	0,003	0,0023	1,668	0,095
$Const^{***}$	2,71E+4	1,95E+3	13,91	<0,001
R^2	0,39			
N	768			
F-критерий	34,49			
p-значение	<0,001			

Примечание: *, **, *** - статистическая значимость фактора при доверительной вероятности р-значение <0,1, 0,01 и 0,001, соответственно.

Модель в целом характеризуется высокой значимостью, гипотеза об одновременном равенстве коэффициентов модели нулю отклоняется. Ряд переменных в модели характеризуются высокой статистической значимостью согласно t-критерию Стюдента. По результатам можно сделать выводы об эффективности различных видов рекламы. В частности, наибольшая отдача на 1 рубль вложенных затрат наблюдается по вложениям в рекламу Яндекс и радио. Длительность рекламных мероприятий также значимый прирост наблюдается по данным информационным каналам. Реклама в социальных сетях и прочие виды рекламы оказались малоэффективными. Кроме того, результаты подтверждают наличие эффекта дня недели, характеризуемый приростом выручки в пятницу и выходные дни.

Библиографический список

1. Кротова Н.Н. Проблемы и пути решения повышения эффективности реализации рекламной функции предприятия // Экономинфо. – 2015. – №23. – С. 17-19.
2. Носкова Е.В. Совершенствование методов оценки рекламной деятельности предприятия // Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление. – 2006. – № 2. – С. 82-83.
3. Егорова О.В. Анализ методов оценки эффективности рекламной кампании // Материалы IV Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум». – 2012. – С. 4-11.
4. Новосельский С.О., Мозговая Ю.С. Методы оценки эффективности рекламных кампаний организаций // Политика, экономика и инновации. – 2015. – С. 1-4.
5. Керимова Ч.В. Методы оценки экономической эффективности рекламы // Инновационное развитие экономики. – 2013. – №1(13). – С.61-65.
6. Карабанова И.С. Построение математической модели оценки экономической эффективности рекламной кампании // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – 2011. – №20. – С.167-170.

Разработка мобильного приложения для учета показаний счетчиков электроэнергии

А.А. Романов¹, Ю.Г. Алгазина¹

*¹Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Работа посвящена описанию и анализу бизнес-процессов энергокомпании, а также проектированию с целью последующего внедрения автоматизированной информационной системы для учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго».

Ключевые слова: *автоматизация, информационная система, электроэнергия, мобильное приложение, учет показаний счетчиков.*

Автоматизация учета показаний счетчиков электроэнергии становится все более актуальной для энергокомпаний. Внедрение информационных систем и технологий в деятельность энергокомпаний предотвращает внесение ошибочной информации, повышает эффективность работы.

Объектом автоматизации выбрано АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго». Основным видом деятельности АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго» является транспортировка и распределение электрической энергии потребителям Алтайского края.

Цель работы – разработка мобильного приложения для учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго».

Задачами создания АИС являются: автоматизированное снятие показаний счетчиков электроэнергии, автоматизированная обработка данных, оптимизация рабочего времени и увеличение продуктивности работы контролеров и специалистов по обработке данных.

На рисунках 1-2 представлена диаграмма деятельности энергокомпании, которая отображает бизнес-процессы, протекающие в области учета показаний счетчиков электроэнергии.



Рисунок 1 – Контекстная диаграмма технологического процесса учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго» «как есть»



Рисунок 2 – Декомпозиция контекстной диаграммы технологического процесса учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго» «как есть»

Анализ действующих бизнес-процессов организации показал, что на текущий момент существует ряд проблем, которые негативно влияют на продуктивность работы организации:

- Снятие показаний. Ручное внесение данных контролером в обходной лист занимает большое количество времени. Также контролеру необходимо носить с собой обходные листы, что связано с неудобствами.

- Обработка данных. Распознавание рукописного текста может привести к ошибке, и технику приходится тратить большое количество времени на проверку данных и ручное заполнение в случае некорректного распознавания.

Недостатки существующей модели были устранены посредством разработки мобильного приложения для учета показаний счетчиков электроэнергии [1; 2].

Для достижения поставленной цели выполнены следующие задачи:

- изучен объект автоматизации, описаны его бизнес-процессы;
- проанализированы собранные данные, на их основе сформулированы требования к создаваемой АИС;
- разработано мобильное приложение для учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго»;
- рассчитана и доказана эффективность системы.

Результатом проведенной работы является разработанная автоматизированная информационная система процесса учета показаний счетчиков электроэнергии АО «Сетевая компания Алтайкрайэнерго», которая показала свою эффективность и может быть использована энергокомпаниями для целей оптимизация деятельности.

Библиографический список

1. Кремлев А. С., Титов А. В., Щукин А. Н. Проектирование систем интеллектуального управления домашней автоматикой. Элементы теории и практикум. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2014. – 96 с.

2. Лоскутов А.Б., Гардин А.И., Лоскутов А.А. Автоматизированная система контроля и учета электроэнергии. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 2018. – 84 с.

Сравнительный анализ методов восстановления пропусков в пространственно-распределенных данных метеорологического мониторинга

К.С. Рупасов, Е.В. Понькина
АлтГУ, г. Барнаул

В работе проведен сравнительный анализ методов восстановления пропусков в рядах метеорологических данных. Используются данные по среднемесячным и среднегодовым величинам температуры воздуха и месячным и годовым суммам осадков за период 1950-2021 гг. на территорию стран макрорегиона Большой Алтай. В сравнительном анализе тестировались три метода: среднее значение, линейная регрессия и универсальный кригинг. Результаты показали наибольшую точность интерполяции методом универсального кригинга, а также возрастание ошибки восстановления данных для высокогорных пунктов метеорологического мониторинга.

Ключевые слова: *метеорологический мониторинг, пропуски в данных, среднее, линейная регрессия, универсальный кригинг, Большой Алтай.*

Существует множество методов для восстановления пропусков в данных, эффективность которых зависит от специфики данных, наличия возможных связей между измерениями, наличия пространственной корреляции и т.д. Метеорологические данные, используемые в анализе климатических изменений, должны охватывать значительный период времени (не менее 50 лет) и собираются в рамках международной системы метеорологического мониторинга. Наблюдения осуществляются в пунктах, где установлена метеорологическая станция. Каждой станции присваивается уникальный идентификатор (ICAO индекс) согласно системе, известно пространственное положение станции (широта, долгота и высота в системе геодезических координат WGS84). В связи с этим данные по пунктам метеорологических наблюдений являются пространственно-распределенными.

Портал «Погода и климат» (<http://www.pogodaiklimat.ru/>) содержит результаты климатического мониторинга по метеорологическим станциям всего мира. В разделе «Летопись погоды» содержатся данные по средним месячным и среднегодовым температурам воздуха,

месячным и годовым суммам осадков, которые могут быть использованы для решения прикладных задач. Однако, в виду различных причин данные содержат значительные по длительности пропуски, что затрудняет их использование. Восстановление таких пропусков традиционными методами моделирования временных рядов невозможно. Кроме того, среднегодовые температуры воздуха, как и суммы осадков плохо описываются временными закономерностями. Известно, что климатические параметры характеризуются пространственной корреляцией, имеют определенные закономерности изменения в пространстве [1-3]. Учет этих особенностей позволит решить задачу восстановления пробелов в пространственно-распределенных данных.

Целью работы явилось тестирование различных методов восстановления пропусков в рядах среднемесячных и среднегодовых температур воздуха, а также месячных и годовых сумм осадков по набору метеорологических пунктов, расположенных в заданном радиусе.

В качестве методов восстановления пропусков рассмотрены:

1) восстановление отсутствующих значений средней величиной, вычисленной по набору данных в ближайших, соседних пунктах;

2) оценка по модели линейной регрессии, где в качестве независимых переменных рассматриваются географические координаты (x , y , z), позволяющие учесть вариабельность интерполируемого признака в зависимости от высоты территории и расположения в пространстве, при этом в качестве обучающей выборки рассматривается массив данных метеостанций, расположенных в заданном радиусе от целевой точки;

3) универсальный кригинг – метод геостатистического анализа и моделирования, широко применяемый в географии и метеорологии [1, 2] для интерполирования данных поверхности с учетом набора дополнительных факторов (в качестве такого фактора рассматривается z координата). Метод кригинга предполагает, что расстояние или направление между опорными точками (где содержится известное значение) отражает пространственную корреляцию, которая может использоваться для объяснения изменения на поверхности.

В качестве исходного набора использованы данные, полученные с портала «Погода и климат» за период 1950-2021 гг. на территорию макрорегиона «Большой Алтай», охватывающего Казахстан, Кыргызстан, Узбекистан, частично регионы Монголии и Китая, и ряд трансграничных регионов России (Алтайский край, Республика Алтай, Республика Тыва). Общее количество метеостанций насчитывается более 800 ед. Набор данных содержит данные по среднемесячным и среднегодовым температурам, месячным и годовым суммам осадков.

В исходном массиве данных были сгенерированы случайным образом пропуски с целью тестирования методов по точности восстановления пропущенных значений. На каждый месяц расчета было сгенерировано 500 искусственных пропусков в данных для рядов температур воздуха и влажности отдельно. Для каждой метеостанции, имеющей пропуск в данных, выполнен пространственный запрос и получен массив метеостанций, расположенных в заданном радиусе для формирования обучающих выборок. Радиус охвата территории для тестирования эффективности работы методов варьировался от 250 до 500 км с шагом 50 км. Каждый пробел в данных подлежал обработке отдельно.

В результате были получены оценки точности работы методов с использованием метрики MAE – средняя абсолютная ошибка (табл.). Результаты показали, что метод универсального кригинга позволяет с высокой точностью интерполировать распределение температур и сумм осадков по территории. Метод среднего уступает при интерполировании значений температуры воздуха, но является более эффективным при интерполировании сумм осадков. Также вычислительный эксперимент показал, что погрешности интерполирования отсутствующих значений с ростом радиуса охвата территории по методу среднего и линейной регрессии возрастают. Универсальный кригинг не демонстрирует подобной чувствительности. Вычисления выполнены в среде Google Colaboratory на языке Python.

Таблица

Оценка точности интерполирования среднемесячных значений метеорологических параметров, MAE, радиус охвата 250 км

Высота территории (z)	Температура воздуха, °C			Сумма осадков, мм		
	Среднее	Линейная регрессия	Универсальный кригинг	Среднее	Линейная регрессия	Универсальный кригинг
0-100	0.67	0.42	6.1E-15	4.35	15.1	2.1E-06
100-300	0.82	0.34	4.03E-03	4.25	23.2	2.7E-02
300-500	1.03	0.34	6.40E-06	4.84	35.0	2.6E-06
500-700	1.33	0.57	7.39E-15	7.85	23.2	1.5E-14
700-900	3.11	0.51	3.04E-15	4.13	2.9	7.9E-15
>900	4.12	0.81	1.02E-14	1.32	1.8	2.6E-15

Результаты работы представляют основу для разработки инструментария восстановления пропусков в массивах метеорологических данных среднемесячных и среднегодовых температур воздуха, месячных сумм и годовых сумм осадков. Восстановление пробелов в данных является предварительным этапом анализа климатических изменений на исследуемой территории, и,

соответственно, дополняют программный инструментарий в данной области.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта АлтГУ Приоритет 2030, стратегический проект АгроБиоТех, научный грант «Мониторинг и оценка элементов углеродного и водного балансов как факторов устойчивости агроценозов».

Библиографический список

1. Курлович, Д.М. Геоинформационные методы анализа и прогнозирования погоды : учеб.-метод. пособие / Д.М. Курлович. – Минск : БГУ, 2013. – 191 с.
2. Никифоров М.А. Расчет отклонения смоделированных значений температуры воздуха в ГИС QGIS от фактических // Вестник СВФУ. Серия «Науке о земле», 2018. – № 4 (12). – С. 20-28.
3. Шихов А.Н. Геоинформационные системы: применение ГИС-технологий при решении гидрологических задач / А.Н. Шихов, Е.С. Черепанова, А.И. Пономарчук. – Пермь, 2014. – 91 с.

Разработка инструментов анализа и визуализации структурных связей в динамических социально-экономических системах

И.Ю. Рябов

Алтайский государственный университет, РФ, Барнаул

Современное развитие социально-экономических систем опирается на грамотное планирование процессов, проходящих внутри системы. Структурное моделирование является одним из развивающихся методов, применяющихся в данной области. Однако, проблематика заключается в недостаточной изученности применения данных методов в планировании социально-экономических систем. В статье рассматриваются подходы и методы структурного моделирования социально-экономических систем и описываются результаты разработки программного инструментария для проведения прикладного исследования.

Ключевые слова: социально-экономическая система, структурное эконометрическое моделирование, причинность по Грейнджеру, сценарное моделирование

Грамотное планирование в социально-экономических системах является одним из ведущих стадий в эффективном производстве, распределении, потреблении материальных и нематериальных ресурсов [1; 2]. В последние десятилетия активно развиваются подходы и методы для определения структурных связей в подобных системах [3; 4; 5]. Однако, несмотря на множество работ в данной области структурное моделирование социально-экономических систем остается малоизученным, помимо этого на современном рынке программные решения в данной области функционально ограничены. Отсутствуют решения, позволяющие исследовать причинные связи в динамике.

Целью данной работы является анализ подходов и методов структурного моделирования и последующая разработка программного продукта на языке Python.

Понимание структурных взаимосвязей в системе позволит оценить взаимосвязи и влияние элементов в социально-экономической системе,

что в свою очередь позволит повысить эффективность управления самой системой.

Социально-экономическую систему в общем виде можно представить, как систему, характеризующуюся набором индикаторов, условно сгруппированных на N блоков. В каждом блоке содержится множество измеряемых индикаторов и показателей, характеризующих различные стороны функционирования социально-экономических систем. Тем самым, задача сводится к нахождению связей как между отдельными индикаторами системы, так и между структурными блоками в целом. Такая система связей представляет структуру социально-экономической системы. Устойчивая по времени структура выступает системообразующим каркасом функционирования и развития системы.

Для решения поставленной задачи – задачи выявления связей между отдельными индикаторами системы используются показатели корреляционных взаимосвязей и оценки наличия причинной связи по Грейнджеру. Найденные взаимосвязи представляются в виде неориентированного и ориентированного графов, выводимых пользователю в графическом виде.

На первом этапе обработки данных осуществляется «чистка» массива исходных данных и анализ полноты. Далее для скорректированного массива данных оцениваются общие зависимости между индикаторами системы используя методы корреляционного анализа. Корреляционный анализ позволил построить общую модель зависимостей в системе, однако, одним из существенных недостатков данного метода является то, что данный метод лишь показывает наличие связи между двумя индикаторами, не учитывая при этом причинно-следственных связей [6]. Множество корреляционных связей обобщается на уровень структурных боков и пользователю выводится графическое представление неориентированного графа. Также результаты расчета и обобщения корреляционных коэффициентов выводятся в выходной файл. На втором этапе для уточнения полученных связей и понимания функционирования системы используется тест причинности по Грейнджеру [7, 8, 9]. Построение структурной модели на основе принципа причинности позволило не только понять концепции взаимосвязей индикаторов системы, но и проследить влияние элементов социально-экономической системы друг на друга в динамике. Ориентированный граф структуры, основанный на результатах уточнения корреляционных связей выводится в отдельном окне пользователю, а

все обнаруженные связи с учетом лага запаздывания выводятся в выходной файл.

Однако, полученная модель требует уточнения, так как полученные связи не всегда являются «истинными» и требуют уточнения посредством привлечения экспертов. Для этого реализована возможность в программе, позволяющая загружать скорректированный датафрейм, содержащий связи между индикаторами и построить скорректированную и согласованную экспертами структуру.

Полученный граф связей выступает основой разработки структурной эконометрической модели динамики социально-экономической системы, либо основой разработки динамической байесовской сети.

Библиографический список:

1. Daniel J. Cantor, Juliet B. Schor, Tunnel Vision: "By economic system or economic order, we mean the principles, laws, institutions, and understandings business is conducted", Labor, the World Economy, and Central America, South End Press, 1987, p. 21
2. Пугачева Е.Г., Соловенко К.Н., Самоорганизация социальноэкономических систем. – Иркутск, 2013. – 384 с
3. Freedman D. A.. Statistical Models: Theory and Practice. Cambridge University Press. 2009, ISBN 978-1-139-47731-4.
4. Pearl J. Causality: Models, Reasoning, and Inference. Cambridge University Press, 2000, ISBN 978-0-521-77362-1. OCLC 42291253
5. Koller, D.; Friedman, N. Probabilistic Graphical Models. Massachusetts: MIT Press. 2009, p. 1208
6. Елисеева И. И., Юзбашев М. М. Общая теория статистики: Учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. — 4-е издание, переработанное и дополненное. — Москва: Финансы и Статистика, 2002. — 480 с.
7. Bunge M. Causality and Modern Science. Nature. Vol. 187 (3, revised ed.) (2012). pp. 123–124.
8. Granger, C. W. J. "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods". *Econometrica*, 1969, 37 (3): 424–438
9. Granger, C. W. J.; Newbold, Paul . Forecasting Economic Time Series. New York: Academic Press, 1977, p. 225

УДК 004.9

Разработка интернет-магазина продовольственных товаров

А.А. Самсонкин¹, Ю.Г. Алгазина¹

*¹Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Работа посвящена описанию и анализу бизнес-процессов разработки интернет-магазина продовольственных товаров, а также проектированию с целью последующего внедрения автоматизированной информационной системы управления онлайн-продажами.

Ключевые слова: *автоматизация, информационная система, интернет-магазин, управление продажами, продовольственные товары, противопожарная служба.*

Необходимость автоматизации процессов реализации товаров становится все более актуальной не только для крупных (в том числе сетевых) продовольственных магазинов, но и для небольших. Создание интернет-магазина позволяет глобализировать продажи и увеличить доход от реализации.

Объектом автоматизации выбран магазин продовольственных товаров «12:20». Данное учреждение специализируется на розничной торговле продовольственными товарами.

Цель работы – разработка интернет-магазина продовольственных товаров «12:20».

Задачами создания АИС являются: упорядочение данных для более удобного хранения, обработки, анализа и поиска нужной информации; снижение объемов «бумажной» работы; увеличение количества покупателей и объемов продаж [1].

На рисунке 1 представлена диаграмма деятельности магазина «12:20», которая отображает бизнес-процессы, протекающие в области продажи товаров.



Рисунок 1 – Контекстная диаграмма реализации товаров магазином «12:20» «как есть»

В данной модели товары реализуются в розницу при явке покупателя непосредственно в магазин, что усиливает факторы сезонности продажи товаров, разрыва в сервисах доставки, ограниченности контингента покупателей, негативно сказывающиеся на показателях финансово-хозяйственной деятельности магазина.

Недостатки существующей модели были устранены (рис. 2) [2].

Для достижения поставленной цели выполнены следующие задачи:

- изучен объект автоматизации, описаны его бизнес-процессы;
- проанализированы собранные данные, на их основе сформулированы требования к создаваемой АИС;
- разработана информационная система (интернет-магазин), устраняющая существующие недостатки и автоматизирующая товароборот магазина продовольственных товаров «12:20»;
- рассчитана и доказана эффективность системы.

Результатом проведенной работы является разработанная автоматизированная информационная система (интернет-магазин) процесса реализации продовольственных товаров, которая внедрена в деятельность магазина «12:20», показала свою эффективность и может быть использована продовольственными магазинами для целей оптимизация деятельности.

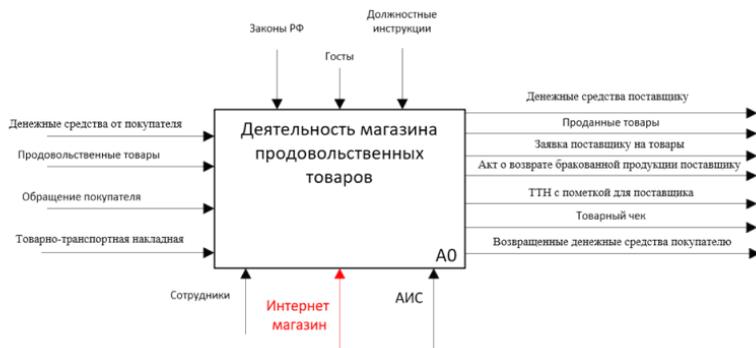


Рисунок 2 – Контекстная диаграмма реализации товаров магазином «12:20» «как должно быть»

Библиографический список

1. Бирюков П. И. Интернет-шопинг. – М.: Феникс, 2017. – 160 с.
2. Исаев Г. Н. Проектирование информационных систем: учеб. пособие. – М.: Омега-Л, 2017. – 424 с.

Обнаружение сорной растительности на основе сверточных нейронных сетей¹

А.С. Тлебалдинова, М.А. Карменова,

Е.В. Понькина, А.А. Бондарович

Восточно-Казахстанский университет им. С.

Аманжолова, г. Усть-Каменогорск

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье обсуждается проблема семантической сегментации полевых изображений сельскохозяйственной культуры и сорной растительности с использованием архитектур сверточных нейронных сетей. В работе рассматривались две архитектуры: классическая U-Net и U-Net с предварительно обученным кодером Resnet 50. Точность сегментации оценивалась при помощи метрики среднего mIoU, метрики IoU, а также матрицы ошибок классификации. U-Net Resnet 50 показала наилучшую производительность и самую высокую точность (IoU=0,9506; mIoU=0,8723). Результаты могут быть использованы для обучения роботизированных устройств, используемых для точной обработки (опрыскивания) культурных растений в сельском хозяйстве.

Ключевые слова: *изображение; сегментация; культура; сорная растительность; классификация; сверточная нейронная сеть.*

Распространение сорной растительности в посевах сельскохозяйственных культур является одной из причин, снижающих не только урожайность, но и негативно влияющей на экономические результаты деятельности сельскохозяйственных предприятий и качество получаемого урожая. Гербициды играют важную роль в общей системе борьбы с сорной растительностью. Частое и избыточное применение средств защиты растений загрязняет окружающую среду, оказывает негативное воздействие на местную фауну. Именно поэтому уничтожение сорняков посредством применения гербицидов строго регламентировано правилами применения и техникой безопасности и контролируется

¹ Данное исследование выполнено за счет гранта Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан АР 09259379.

государственными органами (например, в России – Россельхознадзор, в Казахстане – Министерство сельского хозяйства). Кроме того, внесение постоянной и непрерывной дозы гербицидов не обеспечивает оптимальной борьбы с сорной растительностью и не является необходимой, так как разрастание сорняков как правило носит очаговый характер. В связи с этим активно разрабатываются и внедряются в рамках технологий точного земледелия современные технологии точного опрыскивания гербицидами. Внедрение таких технологий требует разработки различных агротехнологических решений, в том числе систем классификации растений на основе методов компьютерного зрения и машинного обучения.

Целью работы является исследование производительности и точности классификации сельскохозяйственных культур и сорняков, основанных на семантической сегментации изображений на основе сверточных нейронных сетей, путем увеличения объема данных на основе стратегии увеличения участка (патча).

В работе используется набор данных изображений участков поля, содержащих посевы сельскохозяйственной культуры и сорной растительности, полученные с помощью автономного полевого робота в условиях контролируемого освещения [1]. Всего использовано 60 изображений. Для каждого изображения набора данных предоставлены маски сегментации растительности и аннотации типов растений (культура или сорняк). Входной размер изображений - 224×224 пикселей.

Задача семантической сегментации состоит в том, чтобы найти области (сегменты) на изображении и классифицировать их по заданному набору классов. Семантическая сегментация также известна как классификация на уровне пикселей. Среди множества методов семантической сегментации в данной работе используются архитектуры U-Net и U-Net-ResNet50 [2].

В работе тестируется сеть U-Net с предварительно обученным кодером Resnet 50. Сеть ResNet 50, обученная на базе набора данных ImageNet [3] является одной из наиболее часто используемой архитектурой трансферного обучения. В данной архитектуре входное изображение подается в предварительно обученный кодер, который состоит из серии остаточных блоков (ResNet). Остаточные блоки извлекают наиболее информативные признаки входного изображения, и затем они передаются в декодер. В пути декодера каждый шаг состоит из восходящей выборки карты объектов, за которой следует свертка транспонирования. Эта свертка увеличивает масштаб входящих карт объектов до желаемой формы.

В эксперименте были рассчитаны разные метрики для количественного анализа между рассматриваемыми сетевыми моделями по набору данных. Такими показателями являются метрика степени пересечения между двумя ограничивающими рамками (IoU) отдельно для каждого класса: IoU для почвы, IoU для культуры, IoU для сорняков, а также среднее значение пересечения mIoU для всех классов вместе.

В целом, Intersection over Union (IoU) является наиболее популярной оценочной метрикой, используемой в задачах сегментации изображений. Данная метрика используется для сравнения сходства между двумя произвольными формами, которая кодирует свойства форм сравниваемых объектов.

Экспериментальная часть работы отражает результаты обучения двух архитектур по픽сельной сегментации изображения на основе глубокой сверточной нейронной сети и оценивает их производительность на основе соответствующих метрик.

Эксперимент состоит из двух этапов. Первый этап включает сравнительный анализ применения архитектур Unet и U-Net Resnet 50 на исходном наборе данных без изменения; на втором этапе описываемые модели тестируются на множестве с увеличенным набором данных на основе стратегии увеличения патчей.

Реализация классификации изображений выполнялась без удаления фона, в результате чего были получены такие классы, как почва (класс 0), культура (класс 1) и сорняк (класс 2).

При обучении сети Unet в качестве метрики для измерения вероятности неправильной классификации использовалась категориальная кросс-энтропия. На следующем этапе было проведено обучение рассматриваемой сетевой модели Unet ResNet 50, а затем вся сеть была обучена с использованием оптимизатора Adam с установленной скоростью обучения 10⁻³. В качестве функции потерь использовалась функция MSE Loss. Во время запуска сети 40 изображений из набора данных использовались для обучения модели, а остальные 20 изображений – для тестирования.

Результаты показали, что с увеличением набора данных показатели для модели Resnet 50 (IoU=0,9506; mIoU=0,8723) намного выше, чем показатели для модели U-Net (IoU=0,6535; mIoU=0,6152), соответственно. При увеличении набора данных точность модели Unet ResNet-50 также оценивалась с использованием матрицы ошибок классификации для каждого класса (класс 0, класс 1 и класс 2). Точность классификации составила для класса 0 - 99,26%, для класса 1 – 98,57% и для класса 2 – 99,82%. Следовательно, увеличение набора

данных обеспечивает эффективность процесса сегментации изображений с помощью архитектуры сверточной нейронной сети Unet ResNet-50.

Благодарность. Данное исследование выполнено при поддержке гранта Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан АР 09259379 «Исследование и разработка методов поддержки принятия агротехнологических решений на основе технологий точного земледелия».

Библиографический список

1. Haug S., Ostermann J. A Crop/Weed Field Image Dataset for the Evaluation of Computer Vision Based Precision Agriculture Tasks. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015. Vol. 8928. P. 105–116.
2. He K., Zhang X., Ren Sh. and Sun J. Deep residual learning for image recognition. *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2016. P.770-778.
3. Russakovsky O., Deng J., Su H., Krause J., Satheesh S., Ma S., Huang Zh., Karpathy A., Khosla A., Bernstein M. and others. Imagenet large scale visual recognition challenge. *International journal of computer vision*. 2015. Vol. 115(3). P.211–252.

Особенности применения метода сопоставления оценок склонностей в области кредитования сельскохозяйственных предприятий

Фоменко А.П.

Алтайский государственный университет

Основная проблема при решении задач классификации, заключается в том, что построенные на несбалансированных данных модели имеют «перекос» в сторону большего класса, особенно актуальна проблема несбалансированности классов в таких областях как медицина, маркетинг, потребительское кредитование. В последние годы в качестве методологии исследования несбалансированных данных применяются методы псевдорандомизации. В статье рассматривается один из таких методов - метод сопоставления оценок склонностей (Propensity Score Matching – PSM). Прикладная задача исследования заключается в изучении эффектов программы льготного кредитования сельхозпроизводителей на развитие сельского хозяйства в Оренбургской области.

Ключевые слова: *аграрная экономика, причинный эффект, метод оценок склонностей, Propensity Score Matching, кредитование, интенсивная технология, Оренбургская область, Россия.*

Метод сопоставления оценок склонностей (Propensity Score Matching) был впервые предложен Розенбаумом и Рубином как оценка вероятности получения интересующего результата с учетом наблюдаемых исходных переменных-ковариат [1]. Ковариаты – это факторы, связанные с изучаемой переменной и переменной воздействия.

Ключевое предположение, лежащее в основе методе сопоставления оценок склонностей, заключается в том, что, поскольку оценка склонности оценивается с использованием наблюдаемых исходных ковариат, субъекты, чьи оценки склонности равны будут иметь аналогичные значения исходных ковариат и, следовательно, будут сопоставимы. Еще одно важное предположение, необходимое для анализа оценки склонности, состоит в том, что нет неизмеренных искажающих факторов (конфаундеры). То есть мы предполагаем, что все факторы, которые могут повлиять на интересующий результат, были соблюдены. Алгоритм PSM включает в себя следующие

основные этапы - сбор и анализ данных, отбор переменных-ковариат для включения в анализ, расчет значений Propensity Score (PS), проверка баланса распределения значений PS и средних значений ковариат между основной и контрольной группами, выбор одного из методов подбора пар или «взвешивания» и расчет мер эффекта воздействия фактора, повтор анализа с использованием других методов подбора пар или «взвешивания», выбор для расчета результирующей меры эффекта того метода, который обеспечил в данном случае наилучший баланс ковариат между основной группой и группой сравнения.

Говоря кратко, для каждого объекта контрольной группы подбирается один объект или более одного объекта экспериментальной группы, у которого или которых имеется такая же или сходная оценка по PS. Очевидно, что в таких случаях не для всех объектов удается найти пару со сходной или близкой оценкой PS, что становится причиной исключения из анализа более или менее большого числа экспериментов, ограничивая статистическую мощность анализа и отчасти увеличивая вероятность систематической ошибки, связанной с отбором. В этом и состоит основная проблема метода PSM [3]. Метод PSM, в первую очередь, должен использоваться в тех случаях, когда есть необходимость сформировать группы максимально сходные по характеристикам объектов исследования (за этот счет уменьшаются систематические ошибки).

Преимущества метода PSM относительно других методов заключаются, в первую очередь, в применении псевдорандомизации данных, что позволяет считать полученную оценку причинного эффекта приближенной к истинному эффекту. Метод PSM позволяет проводить приближенные к экспериментальным условиям исследования на больших массивах данных, а также в случаях, когда провести экспериментальное исследование с полностью рандомизированной выборкой невозможно или крайне сложно.

Данные. В качестве территории исследования причинно-следственных эффектов применения кредитования взята Оренбургская область. В работе были применены данные по сельскохозяйственным предприятиям за период 2013-2016 гг. Датасет представляет собой статистические данные, прошедшие предобработку и конвертированные в таблицу Excel.

Для оценки эффектов кредитования и сопоставления предприятий были отобраны и вычислены на основе первичных данных базовые переменные по следующим группам: общие характеристики предприятия, масштабы производства, экономические показатели,

специализация фермы, производственные затраты, характеристика района и климатические условия.

В качестве переменной оцениваемого эффекта рассматривается индикатор наличия долгосрочного кредита у сельскохозяйственного предприятия.

В качестве результирующих показателей рассматриваются: факт закрытия предприятия, индикатор изменения площадей обработки пашни, индикатор изменения поголовья скота и изменение численности рабочей силы. Также используется показатель бюджетного эффекта – как разность между уплаченными налогами и субсидиями.

По начальным данным проведена балансировка, далее используя сбалансированные данные были получены оценки влияния различных факторов на изменения результирующих переменных.

Результаты. В целом, в результате исследования выявлено, что кредитование сельскохозяйственных предприятий характеризуется противоречивыми эффектами и показывает низкую эффективность государственных программ по поддержке развития агропромышленного комплекса в период 2013-2016 гг. Полученные нами данные имеют достаточно обширный спектр применения. В перспективе, результаты работы могут использоваться для оповещения сельхозпроизводителей о недостатках и преимуществах использования кредитных продуктов для расширения производства.

Библиографический список

1. Rosenbaum P.R. The central role of the propensity score in observational studies for causal effects / P.R. Rosenbaum, D.B. Rubin // *Biometrika*. – 1983. – Т. 70. – № 1. – С. 41-55.
2. *Clinical Pharmacy Education, Practice and Research*. – Elsevier, 2019.
3. King G. Why Propensity Scores Should Not Be Used for Matching / G. King, R. Nielsen // *Political Analysis*. – 2019. – Т. 27. – № 4. – С. 435-454.
4. Гиляревский С.Р., Беленков Ю.Н. Доказательные подходы к сравнению эффективности вмешательств в современной кардиологии: тенденции, ошибки и перспективы. *Российский кардиологический журнал*. 2020;25(8):4037. doi:10.15829/1560-4071-2020-4037.
5. Jalan, J., and M. Ravallion. 2003. "Estimating the Benefit Incidence of an Antipoverty Program by Propensity-Score Matching". *Journal of Business & Economic Statistics* 21(1): 19-30.

6. Dehejia R., S. Wahba. 2002. "Propensity- score matching Methods for Nonexperimental Causal Studies". *The Review of Economic and Statistics* 84(1): 151-161.
7. Smith, J., and P. Todd. 2005. "Does matching over come Lalonde's critique of nonexperimental estimators?". *Journal of Econometrics* 125(1-2): 305-353.

СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

УДК 004.582

Разработка веб-приложения для работы с многоязычными деловыми текстами

Ю.А. Алябышева, Т.В. Михеева, Е.Д. Мордясов
Алтайский государственный университет, г. Барнаул

*Работа поддержана средствами программы развития ФГБОУ ВО
«Алтайский государственный университет» «Приоритет-2030».*

Статья посвящена созданию и разработке веб-приложения, содержащего шаблоны деловых текстов на разных языках территории Большого Алтая.

Ключевые слова: *веб-приложение, деловые тексты, многоязычные тексты.*

Название научно-образовательного проекта: «Роль русского языка как языка перевода официально-деловых текстов на территории Большого Алтая». Цель проекта – закрепление за русским языком статуса языка международного общения на территории Большого Алтая в сфере ведения официально-деловой документации.

Одной из важных задач в решении поставленной цели является разработка и формирование базы данных параллельных шаблонов документов на русском, английском, казахском, алтайском языках, а также разработка веб-приложения, о котором речь пойдет в статье. Целью части проекта, которой посвящена настоящая статья, является разработка веб-приложения для хранения официально-деловых текстов на различных языках территории Большого Алтая. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучение и разработка предметного слоя приложения.
2. Разработка базового ядра для доступа к данным приложения и взаимодействия с ними.
3. Разработка слоя бизнес-логики для осуществления основной работы приложения.

4. Разработка слоя внутреннего API для предоставления возможности взаимодействовать с визуальной частью приложения.

В ближайшей перспективе планируется концептуальная разработка базы данных, содержащая документы, анализ и создание модели БД, описание структуры таблиц базы данных и создание шаблона (конструктора) с необходимыми полями и возможностью внесения изменений и дополнений, содержащего не менее 15 шаблонов документов на русском языке и создание их английских, казахских и алтайских эквивалентов (всего не менее 60 документов на 4-х языках).

В настоящее время затруднительно обнаружить интернет-ресурс, способный хранить различные сгруппированные по определенной классификации официально-деловые тексты и их переводы на языках народов Большого Алтая. Обращаем внимание на то, что информационный ресурс должен быть посвящен именно деловой документации, способствующей осуществлению трансграничных контактов. Беспорядочно расположенные документы на разнообразных сайтах вызывают неудобство в поиске определенного образца, представленного на конкретном языке. Единый источник хранения наиболее важных и часто встречающихся официально-деловых текстов является актуальной проблемой для обслуживания правовой и административно-общественной сферы деятельности.

Поставленные задачи носят скорее прикладной, чем фундаментальный характер. Предполагается, что разрабатываемое веб-приложение будет обладать следующими особенностями: позволит создавать учетную запись и хранить документы на различных языках территории Большого Алтая в одном месте и группировать их по определенной классификации. В приложении предусмотрено разграничение прав пользователей: 1) анонимные пользователи, они могут получать ресурсы веб-приложения, не относящиеся к официально-деловым текстам; 2) зарегистрированные пользователи, которые не имеют доступа к администрированию, но имеют возможность только извлекать документы из веб-сервиса; 3) зарегистрированные пользователи, имеющие доступ к администрированию, способные добавлять или удалять язык, который можно будет назначать конкретному документу, добавлять или удалять классификацию, с помощью которой документы могут быть сгруппированы, добавлять или удалять образцы документов, а также получать ограниченную информацию о всех клиентах веб-сервиса; 4) пользователь под заблокированной учетной записью не имеет доступа

к ресурсам веб-приложения, сама же блокировка осуществляется на уровне аккаунта пользователя, поэтому ее возможно избежать с помощью создания новой учетной записи, однако идентификационный номер пользователя при повторном процессе регистрации должен отличаться от прошлого.

В процессе разработки прототипа веб-приложения использованы: объектно-ориентированный язык программирования Java, интегрированная среда разработки IntelliJ IDEA и, поскольку используется многоуровневая архитектура, т.е. клиент-серверная архитектура, у которой вся функциональность приложения структурируется на группы подзадач, то применяется программная платформа для автоматизации сборки проектов на основе описания их структуры Apache Maven.

На текущий момент частично разработана северная часть веб-приложения, позволяющая взаимодействовать с программным продуктом с помощью описанного внутреннего слоя приложения. Дальнейшим этапом разработки проекта является написание визуальной части веб-приложения, позволяющей клиентам взаимодействовать с программным продуктом.

Библиографический список

1. Отличительные признаки официально-делового стиля текста [Электронный ресурс]. URL: <https://www.kakprosto.ru/kak-823209-otlichitelnye-priznaki-oficialno-delovogo-stilya-teksta>

Разрешимость задачи для уравнений движения сыпучей среды

И.Г. Ахмерова, А.С. Правдивцев

АлтГУ, г. Барнаул

В статье доказана разрешимость «в малом» по времени начально-краевой задачи о нестационарном неизотермическом одномерном движении сыпучей среды.

Ключевые слова: разрешимость, плотность, гранулярная температура, сыпучая среда.

Рассматривается одномерное неизотермическое движение сыпучей среды. Законы сохранения массы, импульса и энергии имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$m\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = m\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} - I. \quad (3)$$

Здесь $u(x, t)$ - скорость; $\rho(x, t)$ - плотность; $T(x, t)$ - гранулярная температура, определяемая колебаниями средней скорости частиц, т.е. $\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}m(\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)$, где k_B - постоянная Больцмана; m - масса частицы; $p(\rho, T)$ - давление, удовлетворяет уравнению состояния Ван-дер-Ваальса [2]; $\mu(\rho, T)$ - сдвиговая вязкость; $\lambda(\rho, T)$ - объемная вязкость; $I(\rho, T)$ - диссипативный член, возникающий из-за неупругих столкновений частиц; $\kappa(\rho, T)$ - коэффициент теплопроводности.

В приложениях используются следующие зависимости [2], [3],[4]:

$$p(\rho, T) = \rho T \frac{\rho_c + \rho}{\rho_c - \rho}, \quad \kappa(\rho, T) = \frac{\rho(\alpha l + d)^2}{l} \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad \mu(\rho, T) = mPr \kappa,$$

$$\lambda(\rho, T) = -\frac{2}{3}\mu(\rho, T), \quad I(\rho, T) = \frac{\varepsilon}{\gamma_c} \rho T \sqrt{\frac{T}{m}},$$

где $\rho_c = \frac{2}{d^2\sqrt{3}}$, $l = \frac{(\rho_c - \rho)}{\sqrt{8}\rho d(\rho_c - \rho)}$, $a = 1 - \sqrt{3/8}$, $\alpha = 0,6$, $\mu(\rho, T) = mPr \kappa$, (Pr - число Прандтля), $\varepsilon = (1 - e^2)$, $e \approx 0,9$, $\gamma_c = 2,26$.

Система (1) - (3) дополняется начально-краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = u^0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad T|_{t=0} = T^0(x), \\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Вопросы разрешимости задач для близких по структуре моделей рассматривались: [5], [6], [7], [8], [9].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1) – (4) называется совокупность функций $(u(x, t), \rho(x, t), T(x, t))$ из пространств:

$$\begin{aligned} \rho \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ (u, T) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t}\right) \in L_2(Q_T), \quad \Omega = (0, 1), \quad Q_T = \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

удовлетворяющих уравнениям (1) – (3) и неравенствам $0 < \rho(x, t) < \frac{1}{a}$, $0 < T(x, t) < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема. Пусть данные задачи (1) – (4) обладают следующей гладкостью $(u^0(x), \rho^0(x), T^0(x)) \in W_2^1(\Omega)$, $g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и подчиняются условиям согласования $u^0|_{x=0, x=1} = \frac{\partial T^0(x)}{\partial x}|_{x=0, x=1} = 0$.

Пусть функции $p(\rho, T), \kappa(\rho, T), I(\rho, T)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\rho(x, t) \in (0, \frac{1}{a})$ и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} k_0^{-1} \rho^{q_1} (1 - \rho)^{q_2} (1 - a\rho)^{q_3} |T|^{q_4} &\leq \kappa(\rho, T) \leq \\ &\leq k_0 \rho^{q_5} (1 - \rho)^{q_6} (1 - a\rho)^{q_7} |T|^{q_8}, \\ k_0^{-1} \rho^{q_9} (1 + \rho)^{q_{10}} (1 - \rho)^{q_{11}} |T|^{q_{12}} &\leq p(\rho, T) \leq \\ &\leq k_0 \rho^{q_{13}} (1 + \rho)^{q_{14}} (1 - \rho)^{q_{15}} |T|^{q_{16}}, \\ k_0^{-1} \rho^{q_{17}} (1 - \rho)^{q_{18}} (1 - a\rho)^{q_{19}} |T|^{q_{20}} &\leq I(\rho, T) \leq \\ &\leq k_0 \rho^{q_{21}} (1 - \rho)^{q_{22}} (1 - a\rho)^{q_{23}} |T|^{q_{24}}, \\ |(\kappa(\rho, T))'_\rho| &\leq k_0 \rho^{q_{25}} (1 - \rho)^{q_{26}} (1 - a\rho)^{q_{27}} |T|^{q_{28}}, \\ |(\kappa(\rho, T))'_T| &\leq k_0 \rho^{q_{29}} (1 - \rho)^{q_{30}} (1 - a\rho)^{q_{31}} |T|^{q_{32}}, \\ |(p(\rho, T))'_\rho| &\leq k_0 \rho^{q_{33}} (1 + \rho)^{q_{34}} (1 - \rho)^{q_{35}} |T|^{q_{36}}, \\ |(p(\rho, T))'_T| &\leq k_0 \rho^{q_{37}} (1 + \rho)^{q_{38}} (1 - \rho)^{q_{39}} |T|^{q_{40}}, \end{aligned}$$

где $k_0 = \text{const} > 0$, $q_{1, \dots, 40}$ – фиксированные вещественные параметры. Если выполнены условия

$$0 < b_0 \leq \rho^0(x) \leq B_0 < \frac{1}{a}, \quad 0 < b_1 \leq T^0(x) \leq B_1 < \infty,$$

где b_0, B_0, b_1, B_1 - известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 > 0, t_0 \in (0, T)$ такое, что для всех $t \leq t_0$ существует сильное решение $(u(x, t), \rho(x, t), T(x, t))$ задачи (1) – (4).

Существование сильного решения на достаточно малом промежутке времени в случае доказывается с помощью метода Галёркина и в идейном плане следует доказательству аналогичного результата для вязкого теплопроводного газа.

Библиографический список

1. Peter Eshuis et al. Buoyancy driven convection in vertically shaken granular matter: experiment, numerics, and theory. – *Granular Matter*. – 2013. – 15:893 – 911.
2. Grossman, E.L., Zhou, T., Ben-Naim, E.: Towards granular hydrodynamics in two-dimensions. – *Phys. Rev.* – E 55. – 4200. – 1997
3. Eshuis, P., van der Weele, K., van der Meer, D., Lohse, D.: Granular leidenfrost effect: experiment and theory of floating particleclusters. – *Phys. Rev.* – Lett. 95. – 258001. – 2005
4. Meerson, B., Pöschel, T., Bromberg, Y.: Close-packed floating clusters: granular hydrodynamics beyond the freezing point? – *Phys. Rev.* – Lett. 91. – 024301. – 2003
5. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // *Динамика сплошной среды*. – 1999. – №114. – С. 64-70.
6. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // *Динамика сплошной среды*. – 2000. – №116. – С. 73-80.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // *Mathematical Notes*. – 2010. – Vol. 87(№2). – P 230-243.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // *Mathematical Notes*. – 2014. – Vol. 96(№2). – P 8-21.
8. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей // *Ред. Сиб. мат. журн. Сиб. отд. АН РФ*. – Новосибирск. – 2004. – Деп. ВИНТИ. – №37. – 34с.
9. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск. – 1983.

**Конечно-элементный метод решения задачи
трехфазной неизотермической фильтрации сжимаемой
жидкости с учетом фазовых переходов**

Д.Р. Байгереев¹, Н.Б. Алимбекова¹

¹*Восточно-Казахстанский университет*

им.С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан;

В настоящей работе рассматривается конечно-элементный метод решения задачи трехфазной неизотермической фильтрации сжимаемой жидкости с учетом фазовых переходов. Постановка полностью дискретной схемы основана на применении конечно-разностной аппроксимации для временных производных и конечно-элементного метода по пространственному направлению.

Ключевые слова: *задача трехфазной неизотермической фильтрации, конечно-элементный метод, сходимост, устойчивост.*

Актуальность решения данной задачи обусловлена ее важной практической значимостью при прогнозировании добычи высоковязкой парафинистой и смолистой нефти методом закачки пара в пласт. Авторами предложены и математически обоснованы экономичные разностные схемы для частного случая данной модели [1]. Сложность решения задачи связана со сложностью физического процесса, фазовыми переходами, необходимостью с хорошей точностью отслеживать положение и характеристики теплового фронта, сильной зависимостью точности решения от размера ячеек сетки.

Различные подходы численного решения задачи трехфазной неизотермической фильтрации с различными предположениями о физических данных были изучены в работах А. А. Боксермана и С. И. Якубы [2], Абдрамановой М. Б. [3], Mozzaffari S. [4]. Оригинальных работ по конечно-элементным методам решения задачи трехфазной неизотермической фильтрации сравнительно мало [5-6]. В (6) используется модифицированный метод взвешенных остаточных конечных элементов Галеркина с асимметричными базисными функциями.

Рассмотрим следующую задачу трехфазной неизотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей в области $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega \subset R^2$, $J = (0, T]$. Процесс совместного неизотермического течения

воды, нефти и пара в пористой среде описывается уравнением неразрывности, записанным для каждой из трех фаз, уравнением движения в виде линейного обобщенного закона Дарси, уравнением энергии, уравнением состояния:

$$\varphi \partial_t (\rho_\alpha s_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + I_\alpha = \rho_\alpha q_\alpha, \alpha \in \{w, o, g\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{K k_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha, \alpha \in \{w, o, g\}, \quad (2)$$

$$\partial_t \left(\varphi \sum_{\alpha=w,o,g} \rho_\alpha s_\alpha U_\alpha + (1-\varphi) \rho_r U_r \right) + \nabla \cdot \sum_{\alpha=w,o,g} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha i_\alpha - \nabla \cdot (k_\square \nabla T) = q_T \quad (3)$$

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha, T), \alpha \in \{w, o, g\}, \quad (4)$$

где нижними индексами w, o, g, r обозначены фазы воды, нефти, теплоносителя и порода; φ и K - пористость и проводимость среды; $p_\alpha(x, t)$ - давление, $s_\alpha(x, t)$ - насыщенность, $\rho_\alpha(p_\alpha, T)$ - плотность, $k_\alpha(s_\alpha)$ - относительная фазовая проницаемость, $\mu_\alpha(T)$ - вязкость, $i_\alpha(T)$ - энтальпия, U_α - внутренняя энергия фазы α ; k_\square - коэффициент теплопроводности; q_α и q_T - функции источников/стоков и тепловой дебит; \mathbf{u}_α - вектор скорости фильтрации; I_α - интенсивность фазовых переходов.

Для насыщенностей фаз выполняется соотношение

$$s_w + s_o + s_g = 1. \quad (5)$$

Разность давлений на границе раздела фаз выражается соотношениями:

$$p_{ow} = p_o - p_w, p_{go} = p_g - p_o, \quad (6)$$

где p_{ow} и p_{go} - капиллярные давления - непрерывно-дифференцируемые функции, зависящие от насыщенностей фаз и температуры. Данные функции предполагаются известными, причем $\frac{\partial p_{ow}}{\partial s_w}(s_w, T) < 0$, $\frac{\partial p_{go}}{\partial s_g}(s_g, T) > 0$. В случае трехфазной изотермической фильтрации используются, например, формулы Паркера вида

$$p_{ow}(s_w) = \frac{1}{\alpha \beta_1} \left[(\bar{s}_w)^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}, p_{go}(s_g) = \frac{1}{\alpha \beta_2} \left[(1 - \bar{s}_g)^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (7)$$

где $n, \alpha, \beta_1, \beta_2$ - некоторые постоянные, а \bar{s}_w, \bar{s}_g - приведенные насыщенности, которые определяются по формулам

$$\bar{s}_w(s_w) = \frac{s_w - s_{w0}}{1 - s_{w0} - s_{o0}}, \bar{s}_g(s_g) = \frac{s_g}{1 - s_{w0} - s_{o0}},$$

где $s_{w0} \geq 0$, $s_{o0} \geq 0$ - остаточные водо- и нефтенасыщенность, $0 \leq s_{w0} + s_{o0} < 1$. Энтальпия i_α фазы α определяется по формуле

$$i_\alpha = \begin{cases} c_\alpha T, & \alpha \in \{w, o, r\}, \\ c_\alpha T + r, & \alpha = g. \end{cases}$$

Определим теперь начальные и граничные условия для системы уравнений (1)-(6). Предполагается, что в начальный момент времени известны температура, давление, а поровое пространство заполнено двумя фазами - воды и нефти:

$$\begin{aligned} T(x, 0) = T_0, p_w(x, 0) = p_0, \\ s_\alpha(x, 0) = s_{\alpha 0}, \alpha = w, o, s_g(x, 0) = 0, x \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (8)$$

На границе $\partial\Omega$ области $\bar{\Omega}$ ставятся следующие условия:

$$\mathbf{u}_\alpha|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

В работе [7] предложена вычислительная модель, основанная на введении замены переменных

$$p = p_o - \int_1^{s_w} \theta_w(\xi, 0, p, T) p'_{ow}(\xi) d\xi + \int_0^{s_g} \theta_g(s_w, \xi, p, T) p'_{go}(s_g) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(s_w, s_g, p_o, T) = \lambda_\alpha \lambda^{-1}, \lambda_\alpha(s_w, s_g, p_o, T) = \rho_\alpha c_\alpha k_\alpha \mu_\alpha^{-1}, \\ \lambda(s_w, s_g, p_o, T) = \lambda_w + \lambda_o + \lambda_g. \end{aligned}$$

В результате исходная задача неизотермического движения трехфазной смеси сведена к следующей эквивалентной задаче.

Задача 1. В области $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega \subset R^2$ найти $T, p, s_w, s_o, \mathbf{u}$, такие что

$$\begin{aligned} c_T \partial_t T - \nabla \cdot (k_\square \nabla T - b(T) \mathbf{u}) &= f_T, & (x, t) \in \square \times J, \\ \beta_p \partial_t p - \nabla \cdot (k_p \nabla p) - \beta_T \partial_t T &= f_p, & (x, t) \in \square \times J, \\ \varphi \rho_\alpha \partial_t s_\alpha - \nabla \cdot (v_\alpha \nabla p + D \nabla s_\alpha) + I_\alpha &= f_\alpha, & (x, t) \in \square \times J, \\ & & \alpha \in \{w, o\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = -K \lambda \nabla p, \quad (x, t) \in \square \times J.$$

Определим пространства $W = H^1(\Omega)$, $W_0 = H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{U} = H(\text{div}; \Omega)$. Сформулируем слабую постановку задачи.

Задача 2. Найти $\{T, p, s_w, s_o, \mathbf{u}\}: J \mapsto W \times W \times W \times W \times \mathbf{U}$, удовлетворяющие тождествам

$$(c_T \partial_t T, w) + (k_T \nabla T - b(T) \mathbf{u}, \nabla w) = (f_T, w), \quad (11)$$

$$(\beta_p \partial_t p, q) + (k_p \nabla p, \nabla q) - (\beta_T \partial_t T, q) = (f_p, q), \quad (12)$$

$$(\varphi \rho_\alpha \partial_t s_\alpha, z) + (v_\alpha \nabla p, \nabla z) + (D \nabla s_\alpha, \nabla z) + (I_\alpha, z) = (f_\alpha, z), \quad (13)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (K \lambda \nabla p, \mathbf{v}) = 0. \quad (14)$$

Обозначим через $W_{\square} \subset W$ и $U \subset U_{\square}$ некоторые конечно-элементные пространства.

Введем разбиение временного отрезка с параметром дискретизации τ . Определим полностью дискретную постановку задачи.

Задача 3. *Найти $(T_{\square}^n, p_{\square}^n, s_{w_{\square}}^n, s_{o_{\square}}^n, \mathbf{u}_{\square}^n) \in W_{\square} \times W_{\square} \times W_{\square} \times W_{\square} \times U_{\square}$, удовлетворяющие тождествам*

$$\frac{1}{\tau}(c_T(T_{\square}^n - T_{\square}^{n-1}), w_{\square}) + (k_T \nabla T_{\square}^n - b(T_{\square}^n) \mathbf{u}_{\square}^n, \nabla w_{\square}) = (f_T, w_{\square}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\beta_p(p_{\square}^n - p_{\square}^{n-1}), q_{\square}) + (k_p \nabla p_{\square}^n, \nabla q_{\square}) - \\ - \frac{1}{\tau}(\beta_T(T_{\square}^n - T_{\square}^{n-1}), q_{\square}) = (f_p, q_{\square}), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\varphi \rho_{\alpha}(s_{\alpha_{\square}}^n - s_{\alpha_{\square}}^{n-1}), z_{\square}) + (v_{\alpha} \nabla p_{\square}^n, \nabla z_{\square}) + \\ + (D \nabla s_{\alpha_{\square}}, \nabla z_{\square}) + (I_{\alpha}, z_{\square}) = (f_{\alpha}, z_{\square}), \quad (17) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{u}_{\square}^n, \mathbf{v}_{\square}) + (K \lambda \nabla p_{\square}^n, \mathbf{v}_{\square}) = 0. \quad (18)$$

Исследуем устойчивость схемы (15)-(18) в случае, когда коэффициенты уравнений являются известными функциями. Для упрощения выкладок примем следующие предположения относительно коэффициентов. Пусть $b(x)$ – положительная непрерывно-дифференцируемая функция. Кроме того, существуют положительные числа φ_* , k_* , k^* , b^* такие что $\varphi_* \leq (c_T, \beta_p, \rho_{\alpha}) \leq \varphi^*$, $k_* \leq (k_T, k_p, v_{\alpha}, D) \leq k^*$, $b(x) \leq b^*$. Предположим, что существует положительная постоянная C , такая что $\beta_T \leq C\tau$, $k \leq C\tau$.

Приведем без доказательства теоремы устойчивости и сходимости конечно-элементного метода решения рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Пусть $\{(T_{\square}^n, p_{\square}^n, s_{w_{\square}}^n, s_{o_{\square}}^n, \mathbf{u}_{\square}^n)\}_{n=0}^N$, $\mathbf{u}_{\square}^n \in U_{\square}$, $p_{\square}^n \in M_{\square}$, $\eta_{\square}^n \in W_{\square}$ – решение задачи 3. Тогда при достаточно малых τ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \|T_{\square}^n\|^2 + \|p_{\square}^n\|^2 + \|s_{\alpha_{\square}}^n\|^2 + \tau \|\nabla T_{\square}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla p_{\square}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla s_{\alpha_{\square}}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \\ \leq C(\|T_{\square}^0\|^2 + \|p_{\square}^0\|^2 + \|s_{o_{\square}}^0\|^2) \\ + C\tau \sum_{i=1}^n (\|I_{\alpha}\|^2 + \|f_T\|^2 + \|f_p\|^2 + \|f_{\alpha}\|^2). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть $(T, p, s_w, s_o, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U$, $T \in W$, $p \in W$, $s_{\alpha} \in W$ – решение задачи 2, а $(T_{\square}^n, p_{\square}^n, s_{w_{\square}}^n, s_{o_{\square}}^n, \mathbf{u}_{\square}^n)$, $\mathbf{u}_{\square}^n \in U_{\square}$, $T_{\square}^n \in W_{\square}$, $p_{\square}^n \in W_{\square}$,*

$s_{\alpha\Box}^n \in W_{\Box}$ – решение задачи 3. Тогда при достаточно малых τ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|T(t_n) - T_{\Box}^n\| + \|p(t_n) - p_{\Box}^n\| + \|s_w(t_n) - s_{w\Box}^n\| + \|s_o(t_n) - s_{o\Box}^n\| + \\ & + \tau(\|\nabla(T(t_n) - T_{\Box}^n)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(p(t_n) - p_{\Box}^n)\|_{L^2(\Omega)}) + \\ & + \tau(\|\nabla(s_w(t_n) - s_{w\Box}^n)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(s_o(t_n) - s_{o\Box}^n)\|_{L^2(\Omega)}) \leq C(\Box^2 + \tau), \end{aligned}$$

где C – константа, зависящая от норм решения задачи 1, но не зависящая от параметров сетки.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и образования Республики Казахстан, ИРН AP08053189, 2020-2022 годы.

Библиографический список

1. Zhumagulov B., Temirbekov N., Baigereyev D. Efficient Difference Schemes for the Three-Phase Non-Isothermal Flow Problem // AIP Conference Proceedings. - 2017. - Vol. 1880, № 060001. - P. 1-10.
2. Боксерман А.А., Якуба С.И. Численное исследование процесса вытеснения нефти паром // Известия АН СССР. - 1987. - №4. - С. 78-84.
3. Абдраманова М.Б. Математическое моделирование процесса вытеснения нефти паром: Ph. D. thesis / М. Б. Абдраманова. - 2001. - 131 с.
4. . Mozzaffari S. Numerical modeling of steam injection in heavy oil reservoirs // Fuel. - 2013. - No. 112. -P. 185-192.
5. Falta R.W., Pruess K., Javandel I. Numerical Modeling of Steam Injection for the removal of Nonaqueous Phase Liquids from the Subsurface // Water Resources Research. – 1992. – Vol. 28, No. 2. – P. 433–449.
6. Kaddouri A., Ferguson W.J. A nonisothermal threephase pollutant transport model, theoretical formulation and numerical applications // Oil and Hydrocarbon Spills. – 2002. – Vol. III. – P. 23–33.
7. Wojcik W., Temirbekov N.M., Baigereyev D.R. Fractional flow formulation for three-phase non-isothermal flow in porous media // Przegląd Elektrotechniczny. - 2016. - Vol. 92, No. 7. - P. 24-31.

УДК 51-4

Создание базы данных лёгочных звуков детей**К.Е. Букатов², А.И. Пиянзин^{1,2}**¹*АГМУ, г. Барнаул;*²*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья описывает создание базы данных и последующего её использования для изучения педиатрических лёгочных звуков с помощью современных компьютерных технологий.

Ключевые слова: *дети, медицина, машинное обучение пульмонология, звуки легких*

В настоящее время отмечается рост детской заболеваемости, который обусловлен главным образом патологией бронхолегочной системы [1]. В диагностике заболеваний легких очень важным моментом является наличие хрипов и динамика изменений [2, 3].

Целью работы было создание базы данных лёгочных звуков для последующего использования в машинном обучении. Проводилось извлечение звуковых характеристик хрипов лёгких [4]. Звуки были записаны в симуляционном центре Алтайского государственного медицинского университета (Педиатрический аускультационный тренажёр фирмы Cardionics). В качестве инструментов для обработки и получения характеристик звуков использовались: язык программирования Python и его библиотеку Librosa [5]. Использовались следующие характеристики для базы данных: MFCC (Мел-частотные кепстральные коэффициенты) – небольшой набор характеристик (обычно около 10-20) которые, сжато описывают общую форму спектральной огибающей. Этот параметр моделирует характеристики человеческого голоса; BPM — Мера времени в музыке, упрощённо — «скорость исполнения музыки»; Zero crossing — Количество пересечений нуля при звуковых колебаниях; Target — Числовое значение диагноза; Target name — Название диагноза. В результате работы была создана база данных, которая по MFCC, Zero crossing, BPM имела существенные различия по диагнозам и может использоваться для изучения лёгочных звуков с помощью технологий искусственного интеллекта.

Библиографический список

1. Педиатрия : Национальное руководство : в 2 т. / ассоц. мед. о-в по качеству (асмок) ; подгот. под эгидой союза педиатров России и ассоц. мед. о-в по качеству ; [ред. совет: д-р мед. наук, проф., академик РАМН Баранов А. А. и др.]. — Москва : Гэотар-медиа, т. 1. — 2009 г. — 1017 с.,
2. Акустический анализ дыхательных звуков в диагностике заболеваний легких = acoustic analysis of breathing sounds in diagnosis of pulmonary diseases / А. А. Гусейнов // пульмонология : научно-практический журнал / всероссийское респираторное общество. — 2009. — № 2. — с. 51-55.
3. Классификация клинических форм бронхолегочных заболеваний у детей (принята в Москве на симпозиуме по совершенствованию классификации неспецифических болезней легких у детей) = classification of clinical forms of broncho-pulmonary diseases in children /С. В. Рачинский, С. Ю. Каганов, В. К. Таточенко [и др.] // Российский вестник перинатологии и педиатрии : научно-практический рецензируемый журнал / ООО "национальная педиатрическая академия науки и инноваций", некоммерческая организация "Российская ассоциация педиатрических центров". — 1996. — т. 41, № 2. — с. 52-56.
4. Eric r. gottlieb, jason M. Aliotta, dominick tammara. comparison of analogue and electronic stethoscopes for pulmonary auscultation by internal medicine residents // postgraduate medical journal. 2018. vol. 94, no. 1118. p. 700-703.
5. Olivier Lartillot, Petri Toiviainen A matlab toolbox for musical feature extraction from audio Proc. of the 10 Conference on Digital Audio Effects (DAFx-07), 2007, Bordeaux, France, September 10-15.

Цифровизация студенческих столовых

И.В. Бурлаков¹, А.В. Каримов¹, А.И. Пиянзин^{1,2}

¹*Алтайский государственный университет, г.Барнаул;*

²*Алтайский государственный медицинский университет,
г.Барнаул*

В работе рассматривается создание онлайн сайта университетских столовых, что позволит уменьшить заболеваемость студентов. На сайте предусмотрено меню на любой день, предзаказ желаемых блюд. Профиль студента с историей заказов. На сайте представлена страница поставщиков продуктов, диетические столы.

Ключевые слова: *цифровизация, диетический стол, студенческая столовая, поставщики продуктов.*

Высокая заболеваемость студентов по различным патологиям обусловлена неправильным питанием, потреблением некачественных продуктов и нарушением режима приёма пищи. Студенческие столовые, как правило, не имеют подробной характеристики блюд, возможности предварительного заказа, вся документация ведётся в печатном виде. Для решения вышеуказанных проблем необходима цифровизация столовых.

Предварительно были просмотрены сайты кафе, ресторанов, гостиниц. В ходе анализа выяснилось, что в кафе детально охарактеризовано каждое блюдо, в гостиницах представлена цифровая версия печатного меню. Сайты ведущих российских и зарубежных университетов: Московский государственный, Новосибирский государственный, Оксфордский, Кембриджский университеты. Все вышеперечисленные университетские сайты не имели электронной версии раздела «студенческая столовая».

На сайте Алтайского государственного университета, был создан ресурс - студенческая столовая, на основе языка программирования C# и библиотеки asp net core mvc 5 и Angular, а также база данных PostgreSQL [1,2,3]. Кроме этого, было разработано мобильное приложение, используя средства Android Studio [4]. Сайт и мобильное приложение имеют следующие позиции: название, фото и адрес корпуса университета, график работы, система оплаты (онлайн) и цены. Даны рекомендации здорового питания на основе положений

федерального Института Питания, Всемирной Организации Здравоохранения, а также специалистов-диетологов [5, 6]. Учитываются имеющиеся заболевания, такие как гастрит, язвы и другие. Веб-сайт имеет компьютерные изображения блюд с указанием калорийности и состава по белкам, жирам, углеводам; алгоритм правильного питания, подбор диеты, раздел с диетическими столами. На сайте представлена страница с поставщиками, для того чтобы студенты были уверены в качестве продуктов. Меню доступно по ссылке или коду на любом устройстве из любого места. Оно имеет практичный дизайн и большой функционал. Имеющиеся фото блюд стимулируют продажи, исключают ошибки выбора, ускоряют обслуживание.

Библиографический список

1. Рихтер Дж. CLR via C#. (4-е издание, 2013) Издательский дом «Питер», 2013, 896 с.
2. Прайс. C# 7 и .NET Core. Кросс-платформенная разработка для профессионалов Издательский дом «Питер», 2018, 640 с.
3. Троелсен и Джепикс. Язык программирования C# 7 и платформы .NET и .NET Core Издательство Вильямс, 2018, 1328 с.
4. Дейтел, Дейтел, Уолд: Android для разработчиков Издательский дом «Питер», 2016, 512 с
5. Барановский А. Ю. Диетология. 5-е изд. Издательский дом «Питер», 2022, 1104 с.
6. Федеральная служба по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека главный государственный санитарный врач Российской Федерации постановление от 27 октября 2020 г. № 32 об утверждении санитарно-эпидемиологических правил и норм санпин 2.3/2.4.3590-20 «санитарно-эпидемиологические требования к организации общественного питания населения».

Клеточные автоматы для вычисления хеш-кодов паролей и шифрования

А.Н. Гамова

*Саратовский государственный университет им.
Н.Г. Чернышевского, г.Саратов, Россия*

Проблема безопасного хранения паролей является актуальной как никогда в связи с увеличением количества атак на базы данных паролей. Одним из решений этого вопроса является хранение хеш-кодов вместо самих паролей.

Ключевые слова: *хеш-функция, хеш-код, основные типы атак на хеш-функции, клеточный автомат, правила развития клеточного автомата, основные типы атак на хеш-функции.*

Основной целью исследований в данной области является создание реалистичных моделей поведения сложных систем. Если для последовательных вычислений универсальной моделью является машина Тьюринга, то клеточные автоматы являются такой моделью для параллельных вычислений.

Одномерный клеточный автомат представляет массив, состоящий из клеток, следующее состояние клетки определяется ее нынешним состоянием и нынешним состоянием ее соседей или, другими словами, окрестностью клетки. Двумерный клеточный автомат задается однородной «решёткой», в каждой клетке которой находится конечный автомат. Окрестность клетки задаётся как свойство клеточного автомата, где для каждой клетки она одинакова. Все клетки обладают следующими свойствами: 1. Решётка однородна; 2. Взаимодействия локальны (на состояние клетки влияет только её окрестность); 3. Множество состояний клетки конечно; 4. Изменения значений всех клеток происходят одновременно.

Правилами развития клеточных автоматов называются схемы, по которым происходит изменение состояний автомата в следующий момент времени. Всего существует 256 возможных правил для одномерных клеточных автоматов. Они были описаны Стивеном Вольфрамом с помощью кодов Вольфрама (нумерацией кодов от 0 до 255) как чисел из k -цифр в S -арной позиционной системе счисления, где S состояние ячейки в автомате, $k = S^{2n+1}$ – число конфигураций окрестности, а n – радиус окрестности. Основываясь на определении,

код Вольфрама может быть вычислен следующим образом: Определяем все возможные варианты окрестностей клетки; Отсортировываем их по убыванию (интерпретируя варианты окрестностей как число); Для каждого варианта окрестности определяем состояние, которое будет у клетки в следующий момент времени в соответствии с правилом; Преобразуем полученный список состояний в десятичное число. Это и будет кодом Вольфрама.

Хеш-функции [1]. В ГОСТе 34.11-2018 приведено следующее определение хеш-функции: «хеш-функция – это функция, отображающая строки бит в строки бит фиксированной длины и удовлетворяющая следующим свойствам:

- По данному значению функции сложно вычислить исходные данные, отображаемые в это значение;
- Для заданных исходных данных сложно вычислить другие исходные данные, отображаемые в то же значение функции;
- Сложно вычислить какую-либо пару исходных данных, отображаемых в одно и то же значение».

Хеш-код – это строка бит, являющаяся выходным результатом хеш-функции. Хеш-функции применяются в следующих случаях:

- Проверка целостности данных;
- Система аутентификации (применение хеш-функции для паролей);
- Создание и проверка электронной цифровой подписи.

Основные типы атак на хеш-функции, используемые при аутентификации: Атака по «радужным» таблицам: поиск по огромным базам данных, где собраны различные хеш-коды для всевозможных строк; Атака грубой силой: перебор различных комбинаций символов и применение к ним хеш-функций до получения искомого хеш-кода; Атака по словарю: перебор самых популярных паролей и применение к ним хеш-функций до получения искомого хеш-кода.

Соль – это строка данных, которая передаётся хеш-функции вместе с входным массивом данных для вычисления хеша. Существует два вида соли: статическая и динамическая. При статической - соль для всех пользователей одинакова. При динамической - для каждого пользователя генерируется своя уникальная соль. Как правило, соль приписывается после пароля, и далее получившаяся строка передаётся на вход хеш-функции, но также возможно добавления соли в какую-то другую часть пароля или добавление соли при нескольких раундах вычисления хеш-кода.

Для предотвращения атак на хеш-коды используют следующие методы:

- Для предотвращения атаки по «радужным» таблицам используется соль. Она приписывается к паролю до вычисления хеш-функции. Минус данного метода состоит в том, что соль приходится хранить вместе с хеш-кодом;
- Для предотвращения атаки грубой силой при вычислении хеш-кода необходимо использовать сложные алгоритмы;
- Для предотвращения атаки по словарю необходимо использовать сложные пароли.

Методы вычисления хеш-кодов паролей на основе теории клеточных автоматов [2]. Применение хеш-функции для вычисления хеш-кодов паролей является односторонним процессом. Следовательно, для получения хеш-кода пароля можно использовать классические 256 правил развития одномерного клеточного автомата, которые являются необратимыми. Важным вопросом является подбор правила развития клеточного автомата. Он должен храниться в неявном виде вместе с хеш-кодом. Следовательно, есть два возможных варианта: 1. Выбор правила развития клеточного автомата зависит от логина пользователя; 2. Выбор правила развития клеточного автомата зависит от сгенерированной соли (это возможно благодаря тому, что соль хранится вместе с хеш-кодом); 3. Алгоритм преобразования клеточного автомата для получения хеш-кода можно применять как один раз, так и несколько; 4. Средняя длина пароля оставляет 9,6 символов. Основываясь на этом, для общности, выберем длину хеш-кода равной 32 символам.

Подводя итоги, отметим, что клеточные автоматы привлекают все большее внимание в связи с тем, что распараллеленность их структуры позволяет увеличивать скорость работы и пропускную способность аппаратных реализаций криптоалгоритмов [3]. Особо следует сказать о перспективах использования клеточных автоматов в асимметричной криптографии. На сегодняшний день известно сравнительно небольшое число криптосистем с открытым ключом, причём к ним зачастую предъявляются претензии, как ввиду их малой скорости работы, так и по поводу недостаточного обоснования их стойкости. Вплоть до самого последнего времени «технологическая база» криптографии с открытым ключом продолжала оставаться чрезвычайно бедной. В основании стойкости таких систем обычно лежит вычислительная трудность решения некоторой задачи для какой-то алгебраической системы, чаще всего – алгебраической системы с элементами числовой природы. В подавляющем большинстве случаев это или задача факторизации больших чисел, или задача дискретного логарифмирования в циклической группе,

чаще всего – мультипликативной группе конечного поля. Еще более печальны перспективы указанных криптосистем в случае появления квантового компьютера, работающего с тысячами кубит (модели квантовых компьютеров, имеющиеся в настоящее время, работают с единицами кубит). Поиск же других алгебраических систем, применимых в криптографии с открытым ключом в постквантовом мире, является трудной задачей и требует вовлечения в криптографический обиход новых математических объектов. В этой связи стоит обратить особое внимание на клеточные автоматы, которые представляют собой некоммутативные алгебраические структуры, и более тщательно изучить вопросы их возможного использования в асимметричной криптографии.

Библиографический список

1. Гамова А.Н., Слеповичев И.И. Сложность и случайность // Компьютерные науки и информационные технологии: матер. Междун. научн. конф. – Саратов, 2021. - С.48-53.
2. Латышева А.И., Гамова А.Н. Практические разработки на базе клеточных автоматов //МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике, Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2021 – С. 58-61.
3. Ефремова А.А., Гамова А.Н. Самопрограммируемые клеточные автоматы в криптографии// Прикладная дискретная математика – 2017 № 10. - С. 76-81.

Информационно-измерительная система испытаний изделий специальной химической промышленности в контексте цифровой трансформации научно-производственного предприятия

И.А.Драничников, А.В.Кодолов, Ф.А.Попов

*АО «Федеральный научно-производственный центр
«Алтай», г. Бийск*

В работе на примере АО «ФНПЦ «Алтай» рассмотрены вопросы и особенности создания информационно-измерительной системы (ИИС) испытаний изделий специальной химической промышленности как драйвера, так и элемента структуры цифрового пространства предприятия. Цифровое пространство, под которым понимается совокупность информационно-измерительных, справочных, управляющих систем, и инструментов, а также результаты в виде цифровых данных, моделей, отчетов, баз данных, информационно и технологически связанных в единую автоматизированную информационно-управляющую систему предприятия. На текущий момент данная ИИС является центральной частью системы испытания изделий, обработки данных и получения отчетов. Её разработка ведется с учетом необходимости интеграции с другими подсистемами в рамках единого информационного пространства (ЕИП) предприятия, в соответствии со стратегией цифровой трансформации.

Ключевые слова: *цифровая трансформация научно-производственного предприятия, цифровая платформа, интегрированная система управления процессами создания изделий, информационно-измерительная система.*

Работы, по смыслу и содержанию идентичные современному понятию цифровой трансформации предприятий проводились в оборонных отраслях промышленности СССР с начала 1970-х годов, на основе использования отечественных технических средств и программного обеспечения. Выполнялись работы такого рода и в г. Бийске, на базе вычислительного центра Алтайского НИИ химической технологии (позднее – НПО «Алтай», ФНПЦ «Алтай», АО «ФНПЦ «Алтай» [1]. К началу 1980-х годов на предприятии была создана корпоративная информационно-вычислительная сеть, ядро которой было построено на основе использования комплекса ЭВМ общего

назначения, доступ к ее вычислительным и информационным ресурсам подразделениями и службами осуществлялся с помощью терминальной сети.

Работы в области информатизации и автоматизации производственных процессов проводились в соответствии с итеративной формулой <НИР, ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ИЗГОТОВЛЕНИЕ, ИСПЫТАНИЯ>, причем все эти процессы рассматривались во взаимодействии друг с другом в рамках ЕИП предприятия.

В настоящее время с учетом реалий сегодняшнего дня и требований в рамках Стратегии цифровой трансформации предприятий, предусматривается создание единой корпоративной компьютерной сети, единого хранилища данных, интегрированной информационно-управляющей системы, построенной на основе онтологической модели данных, обеспечение возможности информационной поддержки всех этапов жизненного цикла изделий [2,3,4]. В том числе создается ЕИП управления производством и жизненным циклом выпускаемых изделий, ключевой компонентой которого являются данные системы поддержки процессов испытания изделий, формируемые средствами ИИС и подсистемами испытаний виртуальных двойников изделий [5,6].

В итоге предусматривается формирование цифрового паспорта, предназначенного для передачи в эксплуатацию изделия, с сохранением его оригинала в БД спроектированных и отработанных изделий.

В структуру ИИС входят:

1. Многоканальная система сбора данных с измерительными модулями;

2. Коммуникационный блок, объединяющий все узлы ИИС в рамках локальной компьютерной сети, входящей в структуру корпоративной вычислительной сети предприятия;

3. Блок управления и синхронизации, предназначенный для выработки синхронизирующих и управляющих сигналов, обеспечивающих в автоматическом режиме координацию совместной работы измерительной аппаратуры в соответствии с заранее подготовленным сценарием;

4. Информационно-технологическая система, предназначенная для сбора, обработки, сохранения, передачи данных, обеспечивающая протоколирование хода испытания, коммуникацию Автоматизированных Рабочих Мест (АРМ) операторов, визуализацию

данных с АРМов в реальном времени и передачу их на информационную панель;

5. База данных, содержащая первичные сведения о результатах испытаний изделий, входящая в структуру единого хранилища данных предприятия;

6. Информационно-справочная система, обеспечивающая представление и хранение данных о результатах измерений в структурированном виде;

7. Автоматизированные рабочие места операторов постов: тензометрического, вибрационного, температурного.

Основными функциональными возможностями ИИС является:

1. Ввод, контроль, редактирование, документирование и хранение данных о результатах испытаний;

2. Преобразование измерительных сигналов, поступающих от датчиков;

3. Регистрация и хранение измерительных данных;

4. Визуализация измерительной информации на информационной панели в реальном времени при проведении испытаний;

5. Обработка результатов измерений;

6. Представление результатов обработки в виде таблиц и графиков;

7. Формирование официальных документов с окончательными результатами испытаний.

В целом все данные, формируемые ИИС, после соответствующих преобразований сохраняются в структуре единого хранилища данных предприятия и используются в дальнейшем как при создании новых изделий, так и при формировании цифрового паспорта изделия при завершении процесса его создания. В настоящее время основные компоненты ИИС находятся в стадии эксплуатации, но осуществляется их доработка, обусловленная включением ИИС в состав системы поддержки процессов испытания изделий.

Библиографический список

1. Жарков А.С., Звольский Л.С., Литвинов А.В., Попов Ф.А. Проблемы создания интегрированных АСУ для производств спецхимии и пути их решения. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2014. –188 с.

2. Абрамов Д.Г., Кодолов А.В., Попов Ф.А., Овчинников А.А. Проблемы и пути цифровизации управления предприятием отрасли

спецхимии // Южно-Сибирский научный вестник. –2022. –№ 1 (41). – С. 3-9.

3. Кодолов А.В., Попов Ф.А. Особенности и основные положения цифровой трансформации Федерального научно-производственного центра «Алтай»//Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП–2021): Материалы XVI Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, 27-28 сентября 2021 года / Алт. гос. техн. ун-т, БТИ. — Бийск: изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2021. — с. 101-103

4. Абрамов Д.Г., Кодолов А.В., Попов Ф.А. Интеграционная платформа управления комплексом технологических процессов производства изделий спецхимии // Материалы и технологии XXI века: Доклады V Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых и специалистов (4–6 сентября 2019 года, г. Бийск Алтайского края). Часть I. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2019. – С.71-75.

5. Курбатов А.В., Кондрашов Д.А., Драничников И.А., Попов Ф.А. Информационно-измерительная система прочностных испытаний на этапе стендовых испытаний изделий из высокоэнергетических материалов // Южно-Сибирский научный вестник. –2021. –№ 3 (37). – С. 14-18.

6. Курбатов А.В., Кондрашов Д.А., Драничников И.А., Попов Ф.А. Информационно-измерительная система прочностных испытаний. Подсистема измерительной и исполняющей аппаратуры// Южно-Сибирский научный вестник. –2022. –№ 1. – С. 17-22.

Разработка информационной системы «Ателье. Внутренний учёт»

А.В. Жабина, Т.В. Михеева

АлтГУ, г. Барнаул

Данная статья посвящена разработке информационной системы для ателье «Happy baby».

Ключевые слова: *информационная система, база данных, СУБД, PostgreSQL, SQL, C#.*

Развитие различных сфер человеческой деятельности на сегодняшний день невозможно без широкого применения вычислительной техники и создания информационных систем.

Цель данной работы – разработка информационной системы автоматизации внутреннего учета заказов для ателье «Happy baby». Основная задача, решаемая информационной системой – предоставить сотрудникам быстрый и удобный доступ к информации о заказах ателье.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. выбрано программное обеспечение для реализации ИС;
2. проведен анализ предметной области;
3. спроектирована база данных для информационной системы;
4. разработана информационная система «Ателье. Внутренний учёт».

При разработке информационной системы решались две основные задачи – разработка базы данных для хранения информации и разработка графического интерфейса пользователя клиентского приложения.

Для разработки базы данных нами была выбрана система управления базами данных PostgreSQL [1]. Для написания SQL запросов, разработки процедур, функций, а также для администрирования PostgreSQL использовался стандартный и бесплатный графический инструмент управления СУБД PostgreSQL – pgAdmin3 [2].

Детализированная схема ER-модели базы данных, описывающая концептуальную схему предметной области представлена на рисунке 1.

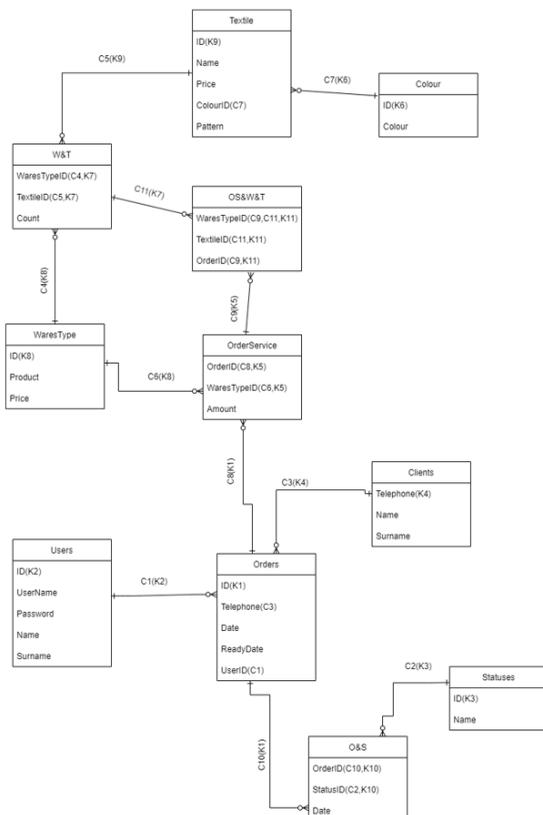


Рисунок 1 – ER-модель базы данных

Реализация информационной системы осуществлялась в среде разработки Microsoft Visual Studio на языке C# [3]. Данная среда разработки предоставляет усовершенствованный редактор кода, удобные инструменты для создания графического пользовательского интерфейса, интегрированный отладчик и множество других инструментов для упрощения разработки приложений на основе .NET Core.

Главной формой пользовательского приложения является форма авторизации, дающая доступ к полному функционалу информационной системы. После авторизации сотрудник попадает на главную страницу (рисунок 2), где имеется возможность оформить заказ, добавить услугу и добавить информацию о клиенте.



Рисунок 2 – Главная страница

Для ознакомления с заказами сотрудник переходит на страницу заказов (рисунок 3) через пункт меню. На странице заказов можно посмотреть статус заказа и оформить новый.

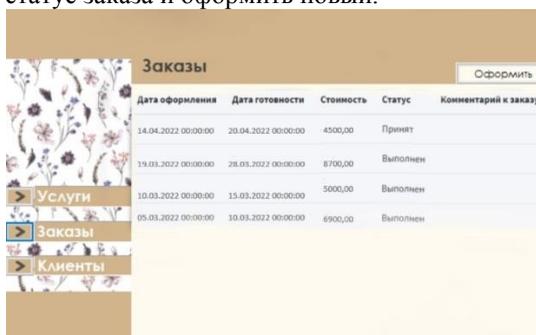


Рисунок 3 – Вкладка «Заказы»

Для оформления заказа сотрудник переходит на соответствующую страницу заказа и заполняет форму заказа. Данная форма предоставляет возможность добавить несколько услуг в один заказ. Для этого пользователь выполняет поиск и выбор услуги по названию. Выбранные услуги добавляются в таблицу.

Разработанное приложение позволяет облегчить ведение учета информации о клиентах и заказах, а также добавлять, редактировать информацию об услугах в базе данных.

Данная информационная система соответствует всем требованиям предметной области, в рамках развития в будущем планируется следующее:

1) оптимизация исходного кода для повышения производительности;

- 2) поиск инструментов и решений для усовершенствования интерфейса.
- 3) расширение функциональных возможностей.

Библиографический список

1. Документация PostgreSQL и Postgres Pro [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://postgrespro.ru/docs/> – Загл. с экрана (Дата обращения 02.06.2022).
2. pgAdmin – PostgreSQL Tools [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.pgadmin.org/> – Загл. с экрана (Дата обращения 02.06.2022).
3. Visual Studio: IDE и редактор кода для разработчиков и групп, работающих с программным обеспечением [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://visualstudio.microsoft.com/ru/> – Загл. с экрана (Дата обращения 02.06.2022).

Разработка web-приложения для оценки физического развития ребенка с использованием библиотеки React

А.В. Забровский¹, Н.О. Мироненко², А.И. Пиянзин^{1,2}

¹Алтайский государственный университет, г.Барнаул;

*²Алтайский государственный медицинский университет,
г.Барнаул*

В работе рассматривается создание web-приложения, которое позволит облегчить работу врачей-педиатров, путем уменьшения затрат времени на определение степени дисгармоничности физического развития ребенка. В приложении реализован калькулятор для подсчета индекса массы тела ребенка, на основе вычислений которого определяется оценка.

Ключевые слова: *web-приложение, физическое развитие ребенка, индекс массы тела, библиотека React.*

По данным Федеральной службы государственной статистики [1] в настоящее время идет рост детской заболеваемости по основным классам болезней. Необходимо следить за физическим развитием ребенка, чтобы сохранить его здоровье. Одним из способов оценки физического развития детей является метод индексов. Индексы – это показатели соотношения отдельных антропометрических показателей, выраженных в математических формулах. Популярным показателем для оценки степени дисгармоничности физического развития ребенка является индекс массы тела [2].

На данный момент нет web-приложения, на котором можно выполнить большинство расчетов, наиболее используемых врачами-педиатрами, поэтому разработанное приложение будет первым этапом для создания такого рода ресурса.

Инструментарий для разработки выбран таким образом, чтобы он удовлетворял современным трендам в разработке web-приложений. В front-end части используются HTML и CSS для создания интерфейса и JavaScript с библиотекой React для реализации функционала. Таким образом, используется подход single page application, которому присущи быстрая скорость загрузки страниц приложения и гибкость UI (user interface). Для back-end части используется BaaS-платформа Firebase. С помощью этой платформы создана база данных в сервисе

Realtime Database. Тем самым хранение данных обеспечено облачным хранилищем и нет необходимости следить за серверной частью приложения.

В результате было создано web-приложение, которое имеет семантически правильный и понятный пользователю интерфейс, возможность ввода необходимых параметров (пол, возраст, вес, рост) и функционал для вычисления индекса массы тела и получения оценки физического развития ребенка. Помимо этого, приложение хранит данные из таблиц Всемирной организации здравоохранения для определения степени дисгармоничности физического развития ребенка [3]. Созданы базовая front-end архитектура и условия для дальнейшей разработки и технической поддержки приложения.

Библиографический список

1. Федеральная служба государственной статистики [электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/>. Дата обращения: 17.06.2022.
2. Кириллова, И. А. Оценка уровня физического развития детей дошкольного возраста г. Иркутска с использованием индексов // Современная медицина: актуальные вопросы: сб. ст. по матер. XXXIV междунар. науч.-практ. конф. №8(34). Новосибирск: СибАК, 2014.
3. Всемирная организация здравоохранения [электронный ресурс]. URL: <https://www.who.int/>. Дата обращения: 17.06.2022.

Анализ и оценка экологической ситуации по областям республики Казахстан с использованием информационных технологий

С.А. Канашева, А.С. Маничева

АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматривается применение информационных и компьютерных технологий для анализа и оценки экологической ситуации по областям Республики Казахстан за период 2017–2020 гг. на основе показателей, характеризующих уровень загрязнения окружающей среды.

Ключевые слова: *административное деление, экологическая обстановка, кластеризация, экспертные оценки, информационные технологии.*

Новые задачи оздоровления экологической обстановки на территории Р. Казахстан выдвинули в число приоритетных направлений оценку экологического состояния этих территорий [1]. К настоящему моменту накоплено большое количество данных о состоянии природной экологической среды Р. Казахстан, что позволяет использовать для ее анализа современные информационные технологии, включая методы экспертного и кластерного инструментария [2–3].

Цель данной статьи – исследовать экологическую обстановку на территории Р. Казахстан с использованием методов кластерного анализа.

Формирование базы экологических данных по областям Р. Казахстан было произведено с помощью сайта Бюро национальной статистики Агентства по стратегическому планированию и реформам Республики Казахстан [4]. Рассматривались показатели за 2017–2020 гг., характеризуют уровень загрязнения окружающей среды (экологическую нагрузку):

- выбросы загрязняющих атмосферу веществ, отходящих от стационарных источников, на душу населения, кг;
- выбросы твердых загрязняющих веществ, на душу населения, тыс. тонн;
- выбросы жидких и газообразных загрязняющих веществ, на душу населения, тыс. тонн.

В качестве объектов рассматривались 14 областей Р. Казахстан: Акмолинская, Актюбинская, Алматинская, Атырауская, Западно-Казахстанская, Жамбылская, Карагандинская, Костанайская, Кызылординская, Мангистауская, Павлодарская, Северо-Казахстанская, Туркестанская, Восточно-Казахстанская.

С целью анализа и оценки экологической обстановки производилась кластеризация областей по показателям экологической нагрузки на три класса:

1 – высокая экологическая нагрузка (области характеризуются высокими показателями загрязнения окружающей среды);

2 – средняя экологическая нагрузка (области характеризуются средними показателями загрязнения окружающей среды);

3 – низкая экологическая нагрузка (области характеризуются низкими показателями загрязнения окружающей среды).

Результат математической кластеризации областей Р. Казахстан по экологической нагрузке с помощью метода к-средних представлен в таблице 1. В расчетах использовались нормированные значения показателей.

Таблица 1 – Результаты математической кластеризации областей Р. Казахстан

№ п/п	Область	2017	2018	2019	2020
1	Акмолинская	2	2	2	2
2	Актюбинская	2	2	2	2
3	Алматинская	3	3	3	3
4	Атырауская	1	1	1	1
5	Западно-Казахстанская	3	2	3	3
6	Жамбылская	3	3	3	3
7	Карагандинская	1	1	1	1
8	Костанайская	2	2	2	2
9	Кызылординская	3	3	3	3
10	Мангистауская	2	2	2	2
11	Павлодарская	1	1	1	1
12	Северо-Казахстанская	2	2	2	2
13	Туркестанская	3	3	3	3
14	Восточно-Казахстанская	2	2	2	2
Итого	Класс 1	21%	21%	21%	21%
	Класс 2	43%	50%	43%	43%
	Класс 3	36%	29%	36%	36%

Таблица 1 показывает, что большинство областей относятся к классу со средним уровнем экологической ситуации (класс 2).

Для проверки достоверности математической кластеризации была проведена экспертная оценка качества кластеризации областей по уровню загрязнения за 2020 год по следующей методике:

1 – привлечение группы экспертов для классификации экологического состояния на 3 класса;

2 – анализ итоговых результатов экспертной классификации и проверка согласованности мнений экспертов по коэффициенту конкордации Кендала;

3 – визуальное сравнение математической и экспертной классификаций.

Результат экспертной кластеризации областей Р. Казахстан по экологической нагрузке представлен в таблице 2. В качестве четырех экспертов выступили преподаватели и сотрудники факультета естественных наук и технологий Восточно-Казахстанского университета им. Сарсена Аманжолова. Результаты экспертного опроса оказались согласованными по критерию сравнения коэффициента конкордации Кендала. Значимость коэффициента конкордации проверена с помощью критерия «хи-квадрат».

Таблица 2 – Результаты экспертной кластеризации областей Р. Казахстан

№ п/п	Область	Э1	Э2	Э3	Э4	Итог
1	Акмолинская	2	2	2	2	2
2	Актюбинская	2	1	2	2	2
3	Алматинская	3	3	2	3	3
4	Атырауская	1	1	2	1	1
5	Западно-Казахстанская	3	3	3	2	3
6	Жамбылская	3	3	2	3	3
7	Карагандинская	1	1	1	1	1
8	Костанайская	1	1	1	2	1
9	Кызылординская	3	3	3	3	3
10	Мангистауская	2	2	3	2	2
11	Павлодарская	1	1	1	1	1
12	Северо-Казахстанская	2	1	2	2	2
13	Туркестанская	3	3	3	3	3
14	Восточно-Казахстанская	2	2	2	2	2

Визуальное сравнение математической и экспертной классификаций представлено на рисунке 1.

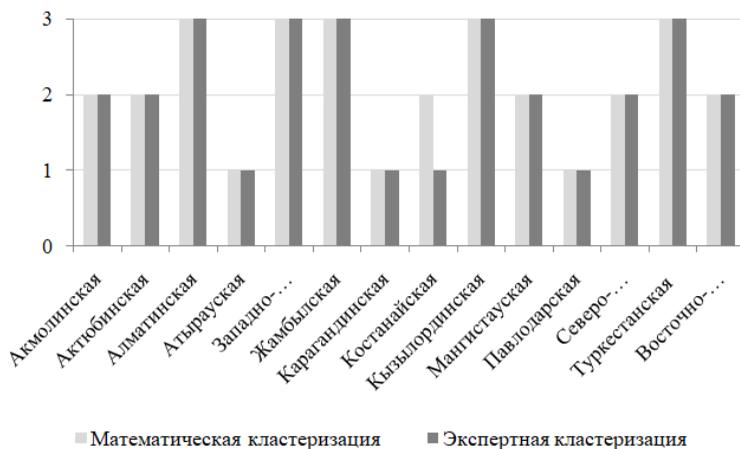


Рисунок 1 – Визуальное сравнение математической и экспертной классификаций

Видно, что количество совпадений составило 13 областей из 14 – 93%. Таким образом, математическая кластеризация может быть использована для оценки областей Р. Казахстан по степени экологической нагрузки.

В целом за период 2017–2020 гг. не наблюдается резкого ухудшения экологической ситуации в областях Р. Казахстан, находившихся в предыдущий год в классах со средней и низкой экологической нагрузкой, что говорит о стабильности поддержки мероприятий по сохранению окружающей среды.

Библиографический список

1. Обзорно-аналитический портал Strategy 2050. Решить экологические проблемы в регионах Казахстана помогут дорожные карты. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://strategy2050.kz/ru/news/reshit-ekologicheskie-problemy-v-regionakh-kazahstana-pomogut-dorozhnye-karty>/<https://strategy2050.kz/ru/news/reshit-ekologicheskie-problemy-v-regionakh-kazahstana-pomogut-dorozhnye-karty/>
2. Земнухова Е.А., Немов В.Ю. Экологическая оценка регионов на основе кластеризации территорий России по газификации и выбросам // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2019. – №5. – С. 190–198.
3. Черевать Д.В., Маничева А.С. Анализ динамики экологической ситуации в районах Алтайского края // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования: избранные

труды международной конференции, Барнаул, 14–17 ноября 2017 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 637–638.

4. Бюро национальной статистики Агентства по стратегическому планированию и реформам Республики Казахстан. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://stat.gov.kz/>

УДК 681.3

**Предварительная обработка
электрокардиографического сигнала для
дифференциальной диагностики сердечных патологий**

*Д.Ю. Козлов, С.А. Останин, Л.А. Баев, А.И. Безуглов,
Чуракова А.А.*

АлтГУ, г. Барнаул

В статье предложен ряд способов обработки и анализа электрокардиографических сигналов (ЭКС). Обработка сигнала включает в себя устранение дрейфа изолинии и компенсацию высокочастотного шума. Анализ подразумевает детекцию особых точек ЭКС и генерацию модельного искусственно-сгенерированного сигнала, который может представлять собой медицинский эталон по характеристикам положения и амплитуды особых временных точек. Впоследствии данный модельный сигнал накладывается на исходный и вычисляется среднеквадратическая ошибка, служащая оценкой качества наложения и определения степени отклонения от медицинской нормы.

Ключевые слова: *электрокардиосигнал, устранение помех электрокардиосигнала, устранение дрейфа изолинии, устранение высокочастотных помех электрокардиосигнала, модельный сигнал, особые точки электрокардиосигнала.*

На сегодняшний день одной из важнейших задач кардиологии является диагностика сердечно-сосудистых заболеваний. Поскольку ЭКГ является основным методом диагностики сердечных патологий, возникает необходимость в последовательных и эффективных этапах цифровой обработки и анализа электрокардиосигналов (ЭКС): сравнении исходного сигнала с модельным (приближенным к медицинской норме) и расчёте численных параметров variability сердечного ритма.

Для проведения дифференциальной диагностики сердечно-сосудистых заболеваний на основе кардиосигнала необходимо решить проблему фильтрации сигнала или устранения шумовых помех. Применяемые в современных электрокардиографах аналоговые фильтры позволяют получать красивые, “гладкие” электрокардиограммы, при этом искажая исходную форму

регистрируемого сигнала. В данной работе вместо аналоговой фильтрации применяются методы цифровой обработки ЭКС, чтобы избежать потери информативных участков ЭКГ. Нужно учитывать, что такие методы достаточно требовательны к вычислительным ресурсам машины, и поэтому их можно по-разному реализовывать, оптимизируя для конкретного случая.

Физиологию сердца характеризуют с помощью особых сегментов и точек кардиоцикла: P, Q, R, S, T

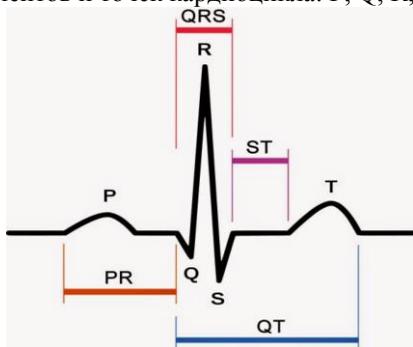


Рисунок 1 - Типичный кардиоцикл

Различные измерения, аналогичные тем, которые физиологи производят на электрокардиограмме, для фильтрованного сигнала удобно производить, сопоставляя с некоторым модельным эталоном, на котором целевые сегменты заранее определены. Имея такой эталон и производя над ним ряд масштабирующих преобразований, можно подогнать его довольно близко к зарегистрированному сигналу, сравнительно легко таким образом решая задачу определения положения особых точек кардиоцикла. При последующем анализе ЭКС уже могут быть вычислены различные численные параметры сердечного ритма, которые могут характеризовать ту или иную диагностическую картину или являться маркерами потенциальных факторов риска. Обобщая выше сказанное, далее необходимо рассмотреть 3 этапа обработки и анализа кардиосигнала: 1) устранение искажений ЭКС, 2) генерация модельного сигнала и его сопоставление с реальным кардиосигналом, 3) классификация сигнала с целью осуществления дифференциальной диагностики сердечно-сосудистых заболеваний.

В представленной работе использовались ЭКС из открытых интернет-источников, с частотой дискретизации 400 и 500 Гц.

Поскольку обработка ЭКС является первоочередным и важнейшим этапом перед последующим анализом сигналов, её задачей является необходимость снизить влияние на полезный сигнал высокочастотных и низкочастотных помех, которые могут быть вызваны разными обстоятельствами - движениями пациента, активностью мышц, влиянием дыхания и поляризацией электродов [1]. Основные цифровые методы удаления низкочастотной помехи (или дрейфа изолинии) предполагают его описание (аппроксимацию), и последующие вычитание из исходного сигнала. Методы, которые были выбраны и протестированы для описания дрейфа изолинии кардиосигнала - это разложение сигнала с использованием алгоритма STL для выделения трендовой составляющей (Рис 2) и медианный фильтр (Рис 3) [2].

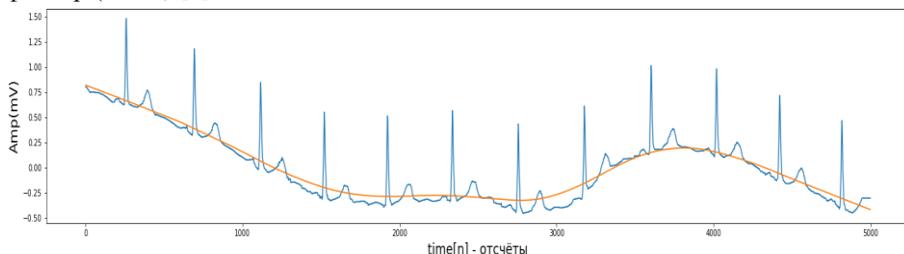


Рисунок 2 - Выделение трендовой составляющей сигнала с использованием STL (500 Гц).

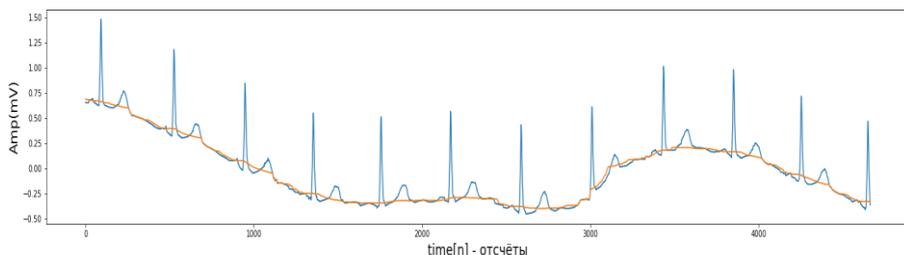


Рисунок 3 - Выделение тренда с помощью медианного фильтра (500 Гц).

Для оценки качества фильтрации сигнала данными методами от низкочастотной помехи вычислялась средняя абсолютная ошибка в процентах между исходным сигналом и искусственно зашумленным равномерно распределённым шумом с последующим использованием

методов устранения дрейфа изолинии. Были получены следующие оценки:

- Выделение тренда с использованием STL - 1.294 %
- Медианный фильтр - 1.050 %

Следует отметить, что после удаления дрейфа изолинии в сигнале остается высокочастотный шум. Очистка сигнала от шумовых помех производилась с помощью аппроксимации сигнала сплайном, сравнение сигнала до и после такой операции представлено на Рис. 4.

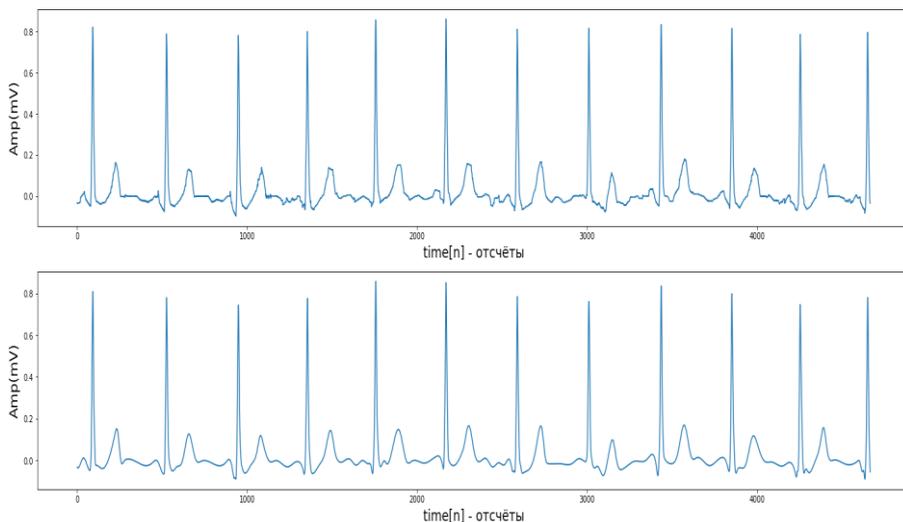


Рисунок 4 - Аппроксимации сигнала сплайном (500 Гц).

Помимо фильтрации сигнала, появляется потребность в выравнивании сигнала относительно нуля, т.е. сдвига значений амплитуды сигнала по оси ординат так, чтобы сегменты ST, TP были как можно ближе к 0 (изолинии). Данная операция производится путём вычисления процентного соотношения положительной составляющей амплитуды сигнала и приведение этого показателя к среднестатистическому значению электрокардиосигнала здорового человека. Для этого к отфильтрованному сигналу добавляется определённая константа и соотношение пересчитывается. При пересечении процентного порога среднестатистического значения, константа меняет свой знак и уменьшается в два раза. Операция повторяется до достижения погрешности в 0,1%.

После очистки ЭКС от различных видов шумов и артефактов, появляется возможность для более эффективной детекции особых точек и генерации по ним модельного сигнала.

В цифровой обработке и анализе электрокардиосигналов генерация модельного сигнала используется для сопоставления исходного сигнала [3] пациента с модельным для выявления различных отклонений от медицинской нормы. Модельный сигнал характеризуется отсутствием шумовых помех, ровной морфологией кардиосегментов на всех участках записи. Для построения такого рода сигналов производилось обнаружение особых точек P, Q, R, S, T амплитудно-пороговыми методами для R-пиков и вейвлет-преобразования для остальных волн P, Q, S, T на исходном специально отобранном наиболее типичном сигнале, соответствующем норме. Далее производился подсчет волн в относительных единицах (коэффициентов положения) внутри PP-интервала (от начала и до конца каждого кардиоцикла), после чего алгоритм строил модель на основе коэффициентов положения и усредненной амплитуды по всей записи ЭКС. Моделирование P и T- волны производилось с использованием сплайновой интерполяцией или распределением Вейбулла с параметрами λ и k , а фрагмент QRS-комплекса [4] представлялся в виде линейных функций, остальные участки изолинии отображались сегментами с нулевыми значениями. Качество наложения оценивалось среднеквадратической ошибкой (СКО).

Общий порядок работы алгоритма моделирования кардиосигнала:

1. Обнаружение особых точек PQRST в отобранном фильтрованном ЭКС (Рис.5)

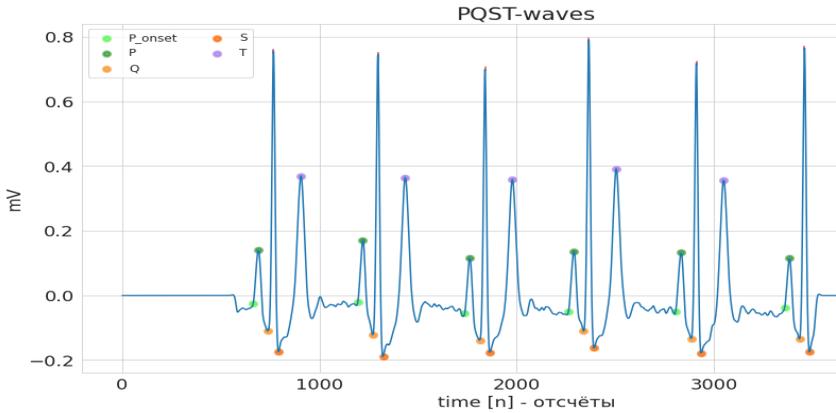


Рисунок 5 - Детекция P, Q, S, T точек (400Гц)

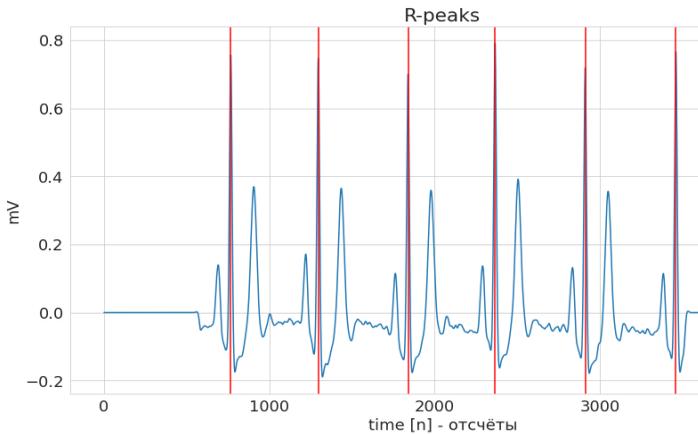


Рисунок 6 - Детекция R-пику (400Гц)

2. Моделирование. P, T-волны представлены слайдами со степенью 3 или распределением Вейбулла (рис. 7).

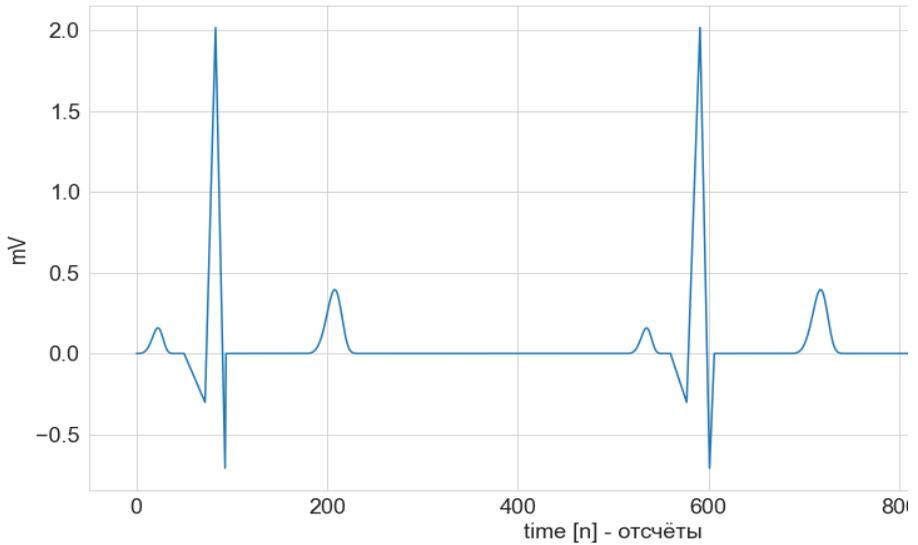


Рисунок 7 - Модельный сигнал (400Гц)

3. Наложение модельного сигнала на исходный (Рис. 8)

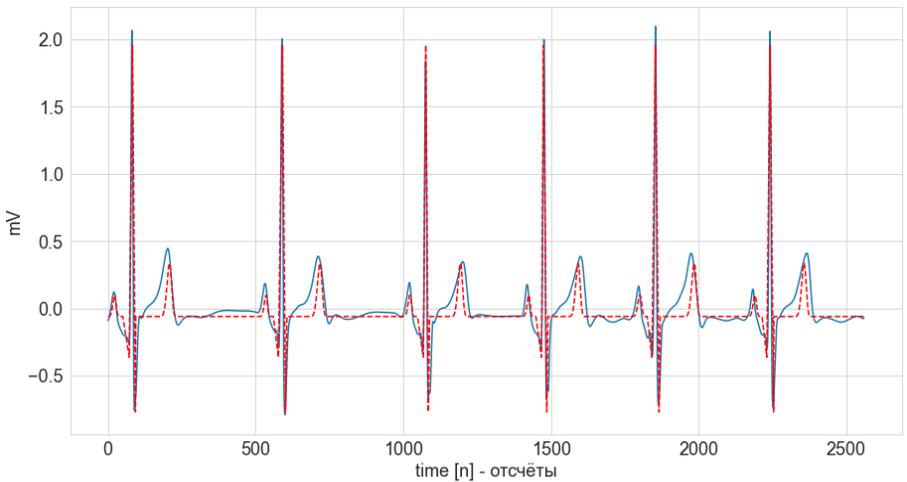


Рисунок 8 - Наложение модельного сигнала (400 Гц)

По итогу проведенной обработки ЭКС были проделаны этапы устранения помех кардиосигнала, в частности дрейфа изолинии и

высокочастотных помех, дополнительно производилось выравнивание сигнала относительно изолинии. Также реализованы методы обнаружения особых точек ЭКС и построения модельного кардиосигнала с их последующим сопоставлением.

Библиографический список

1. Кубланов В.С., Долганов А.Ю, Костоусов В.Б., Немирко А.П., Манило Л.А, Петренко Т.С., Н. Gamboa, J. Rodrigues Биомедицинские сигналы и изображения в цифровом здравоохранении: хранение, обработка и анализ // Учебное пособие. Издательство Уральского университета, 2020

2. П.А. Блинов, А.А. Михеев. Анализ методов компенсации дрейфа изолинии электрокардиосигнала //Вестник РГРТУ. № 4, 2009

3. Рангайян Р. М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход // Физматлит, 2010

4. Джон Хэмптон: Основы ЭКГ // Медицинская литература, 2007

5. Баевский, Р. М., Иванов, Г. Г., Чирейкин, Л. В., Гаврилушкин, А. П., Довгалевский, П. Я., Кукушкин, Ю. А., Миронова, Т. Ф., Прилуцкий, Д. А., Семенов, А. В., Федоров, В. Ф., Флейшман, А. Н., Медведев, М. М. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем //Вестник аритмологии, № 24, 2001

6. В.В. Мурашко, А.В. Струтынский
ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЯ, 2007 – 246 с.

Разработка сервиса для регистрации электронных сделок с недвижимостью в новостройках

В.С. Коростелев, О.Н. Половикова

АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассмотрена концепция и текущие результаты разработки информационного сервиса, ориентированного на развитие электронного варианта заключения сделок с недвижимостью.

Ключевые слова: *электронная сделка, электронная подпись, недвижимость, информационные технологии.*

На сегодняшний день цифровые сервисы активно используются в различных сферах жизни. Эти системы служат для управления продажами, финансами, логистикой, т.е. ориентированы на оптимизацию разных процессов. Цифровизация не обошла стороной и сферу недвижимости, где главным problemой стало долгое время заключения договоров купли-продажи. Для решения данной проблемы разрабатываются сервисы по оформлению электронных сделок.

Данные сервисы направлены на развитие рынка недвижимости, позволяют организовать здоровую конкуренцию, а вследствие этого оптимизировать процессы оформления электронных сделок. В итоге такой подход позволит внедрить оформление электронных сделок и в другие сферы нашей жизни.

В данный момент лидерами отрасли среди стран СНГ являются компании: ДомКлик, КонтурРеестро, сделка.рф. Среди множества сервисов продукты этих компаний обладают наиболее привлекательным интерфейсом и технологическими возможностями по заключению различных видов электронных сделок. Обязательным аспектом проектирования сервиса по совершению сделок с недвижимостью является возможности взаимодействия с системой Росреестра. Также есть необходимость в дистанционном подписании документов. Данная проблема решается электронной подписью, которая заранее выпускается для каждой из заинтересованных сторон. Однако существующие сервисы имеют существенные недостатки для бизнеса:

- отсутствию взаимодействия с распространенными системами управления контентом (CRM-системы);

- отсутствие взаимодействия с сертифицированными застройщиками.

Для решения данных недостатков было решено разработать сервис для заключения электронных сделок.

Перед реализацией любого информационного сервиса в наше время недостаточно одной идеи, требуется технический и архитектурный план развития проекта. С развитием цифрового рынка появилось множество способов и методов решения поставленной задачи, что позволит подобрать эффективное решение для будущего сервиса. Ниже на рисунке 1 представлена схема взаимодействия всех частей будущего приложения.

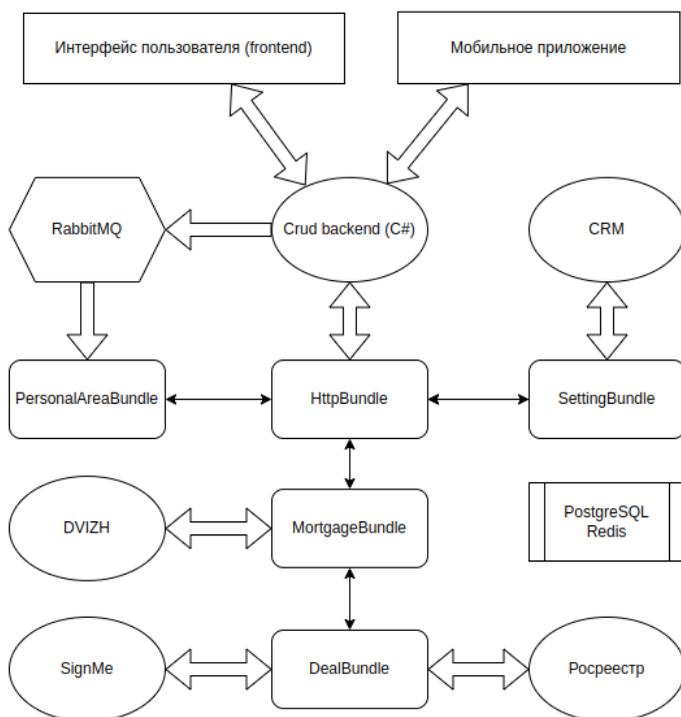


Рисунок 1 – Архитектура сервиса по обслуживанию электронных сделок

Данная система разрабатывается на основе docker-контейнеров для ускорения развертывания приложения и возможности использовать разнообразные бэкенд технологии в каждом из них. Функционал системы позволит существенно ускорить процесс оформления сделок с недвижимостью, а также увеличит продажи благодаря клиентской части приложения.

Библиографический список

1. И. Корсун: Онлайн-продажи квартир [Электронный ресурс] – URL: <https://blog.profitbase.ru/lichnyi-kabinet-pokupatielia-onlain-prodazhi-kvartir-s-profitbase/>
2. Какие операции с недвижимостью можно проводить онлайн [Электронный ресурс] – URL: <https://realty.rbc.ru/news/5e7318ec9a7947944dbdb756>
3. Что такое Docker: для чего он нужен и где используется [Электронный ресурс] – URL: <https://selectel.ru/blog/what-is-docker/>

Диагностика стоматологических заболеваний у детей с помощью современных компьютерных технологий

Н.В. Крупский¹, А.И. Пиянзин^{1,2}

¹*АГМУ, г. Барнаул;*

²*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию возможности использования современных компьютерных технологий для диагностики стоматологических заболеваний у детей

Ключевые слова: *дети, машинное обучение, стоматология.*

Актуальность работы заключается в том, что в настоящее время имеется высокая стоматологическая заболеваемость детского населения, определяется редким проведением осмотра зубным врачом детей [1]. При осмотре применяется визуальное исследование с помощью стоматологического зеркала [2]. Такой подход не позволяет иметь базу данных изображений и проводить их точную количественную и качественную оценку, своевременную индивидуальную диагностику и создать программу профилактики [7]. Для решения вышеуказанных проблем необходимо у детей проводить более частые осмотры с использованием видеокамер и современных компьютерных технологий.

Учитывая вышеуказанное, целью исследования является улучшение диагностики стоматологических болезней детского возраста путем применения новых компьютерных технологий.

Задачи данной статьи: подбор видеокамеры, которая даст возможность получить изображения полости рта у детей, создание базы данных и системы управления базами данных, с помощью технологий машинного обучения провести анализ полученных изображений, оценить качество полученных результатов.

Нами после подбора были использована интраоральная камера - Advance CAM WS-621. Компания: Guangzhou Weisheng Technology Co., Ltd. С целью импортозамещения были созданы аналогичные программы для следующих аппаратов: Qraucam, Qraupen, Qrayview и Qscan plus.

Был проведен осмотр 750 детей различного возраста, в основном в организованных детских коллективах [3]. Дополнительно определялись различные стоматологические индексы: площадь,

пораженную зубным налетом, интенсивность кариозных поражений, степень воспаления тканей, индекс необходимости лечения болезней пародонта и другие параметры [4].

Использовался высокоуровневый язык программирования Python [5], Postgre SQL[6] и СУБД Postgres Pro [7]. Сравнение и оценка качества проведены с помощью следующих метрик: точность, полнота и F-мера. Результаты исследования показали необходимость увеличения выборки в некоторых возрастных группах.

Таким образом следует отметить, что предложенный нами программно-аппаратный комплекс стоматологического осмотра детей позволяет значительно улучшить диагностику заболеваний полости рта.

Библиографический список

1. Uribe SE, Innes N, Maldupa I., The global prevalence of early childhood caries: A systematic review with meta-analysis using the WHO diagnostic criteria. //Int J Paediatr Dent. 2021 Nov;31(6):pp 817-830.

2. Dale CLT, Smorthit K, Storey M, Srinivasan V., The importance of the Basic Periodontal Examination for paediatric orthodontic patients. //Br Dent J. 2021 Aug;231(3):pp 163-168.

3. Bakhtinur Khudanov, Hoi In Jung, Dono Kahharova., Effect of an oral health education program based on the use of quantitative light-induced fluorescence technology in Uzbekistan adolescents //Photodiagnosis Photodyn Ther 2018 Mar;21:379-384.

4. Song Hee Oh, Jin-Young Choi, Seong-Hun Kim., Evaluation of dental caries detection with quantitative light-induced fluorescence in comparison to different field of view devices //Sci Rep. 2022 Apr 12;12(1):6139.

5. Рашка С. Python и машинное обучение. -ДМК прес, 2017. -418 с.
Мамедов, Ад. А. Стоматология детского возраста : учебное пособие / под ред. Мамедова Ад. А., Геппе Н. А. - Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2020. - 184 с.

6. PostgreSQL изнутри. - М.: ДМК Пресс, 2022.- 660 с.

7. Основы технологий баз данных: учеб. пособие / Б. А. Новиков, Е. А. Горшкова; под ред. Е. В. Рогова. — М.: ДМК Пресс, 2019. — 240 с.

Математическая модель стимулирования персонала при эксплуатации промышленного оборудования

Д. Т. Куружбаева

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье рассматривается компьютерная реализация математической модели оптимизации материального стимулирования ремонтной бригады, которая обеспечивает работоспособность оборудования промышленного цеха. Разработана методика применения математических и компьютерных средств в условиях реального промышленного предприятия на территории Республики Казахстан.

Ключевые слова: *процессы эксплуатации промышленного оборудования, математическая модель стимулирования работников, компьютерная модель, экономические показатели промышленных предприятий.*

Рассматривается применение математической модели стимулирования команды работников в трудовых процессах, а также компьютерной программы в среде Excel для обоснования оптимальных параметров стимулирования работников при обслуживании промышленного оборудования.

Основные принципы организации оплаты труда в условиях рыночной экономики заключаются в следующем: соответствие меры труда его оплате; материальная заинтересованность работников в достижении высоких конечных результатов труда; самостоятельность предприятий в установлении размеров заработной платы работников, в применении различных форм и систем оплаты труда; сочетание интересов стимулирования трудового вклада и интересов собственников; оптимальная периодичность выплат заработной платы; стимулирование производительности труда и рациональное использование ресурсов; оптимальное сочетание мер материального и морального стимулирования.

Для выполнения приведенных принципов управления персоналом в организациях можно использовать основные понятия, концептуальные основы, методы, инструменты бережливого производства, которые описаны в работах российских и зарубежных ученых [1, 2]. В литературе описаны возможности применения принципов бережливого производства в процессе построения системы

менеджмента, при технологической подготовке производства, при организации материально-технического снабжения, при работе с персоналом и активизации его возможностей [2].

Математическое моделирование поведения работников в трудовых процессах описано в работах [3, 4]. В нашем случае стимулирования персонала по результатам производственной деятельности математическая модель имеет следующий вид. Пусть x – мотивированное решение работника по уровню активности, а \bar{x} – предельный уровень объема работ, который работник способен выполнить в среднем в течении рабочего дня. Тогда справедливо включение $x \in [0, \bar{x}]$. В условиях сдельной системы оплата единицы объема работы определяется расценкой (переменная $p \geq 0$).

В работе [3] обоснована зависимость оптимальной активности работника от ставки оплаты труда $x = \tilde{x}(p)$ в виде следующего выражения:

$$x = \tilde{x}(p) = \begin{cases} \bar{x} - \frac{\delta}{p}, & \text{если } p > p_{\min} = \frac{\delta}{\bar{x}}; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

где δ, \bar{x} – параметры функции активного поведения работника, которые следует определить при условии: $\delta > 0$; $\bar{x} > 0$.

Рассмотрим математическую модель обоснования оптимального решения собственников фирмы по стимулированию работников. Обозначим через

$$D_{\phi}(x) = C x^m, \quad C > 0; \quad m \in [0, 1] \quad (2)$$

зависимость среднедневной валовой прибыли предприятия, полученной за счет активности стимулируемого работника.

Дополнительная валовая прибыль $D_{\phi}(x)$ разделяется на чистую прибыль собственника предприятия D_c и оплату труда стимулируемых работников D_b :

$$D_c(x) = (1 - \sigma) C x^m; \quad D_b(x) = \sigma C x^m. \quad (3)$$

Задача выбора оптимального значения σ^* запишем в следующем виде. Найти $\sigma^* \in [0, 1]$ – долю деления, при которой доход собственника является максимальным:

$$D_c(x) = \max_{\sigma} (1 - \sigma) C x^m. \quad (4)$$

В работе [3] показано, что при фиксированной величине σ расценка и уровень активности работников определяются из следующего уравнения: $p \tilde{x}(p) = \sigma C \tilde{x}(p)^m$, решение которого необходимо учитывать как дополнительное условие задачи (4).

Приведенная математическая модель оптимального стимулирования позволили обосновать методику и этапы разработки и

внедрения премиальной системы для конкретного промышленного предприятия:

1. С привлечением специалистов предприятия оцениваем возможности ускорения ремонта или переналадки оборудования и сокращения простоев производства в натуральных и стоимостных показателях.

2. Рассчитываем с использованием математической модели потенциал трудовой активности бригады и зависимость активности от размеров премии.

3. Рассчитываем зависимость прибыли предприятия от трудовой активности эксплуатационной бригады при сокращении простоев.

4. Определяем оптимальную долю прибыли бригаде в качестве премии, при которой прибыль предприятия максимальна.

5. Предлагаем порядок заключения премиального договора и его исполнения на практике, в условиях организации оплаты труда конкретного предприятия.

Базовым объектом внедрения для апробации методики выступил колбасный цех одного из предприятий Казахстана. Обследование работы цеха проведено в марте 2022 года.

При обследовании цеха выяснялись следующие показатели:

1. Состав основного оборудования цеха и его влияние на возможные простои цеха в рабочий период времени.

2. Возможности сокращения времени на восстановление работоспособности оборудования с учетом квалификации работников и численности эксплуатационной бригады.

3. Экономические показатели снижения прибыли предприятия из-за простоев цеха.

4. Готовность администрации предприятия заключить с ремонтной бригадой дополнительное соглашение о ее премировании в зависимости от сокращения времени на восстановление работоспособности оборудования.

Для выполнения первого этапа методики проведена беседа с технологом цеха. Результатом этого обследования цеха стала таблица 1.

Таблица 1– Основное оборудование колбасного цеха и его влияние на средние простои цеха в процессе эксплуатации

№ п/п	Оборудование цеха	Простой, мин.	Сколько obsługi?	Влияние на простой	Ускорить ремонт?
1	Шприц (2)	20	1	Есть	Да
2	Кутгер	20	2	Есть	Да
3	Волчок	20	2	Есть	Да
4	Пресс (3)	15	2	Есть	Да

5	Ињектор	20	2	Нет	Нет
6	Ледогенератор	30	1	Нет	Нет
7	Термокамеры (3)	15	2	Есть	Да

По пунктам 2 и 3 методики обследования предприятия оценено, что бригада может сократить время ремонта критического оборудования, что приведет к сокращению простоев колбасного цеха и, соответственно, уменьшить потери прибыли предприятия. Расчеты этих параметров выполнены с привлечением специалистов предприятия и цеха и приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Оценка прибыли предприятия от стимулирования бригады

№	Результат бригады за рабочий день	Знак	Оценки
1	Потенциал чистой прибыли, тыс. тенге	R	200,0
2	Реальная чистая прибыль, тыс. тенге	Rн	175,0
3	Оценка простоев, мин	ДРмин	60

Численные расчеты параметров системы стимулирования согласно выражениям (1) – (4) проведены в среде Excel с учетом квалификации работников, их валентности, интенсивности трудовой деятельности и получены оптимальные параметры системы стимулирования. Показано, что оптимальное значение доли прибыли, направляемой на стимулирование бригады, составляет около 5 процентов.

Рассмотрим оценку результатов стимулирования эксплуатационной (ремонтной) бригады с учетом реальной информированности работников, руководителей колбасного цеха (начальника, технолога, экономиста). Считаем, что экономические показатели системы стимулирования (таблица 2) рассчитываются специалистами предприятия в целом.

С бригадой численность 2 работника, занятых обслуживанием оборудования, и руководством цеха предлагается согласовать базовую продолжительность ремонтных работ (в расчетах 120 минут) и минимальную по времени продолжительности простоев цеха (оценка 30 минут). Согласовывается размер премии за сокращение простоев в одну минуту за смену, рассчитанная как средняя за месяц. Размер этой премии определен, в нашем случае равным 110 тенге/мин.

Исходные данные для премиального договора и контроля над его исполнением приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Показатели премиального договора ремонтной бригады

№	Показатели ремонтной бригады за рабочую смену	Оценки
1	Максимально устранимые простои цеха, минуты	90,0
	Размер премии при снижении потерь, тенге/минута	110

2	Контрольные сроки ремонта машин в смену, макс.	120
3	Контрольные сроки ремонта машин в смену, мин	30
4	Оценка оптимально устранимых потерь, минут/смена	75
5	Расчетная премия бригады в месяц, тыс. тенге	165

Следует отметить, что показатели в таблице 3 не совпадают точно с показателями математической и компьютерной моделей. Для прикладных специалистов нет необходимости при начислении премии оценивать объем трудозатрат работников бригады и определять фактический объем выполненной бригадой дополнительной работы в часовых нормах труда, а также оценивать параметры в выражениях (1) – (4). Указанная рекомендация при внедрении принципов бережливого производства детально обоснована в работе [5].

Кроме того, руководителям колбасного цеха и работникам не нужно знать экономические показатели потери прибыли от простоев рабочих машин и, следовательно, у них нет информации для сомнений в справедливости или несправедливости для рыночных условий внедренной премиальной системы стимулирования труда.

Библиографический список

1. Nikkan Kogyo Shinbunsha. The Toyota Production System – An Industrial Engineering Study. Tokyo: Factory Management, 1979.
2. Зинчик Н.С., Кадырова О.В., Растова Ю.И. Бережливое производство: учебник / Под общ. ред. Бездудной А.Г. – М.: Кнорус, 2021.
3. Булатова Г.А., Маничева А.С., Оскорбин Н.М. Методы и математические модели управления персоналом : учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 108 с.
4. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Идентификация активных систем / Труды международной конференции «Идентификация систем и процессы управления». – М.: ИПУ РАН, 2000. – 235 с.
5. ГОСТ Р 56404-2015 «Бережливое производство. Требования к системам менеджмента».

Компьютерные игры в обучении студентов медицинских учебных заведений

Е.В. Лукавский², А.И. Пиянзин^{1,2}

¹АГМУ, г. Барнаул;

²АлтГУ, г. Барнаул

В статье раскрывается проблема улучшения эффективности образовательной деятельности в медицинских учебных заведениях за счёт использования обучающе-контролирующих компьютерных игр, основанных на анализе и обработке данных и использовании запланированных сценариев и вариативности алгоритмов. Используя в процессе обучения компьютерные игры, студент получает навыки и знания, а также возможность проверить их, при этом сведя риски к минимуму.

Ключевые слова: компьютерные игры, обучение, информационные технологии, искусственный интеллект, среда проектирования игр Unity, алгоритмы и обработка данных.

Компьютерные игры преследуют не только цель развлечения пользователей — с помощью компьютерных игр студент может развивать такие важные навыки, как логическое мышление, остроту восприятия, скорость реакции и многие другие качества, так важные для медицинских профессий.

Целью данной статьи является выбор наиболее подходящей обучающе-контролирующей компьютерной игры, которую можно было бы использовать в образовательной программе подготовки будущих медицинских работников. Анализ рынка компьютерных игр показал: найти игры по медицинской тематике не сложно — достаточно открыть браузер и написать в строке поиска «игры медицина». Однако, далеко не все из этих игр подходят для использования в обучении студентов медицинских учебных заведений. Рассмотрим их.

«Hand Doctor» [1] - симулятор травматолога, занимающегося травмами рук. Игрок выбирает пациента с травмами различной тяжести и начинает обработку и лечение ран. Из достоинств игры можно подчеркнуть возможность запуска через браузер с телефона, компьютера или планшета, а также простой и понятный интерфейс. К

недостаткам игры относятся невозможность сделать ошибку — игра просто не позволит вам навредить пациенту, излишняя простота, ибо игра ориентирована обычного обывателя, а не студента-медика, и необходимость подключения к интернету.

«Bieber Dentist» [2] - ещё один симулятор, но на этот раз — стоматолога. Игра тоже «браузерная» и запускается на любых компьютерах и телефонах с выходом в интернет. Однако, эта игра тоже не позволяет совершить ошибку, например, удалить здоровый зуб вместо больного. Судя по описанию игры, она рассчитана на пользователей 6 лет и старше, что опять приводит к излишней простоте, и снова для работы приложения нужен доступ к интернету.

«Prognosis: Your Diagnosis» [3]: данное мобильное приложение представляет собой игру, состоящую из ряда клинических случаев, которые составлены для оттачивания и расширения знаний в медицинской сфере. Игра содержит 1500 сценариев, охватывающих более 30 медицинских специальностей, что позволяет проверить навыки студентов в принятии решений без риска для жизни пациента. Из минусов игры – то, что она для смартфонов, а значит, без специальных программ на компьютере такую игру не запустить, и отсутствие русской версии приложения.

«Speed Anatomy Quiz Free» [4]: это игра-викторина по анатомии, которая будет полезна для любого студента медицинского учебного заведения. По сути, это карманный тест на теоретические знания по анатомии, к которому можно обратиться в любое время и проверить себя. Недостатки: игра позволяет оценить только теоретические знания, но не практические навыки; отсутствие русской версии.

«Operate Now: Hospital» [5]: игра представляет собой медицинское приключение. Задача игрока – сформировать команду высококвалифицированных медиков, чтобы проводить операции на пациентах, и добиться, чтобы его медицинское учреждение стало ведущим в мире. Игра уже больше похожа на симулятор бизнеса в медицине, чем на симулятор врача, однако совсем бесполезной для будущих врачей ее назвать нельзя. Отсутствует русская версия.

Мы выявили, что одним играм требуется подключение к интернету для работы, другие игры работают только на телефонах. Большинство игр ориентированы на среднестатистического пользователя, отчего содержание игр не сильно углубляется в терминологию или теоретические тонкости медицины. Практически все игры были созданы за рубежом, и те, что были бы наиболее полезны именно

студентам медицинских учебных заведений, зачастую не имеют перевода на русский язык в виду того, что игра не набрала достаточную популярность для выхода на международный рынок.

Проанализировав вышеописанные приложения, мы пришли к выводу, что в играх, в основном, используются наборы сценариев и алгоритмов, прописанных человеком. Лишь в полноценных симуляторах с полным погружением может идти речь о машинном обучении и нейросетях, благодаря которым сама игра моделирует ситуации для проверки знаний и навыков студентов-медиков. Большая часть обучающих игр представляет собой наборы строгих сценариев, и успех достигается только в том случае, если студент выполняет строгий алгоритм действий. Иногда допускается вариативность в выборе последовательности действий, если порядок этих действий не важен, однако если нарушен порядок действий, который строго определён — задача игрока, а в нашем случае — студента, считается проваленной.

Главная общая черта у всех рассмотренных игр — это то, что все они были созданы в одной среде разработки приложений Unity. Это связано с тем, что на Unity можно создать приложение для множества устройств, будь то смартфоны, компьютеры или игровые приставки. В данный момент, на Unity написано большое количество игр.

К достоинствам [6] Unity можно отнести наличие виртуальной среды обработки, межплатформенную поддержку и модульную систему компонентов — объекты в Unity создаются посредством объединения функциональных блоков, а не помещения в узлы дерева наследования. Такой подход облегчает создание прототипов, что актуально при разработке игр. Недостатки [7] у данной платформы тоже имеются. К ним можно отнести ограничения визуального редактора при работе с многокомпонентными схемами, отсутствие поддержки Unity ссылок на внешние библиотеки, из-за чего программистам приходится настраивать их самостоятельно, и использование шаблонов экземпляров, что хоть и предлагает гибкий подход визуального редактирования объектов, но не отменяет трудности в редактировании таких шаблонов. Также, WebGL-версия платформы, в силу специфики своей архитектуры (трансляция кода из C# в C++ и далее в JavaScript), имеет ряд нерешённых проблем с производительностью, потреблением памяти и работоспособностью на мобильных устройствах.

Таким образом, на рынке имеется малое количество качественных обучающе-контролирующих игр, которые можно использовать для обучения студентов-медиков, и каждая из них имеет свои недостатки. Поэтому мы решили написать свое приложение, которое, на наш взгляд, оптимально подойдет преследуемой нами цели.

Взятая нами в разработку игра для студентов медицинских учебных заведений представляет собой мобильное приложение, целью которого является диагностика и лечение сахарного диабета 1 и 2 типа. Сценарий игры заключается в том, что игроку (студенту) предстоит найти поджелудочную железу пациента, повреждённые структуры органа, изучить симптомы и на их основе поставить диагноз и приступить к лечению. Приложение представляет собой 2D-игру, созданную в межплатформенной среде разработки Unity. На стадии релиза приложения, у студентов медицинских учебных заведений появится уникальная возможность проверить свои знания и навыки без риска для реальных пациентов и приобрести понимание развития патологического процесса этого заболевания.

Библиографический список

1. JulGames “Hand Doctor”: [Электронный ресурс]. URL: https://yandex.ru/games/?utm_source=yamain&utm_medium=allservices&utm_campaign=general_ru_desktop_no_all&query=%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0&ap_p=97572 (Дата обращения: 11.06.2022).
2. Casual AGames “Bieber Dentist”: [Электронный ресурс]. URL: https://yandex.ru/games/?utm_source=yamain&utm_medium=allservices&utm_campaign=general_ru_desktop_no_all&query=%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0&ap_p=169391 (Дата обращения: 09.06.2022)
3. Medical Joyworks LLC Prognosis : Your Diagnosis: [Электронный ресурс]. URL: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.medicaljoyworks.prognosis&hl=ru&gl=US> (Дата обращения: 07.06.2022)
4. Benoit Essiambre Speed Anatomy Quiz Free: [Электронный ресурс]. URL: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.speedAnatomy.speedAnatomyLite&hl=en_US&gl=US (Дата обращения: 07.06.2022)
5. Spil Games Operate Now Hospital – Surgery: [Электронный ресурс]. URL: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.spilgames.OperateNow2&hl=ru&gl=US> (Дата обращения: 07.06.2022)

6. Хокинг, Дж. Unity в действии. Межплатформенная разработка на C#, ООО Издательство «Питер», 2019, 352 с., с. 17-19
7. Хокинг, Дж. Unity в действии. Межплатформенная разработка на C#, ООО Издательство «Питер», 2019, 352 с., с. 19-20

Автоматизированные системы диагностики и контроля магистральных нефтепроводов

Ж.Ж. Молдашева¹, В.И. Гончаров², Б.Б. Оразбаев¹

¹*Евразийский национальный университет имени Л.*

Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан; ²Томский национальный политехнический университет, г. Томск, Россия.

Исследованы вопросы диагностики работы технологических объектов магистрального нефтепровода и управления режимами их работы с использованием автоматизированных систем. Изучены системы и методы диагностики и определения утечек нефти из магистральных нефтепроводов. Описан способ дистанционного обнаружения утечки нефти из магистральных нефтепроводов. Описаны SCADA-системы, позволяющие отслеживать изменения всех технологических параметров перекачки в реальном режиме. Формализована и получена математическая постановка задачи управления режимами работы технологических объектов магистрального нефтепровода в условиях нечеткости некоторой части исходной информации. На основе модификации идеи принципа главного критерия был разработан эвристический метод эффективного решения полученной нечеткой задачи.

Ключевые слова: *математические модели; оптимизация; многокритериальный выбор; магистральные нефтепроводы; станция подогрева нефти; нечеткая информация; лицо, принимающее решение;*

Магистральные нефтепроводы представляют собой сложные гидравлические, высокомеханизированные и автоматизированные системы, которые распределены на довольно большие расстояния. Такие нефтепроводные системы оснащены мощными насосными станциями для перекачки нефти и имеют линейную часть, а также средства технологической связи, телемеханики и автоматика, противопожарные устройства [1, 2]. Следует отметить, что станции подогрева обязательны для «горячих» нефтепроводов, предназначенных для перекачки высоковязкой, т.е. высокопарафинистой нефти [3]. Основные элементы системы нефтепровода, т.е. технологические узлы нефтепровода, показаны на

рисунке ниже (рисунок 1). В настоящее время в нефтеперекачивающей отрасли вопросы диагностики магистральных нефтепроводов и эффективного управления процессами транспортировки нефти по трубопроводам с минимизацией воздействия основных технологических объектов нефтепровода на окружающую среду являются актуальными проблемами науки и техники [4-6].

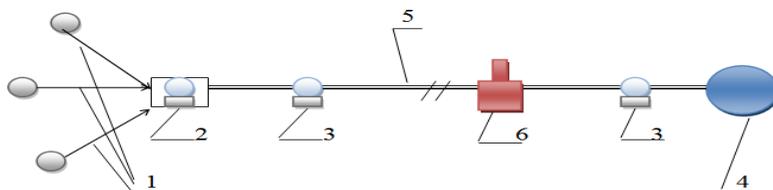


Рисунок 1. Технологические объекты магистрального нефтепровода. 1 – подводящие трубопроводы, соединяющие источники нефти с головными сооружениями трубопровода; 2 – головная станция перекачки нефти; 3 – промежуточные станции перекачки нефти; 4 – конечные пункты приема нефти; 5 – линейная часть трубопровода, т.е. сам трубопровод; 6 – станции подогрева нефти.

Целью данной работы является исследование автоматизированных систем диагностики состояния технологических объектов магистрального нефтепровода и управления процессами транспортировки нефти по трубопроводам. Также в работе будет сформулирована задача управления режимами работы основных объектов нефтепровода в нечеткой среде и предложен метод ее решения, основанный на эвристическом подходе.

1. Диагностика технологических объектов магистральных нефтепроводов и эффективное управление режимами их работы в нечеткой среде

1.1. Системы диагностики и управления объектами транспортировки нефти по магистральным нефтепроводам

Качество системы диагностики и автоматизированных систем управления (АСУ) зависит от метрологических качеств средств измерений, от статистических и динамических свойств средств контроля и измерительных механизмов. В общем случае состояние объекта определяется выходными параметрами – Y , которые, в свою очередь, определяются из значения входных параметров X и управляющих воздействий U . Внешние, отклоняющиеся воздействия F

отрицательно влияют на процесс управления объектом. Управляющие воздействия U , направлены на компенсацию связей, т.е. отклонений, вызванных F .

В автоматизированных системах управления магистральными нефтепроводами давление жидкости или изменение выходного значения, например, производительности, часто используются в качестве управляющих воздействий U . В качестве основного средства получения информации, поступающей в АСУ, т.е. для измерения значений X , Y и U , используются чувствительные устройства, а именно измерительные приборы и информационно-измерительные системы. В состав современных автоматизированных систем управления входят системы диагностики и прогнозирования.

В настоящее время технологические объекты оснащены различными устройствами, обеспечивающими своевременное обнаружение нарушения происходящих в них процессов. В работе [7] рассмотрена система диагностики и определения утечек нефти из магистральных трубопроводов. Эта диагностическая система основана на следующем принципе: на границах наблюдаемых областей регистрируется вакуумная волна, которая возникает при возникновении утечки. Это обеспечивает высокую чувствительность метода (1,5–3% $Q_{ном}$) и низкую погрешность определения местоположения утечки. Этот метод требует постоянного контроля давления. Когда этот метод используется в условиях прерывистости потока в трубе, сигнал практически полностью изолируется в гравитационном участке и исключается возможность его регистрации. А наличие посторонних предметов в трубе, врезок или крутых поворотов генерирует отраженные волны, которые искажают фронт ударной волны, что также снижает процент регистраций.

Предложен способ мониторинга, основанный на 2-уровневой схеме обмена данными посредством интеллектуального устройства с возможностью самонастройки под специфику контролируемого объекта. Его использование позволяет снизить количество ложных срабатываний системы управления процессом перекачки, повысить корректность передачи и оперативность обработки информации за счет минимального количества используемых технических средств. Таким образом, известные способы мониторинга систем обнаружения утечек основаны на сравнении контролируемых параметров перекачки и расчетных, которые получены путем моделирования процесса в режиме реального времени. Соответственно, достоверность выводов о наличии утечки во многом зависит от используемых моделей трубопроводов.

Известен способ дистанционного обнаружения утечек нефти из магистральных нефтепроводов [8]. Этот способ включает аэрофотосъемку теплового поля трассы трубопровода, определение пороговых значений яркости, определение местоположения локальных участков с аномальной температурой. В этом способе местоположение утечки определяют по местоположению области с аномальной температурой, для которой логарифм относительной яркости изображения для первой длины волны отличается от среднего значения для всей контролируемой области на заранее определенное пороговое значение, а логарифмы относительной яркости изображения для три волны составляют пропорцию $(1 \pm 0,2):(1,4 \pm 0,2):(1,2 \pm 0,2)$.

Способ управления величиной давления жидкости заключается в том, что с одного конца трубопровода возбуждается поверхностная электромагнитная волна, а ее интенсивность регистрируется в конечной точке. По резкому изменению интенсивности можно судить о нарушении непрерывности транспортируемого продукта, о том, что в нем образовалось газовоздушное скопление или другое постороннее включение. В этом методе на основе временных показателей определяется местоположение и объем инородного тела. Однако этот метод дает значительные погрешности из-за неоднозначности характеристик объекта: изменения режима и формы потока жидкости.

Если распространение волн высокого давления имеет значительную крутизну и амплитуды, превышающие расчетные значения, то рекомендуется применять системы защиты от разрыва трубопровода. Принцип действия системы защиты заключается в том, что при отключении любой промежуточной станции электрический сигнал передается на предыдущую станцию по каналу связи, при этом настройка давления нагнетания снижается. В результате волна снижения давления направляется навстречу волне повышения давления, и в промежуточных точках маршрута давление не превышает максимально допустимого. Недостатком усовершенствованной системы защиты сигнала является зависимость от надежности канала связи. Кроме того, только половина площади, прилегающей к предыдущей со стороны разгрузки станции, попадает в зону защитного покрытия. Группа компаний IMS разработала и внедрила системы сглаживания волн давления, а также системы защиты от гидроударов, которые значительно повышают пропускную способность, ресурс и надежность трубопроводных систем. Принцип работы систем основан на своевременном сбросе рабочей жидкости через регулирующие клапаны, расход через которые контролируется и регулируется системой управления. Эти системы успешно

используются в ОАО "Балтнефтепровод", ОАО "Транссибирские магистральные нефтепроводы" и др.

В настоящее время широкое распространение получили SCADA-системы, обеспечивающие эффективное управление эксплуатационным участком магистрального трубопровода. В режиме реального времени SCADA-системы позволяют отслеживать изменения всех технологических параметров перекачки. Использование современных SCADA-технологий, телемеханики и автоматизированных систем управления позволяет решать задачи функциональной диагностики осложнений технологических режимов нефтепроводов. На мировом рынке наиболее популярны следующие системы диспетчерского управления и сбора данных, а именно SCADA-системы FactoryLink (производитель USDATACo, США), Genesis (Iconics, США), Sitex (JadeSoftware, Англия), TraceMode (AdAstraResearchGroup Ltd., Россия), SIMATICWinCC (Siemens AG, Германия) и др.

Автоматизированные системы управления проектируются и создаются для правильного контроля состояния труб и управления процессами, происходящими во время эксплуатации трубопровода. В этих системах исходные данные для оценки состояния трубопровода определяются на основе:

- диагностика внешних и внутренних труб и металлографические исследования;
- сбор информации о параметрах транспортируемой среды, полученной с помощью интегрированных автоматизированных систем управления на уровне компрессорной станции, линейного производственного управления или предприятия по транспортировке нефти и газа в целом;
- анализ картографических материалов и проектной и строительной документации.

Внешняя диагностика трубопроводов, в частности, позволяет оценить смещение труб от проектного местоположения в результате естественного перемещения грунта и термических деформаций трубопроводов. Для проектирования системы управления используется SCADA-система или внедрение в системы проектирования собственного интерпретатора языка высокого уровня, что значительно повышает гибкость системы, а также упрощает процессы постоянного мониторинга и управления. Эффективность принятия решений обеспечивается за счет внедрения в систему собственных ВЕБ- и WAP-интерфейсов.

Более перспективное направление в разработке систем управления

объектами магистральных трубопроводов связано с построением интеллектуальных систем управления и интеллектуализированных систем поддержки принятия решений. В то же время метод нечеткого управления с прогнозированием позволяет проводить взвешенную оценку целей управления за счет использования знаний, опыта и интуиции экспертов. Контроллеры, установленные на насосной станции, время от времени оценивают во время перекачки отклонение реальных параметров от модельных и формируют в системе команды управления для обеспечения заданного технологического режима перекачки. Использование многомерной адаптивной модели позволяет повысить эффективность принятия решений в аварийных ситуациях, отслеживать тенденции развития процессов в трубопроводах, пользователю понятно интерпретировать параметры процесса перекачки, собираемые системой SCADA, и представлять результаты диагностики для анализа в удобной форме. Несмотря на очевидные преимущества и перспективы, разработка новых SCADA-систем требует значительных материальных и временных затрат, что вынуждает использовать существующие инструменты.

1.2. Задача управления режимами работы технологических объектов нефтепровода в нечеткой среде и способ ее решения

Формализуем и представим математическую постановку задачи управления режимами работы технологического объекта магистрального трубопровода в нечеткой среде и предложим метод решения полученной задачи, основанный на опыте и интуиции лица, принимающего решения (ЛП). В общем случае такая задача может быть формализована следующим образом [9]. Введем $\text{Let } \mu(x) = (\mu^1(x), \dots, \mu^m(x))$ – вектор нормализованных критериев оценки эффективности основных трубопроводных системы; $\varphi_q(x) > b_q$, $q = 1, L$ – нечеткие ограничения; $\mu_q(x)$, $q = 1, L$ – функции принадлежности, которые оценивают степени выполнения нечетких ограничений [10]. Предположим, с участием экспертов и лиц, принимающих решения, весовые векторы важности критериев $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ и ограничения определены $\beta = (\beta\gamma_1, \dots, \beta\gamma_L)$.

Тогда задача принятия решений в нечеткой среде для управления режимами работы технологических объектов нефтепровода в общем виде может быть записана в следующем виде [11]:

$$\max_{x \in X} \mu^i(x), i = 1, m. \quad (1)$$

$$X = \{x: \operatorname{argmax}_{x \in \Omega} \mu_q(x), q = 1, L\} \quad (2)$$

В работе предложен прием конкретизации задачи (1), (2) на основе модификации метода основного критерия нечеткости в случае m критериев и L нечетких ограничений [12 – 14]. Основные моменты

предлагаемого эвристического метода основаны на адаптации принципа главного критерия для решения задачи. В процессе решения используются экспертные оценки и последовательное уточнение решения в диалоговом режиме.

2. Обсуждение результатов

По результатам исследования можно установить, что при проектировании системы управления использование SCADA-системы и интерпретатора языка высокого уровня может значительно повысить гибкость системы, а также упростить процессы постоянного мониторинга и контроля. Определено, что эффективность и качество систем диагностирования состояния контроля режимов работы технологических объектов магистрального нефтепровода и автоматизированных систем управления процессами перекачки нефти зависят от метрологических качеств средств измерений, от статистических и динамических свойств управляющих устройств и измерительных механизмов.

Поскольку функционирование реальных технологических объектов магистральных нефтепроводов часто может характеризоваться нечеткостью некоторой части исходной информации, при постановке и решении задач управления для этих объектов приходится учитывать и использовать нечеткую информацию в виде знаний, опыта и интуиции лиц, принимающих решения, и экспертов-специалисты. Такой подход к решению задачи нечеткого управления позволяет получать более эффективные и адекватные решения в нечеткой среде.

3. Заключение

Исследовано состояние диагностических систем управления режимами работы технологических объектов магистральных нефтепроводов. Проанализированы системы и методы диагностики и определения утечек нефти из магистральных нефтепроводов, выделены их преимущества и недостатки. Рассматриваются SCADA-системы, обеспечивающие эффективное управление эксплуатационным участком магистрального трубопровода и отслеживающие изменения всех технологических параметров перекачки в режиме реального времени. Перспективным направлением в разработке систем управления объектами магистральных трубопроводов определено построение интеллектуальных систем управления, которые за счет использования знаний, опыта и интуиции экспертов и лиц, принимающих решения, обеспечивают эффективное принятие решений.

Новизна работы заключается в том, что получена постановка задачи управления режимами работы объектов в нечеткой среде и

разработан эффективный метод ее решения, основанный на модификации принципа главного критерия. Поскольку многие технологические объекты нефтепровода работают в условиях нечеткости исходной информации, предлагаемый подход к решению задачи управления в нечеткой среде имеет практическое значение.

Библиографический список

1. Вайншток С.М. 2002 Трубопроводный транспорт нефти 1 (Москва: ООО “Недра-Бизнес-Центр”)
2. Чжан пей Ли, Цзиньфэй Ван, Р. Брук и Р. Истон 2016 Повышение требований к данным для управления целостностью нефтегазовых трубопроводов Oil Gas European Magazine 132 167-93
3. Бейсембетов И. К., Бекибаев Т.Т., Жапбасбаев У. К., Махмотов Е. С. и Саяхов Б.К. 2017 Оптимизация энергопотребления при трубопроводной транспортировке “горячих” масел. Наука и технология трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов 7(4) 94-105
4. Богданов Р.М. и Лукин С.В. 2011 Определение ряда оптимальных режимов работы магистральных трубопроводов с выбранными критериями оптимальности (ORORMT) Патент № 011611173 зарегистрирован №2010617845 опубл. 4.02.2011
5. Метод моделирования Czurgat O 2016 помогает проводить операции по закачке в подводные трубопроводы с воскообразной сырой нефтью
6. Нефть и газ Европейский журнал 132 200-23
7. Жапбасбаев У.К. и др. 2004 Исследование влияния депрессорных присадок на гидравлическое сопротивление и теплообмен в потоке масляной смеси Математика и компьютеры в моделировании 67 485-92
8. Бусыгин Г.Н. 2015 Эксплуатация систем контроля утечек в ОАО “Уралтранснефтепродукт”
9. Транспортировка и хранение нефтепродуктов 9 30-1
10. Алеев Р. М., Алешко Е. И., Чапурский В.Н. 2001 Способ дистанционного обнаружения утечек нефти из магистрального трубопровода. Изд-во 2073816 РФ, 2001
11. Оразбаев Б.Б., Оспанов Е.А., Оразбаева К.Н. и Серимбетов Б.А. Многокритериальная оптимизация в управлении химико-технологической системой производства бензола с нечетким информационным полем. Томского политехнического университета. Геоактивная инженерия 33(7) 182-94

12. Оразбаев Б., Ассанова Б., Бакиев М., Кравчик Дж. и Оразбаева К. 2020 Методы синтеза моделей и многокритериальной оптимизации химико-технологических систем в нечеткой среде Журнал теоретической и прикладной информатики. Технология 98(6) 1021-36
13. Карпинский М., Райба С., Завислак С., Варвас К., Касьянчук М., Ивасиев С. и Якименко И. Новый метод восстановления десятичного числа из его остатков 2019 года, основанный на добавлении модулей продукта Proc. 10-го IEEE Int. Конф. об интеллектуальном сборе данных и передовых вычислительных системах: Технологии и приложения (IDAACS) том 1 (Франция: Мец) 13-6
14. Orazbaev B., Moldasheva Zh., Orazbaeva K., Makhatova B., Kurmangazieva L., Gabdulova A. Development of mathematical models and optimization of operation modes of the oil heating station of main oil pipelines under conditions of fuzzy initial information. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6(2(114)), 147-162. Doi:<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.244949>

Компьютерная программа для обучения игре в шахматы

Д.А. Осыкин, О.Н. Половикова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию технологий компьютерных шахмат и разработке программы для обучения детей игре в шахматы

Ключевые слова: *компьютерные шахматы, нейронные сети, разработка компьютерных игр, обучение детей*

Компьютерные шахматы – термин, означающий совокупность программного обеспечения и специальных компьютеров для игры в шахматы. Идея создания шахматной машины появилась ещё в XVIII веке [1]. Программы для реализации компьютерных шахмат называются шахматными программами, а компьютеры для игры в шахматы зовутся шахматными компьютерами.

Существуют и используются несколько видов компьютерных шахмат:

- Шахматные программы. Они являются виртуальными шахматистами, которые могут играть как между собой, так и с живыми игроками. Одними из самых известных шахматных программ являются Stockfish и AlphaZero. На текущем уровне развития компьютерных шахмат сильнейшие шахматные программы заметно превосходят сильнейших игроков-людей. Последним официальным матчем шахматной программы и человека является матч чемпиона мира Владимира Крамника и шахматной программы Deep Fritz 10 в конце 2006 года, который завершился поражением человека [2].

- Сервисы для обучения игре в шахматы. Такие программы включают в себя некоторый набор задач и средств оценки успехов обучающегося при выполнении выбранной задачи. Обучающие программы ориентированы на различные целевые группы, что отражается в уровне сложности задач. Примерами подобных программ являются Chess – Play and Learn, Shredder Chess. Стоит отметить, что в данном сегменте русскоязычные сервисы недостаточно распространены, поэтому задача по разработке и внедрению русскоязычной обучающей программы является актуальной.

- Виртуальные шахматные доски, позволяющие организовать шахматную партию для удалённых игроков. В некоторых из них

предусмотрен функционал для проведения турниров и первенств по шахматам. Самыми используемыми виртуальными досками являются chess.com и lichess.org.

Основные компоненты шахматной программы

При написании шахматной программы разработчик должен каким-либо образом реализовать необходимые компоненты такой программы. Анализ информационных источников и программ с подобным функционалом позволил выделить следующие базовые компоненты:

- Представление шахматной доски. Представлением называется способ реализации доски как некоторой структуры данных. Основные способы хранения представления – хранение по фигурам и хранение по клеткам. На данный момент наиболее популярным методом представления доски является bitboards (битборды). Его суть заключается в сохранении всей доски в целом 64-битном числе с выделением одного бита на каждую клетку. Далее создаются 8 переменных, содержащих цвета и типы фигур по отдельности. Основными преимуществами битбордов являются компактность в памяти и скорость работы.

- Методы поиска – алгоритм, отвечающий за поиск наилучших возможных ходов. На данный момент чаще всего используются модификации альфа-бета-отсечения. Идея алгоритма заключается в спуске по дереву ходов до листьев и последующем возвращении к корню с оценкой каждого хода, отсекая ненужные ходы после нахождения оптимального. Альфа-бета-отсечение существенно повышает скорость анализа за счет отсечения заведомо плохих ходов, но на его эффективность ощутимо влияет предварительная сортировка вариантов по убыванию оценок.

- Листовая оценка – статическая оценка позиции. Единицей оценки является пешка, а знак обозначает преимущество какой-либо из сторон: «+» – преимущество белых, «-» – преимущество черных. Мат оценивается в 300 пешек. Оценка позиции, в которой известно количество ходов до мата, производится по формуле $(300 - 0.01x)$, где x – количество ходов до мата. При оценивании позиции используются следующие основные параметры:

- Материал. Иначе говоря, тип фигуры. Например, ферзь оценивается в 12 пешек, а ладья в 6.

- Мобильность. Количество ходов в текущей позиции.

- Таблицы позиций фигур. Таблица бонусов и штрафов для каждой фигуры в зависимости от её положения на доске.

- Пешечная структура. Правила для оценки местоположения пешек.

- Этапы игры. Используются отдельные оценки для дебюта и эндшпиля. Переход одного этапа в другой оценивается по оставшемуся на доске материалу и происходит плавно с ходом партии.

Режимы работы программы

Обучающий сервис реализуется на движке Unity. В нём будет два режима – обучающий режим и режим свободной игры. В обучающем режиме ученик должен будет несколько раз выполнить задачи урока для его прохождения, а в режиме свободной игры он будет путешествовать по процедурно сгенерированному подземелью, населённому шахматными фигурами и играть с ними.

Обучающий режим будет содержать уроки, обучающие следующим шахматным приёмам и ситуациям:

- Связка
- Комбинация
- Цугцванг
- Материальный перевес
- Отвлечение
- Завлечение
- Двойной удар
- Мат королю

Помимо указанных уроков, сервис призван обучать базовым понятиям и правилам шахмат – например, как перемещать фигуры или как рубить фигуры соперника.

В программу будет интегрирована нейронная сеть Leela Chess Zero, основанная на AlphaZero. Она отвечает за оценку действий игрока в режиме свободной игры и игру с ним в том же режиме. Максимальный уровень фигуры и количество фигур ограничены типом фигуры, с которой играет игрок. Если в подземелье игрок решил сыграть с офицером, то у него не будет фигур выше офицера и у него будет гораздо больше фигур, чем у пешки.

На данный момент реализованы представление шахматной доски и часть первого урока. Задача первого урока – перемещать фигуры на указанные позиции. После перемещения фигуры необходимо нажать клавишу «С», и игра проверит, находится ли фигура на нужной позиции. Если фигура на нужном месте, игра генерирует новое стартовое положение фигуры и новую целевую позицию. Сейчас доступна только часть урока с перемещением ферзя.

Демонстрация работы программы:

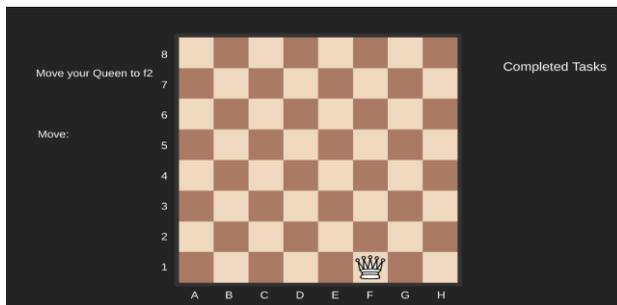


Рисунок 1. – Начало урока

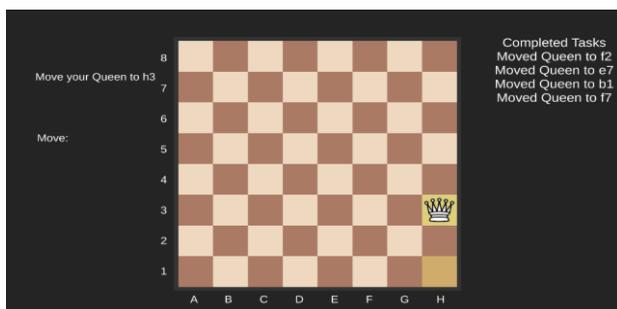


Рисунок 2. – Конец урока

В дальнейшем будет реализована система оценивания перемещений игрока – чем дальше он будет перемещаться к позиции, тем ниже будет его оценка за урок. Также будут реализованы задачи по перемещению остальных фигур, после чего работа перейдет к созданию остальных уроков.

Библиографический список

1. История создания шахматных компьютерных программ – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/istoriya-sozdaniya-shahmatnyh-kompyuternyh-programm> (дата обращения: 08.10.2021). – Текст: электронный.
2. После Каспарова. Компьютерные шахматы – итоги и перспективы / Хабр – URL: <https://habr.com/ru/post/377377> (дата обращения: 14.10.2021). – Текст: электронный.
3. Как компьютер играет в шахматы? / Хабр – URL: <https://habr.com/ru/post/390821>. – Текст: электронный.
4. Sebastian Lague – Chess AI – URL: <https://github.com/SebLague/Chess-AI>. – Текст: электронный.

5. Stockfish – Open Source Chess Engine – URL: <https://www.stockfishchess.org>. – Текст: электронный.
6. AlphaZero: Shedding new light on chess, shogi and Go | DeepMind – URL: <https://deepmind.com/blog/article/alphazero-shedding-new-light-grand-games-chess-shogi-and-go>. – Текст: электронный.
7. Славин И.Л. – Учебник-задачник шахмат, Правда Севера, Т.1, 1998, 320 с.
8. Славин И.Л. – Учебник-задачник шахмат, Правда Севера, Т.2, 1998, 333 с.

Разработка информационной системы «Учет обслуживания кассовых аппаратов»

В.А. Подосинникова, Т.В. Михеева

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена разработке информационной системы учета обслуживания кассовых аппаратов для компании ООО «Информсервис».

Ключевые слова: *информационная система, база данных, СУБД, PostgreSQL, SQL, С#.*

В настоящее время на рынке представлено множество решений информационных систем со своими особенностями и подходами к решению вопросов, с которыми она должна справляться. Из-за этого руководство предприятий часто сталкивается с проблемой выбора информационной системы, которая смогла бы с наибольшим успехом решать поставленные задачи и оправдала бы инвестиции на свое внедрение. Однако часто происходит, что ни одна из предложенных систем не способна полностью подстроиться под нужды предприятия. В таком случае оптимальным решением становится разработка собственной системы.

В связи с расширением списка обслуживаемых магазинов компании ООО «Информсервис» и накопления больших объемов данных, возникла необходимость в создании информационной системы, которая автоматизирует учет технического оборудования и его обслуживания.

Актуальность работы обуславливается тем, что в современных условиях среди внутрифирменных задач компании остро стоит вопрос обеспечения персонала удобным и быстрым механизмом регистрации и обработки заявок технического обслуживания магазинов.

Целью работы является разработка информационной системы «Учёт обслуживания кассового оборудования».

Разработка базы данных информационной системы выполнялась в системе управления базами данных PostgreSQL. PostgreSQL – надежная, функциональная и продвинутая СУБД, которая удобна для разработки базы данных на языке SQL [1].

Для организации работы пользователя с базой данных было разработано пользовательское приложение на языке

программирования C# [2] с разработкой Windows Forms приложения в среде Visual Studio. Подключение базы данных осуществлялось установкой Npgsql к проекту через диспетчер пакетов NuGet.

Дизайн интерфейса информационной системы «Учёт обслуживания кассового оборудования» выполнен в минималистическом стиле, что позволяет не тратить время на обучение сотрудников управления программой. Интерфейс интуитивно понятен, состоит их двух форм «Авторизация» и «Приложение учёта обслуживания кассового оборудования». Каждое окно оформлено в общем для приложения стиле.

Информационная система начинает свою работу с формы «Авторизация», где выполняется авторизация пользователя в системе приложения.

После авторизации пользователь попадает на вкладку «Главная» (рисунок 1), где расположена информация о пользователе, который выполнил вход, и отображается текущая дата и время.



Рисунок 1 – Вкладка «Главная»

При переходе во вкладку «Магазины» (рисунок 2) пользователь может просматривать список магазинов, а также добавлять новые и редактировать уже имеющиеся данные.



Рисунок 2 – Вкладка «Магазины»

Вкладка «Оборудование» предназначена для учета имеющегося у компании оборудования.

Вкладка «Оборудование в магазине» обеспечивает возможность просмотра информации о наличии определенной техники в конкретном магазине и производить поиск по выборочным столбцам.

Вкладка «Заявки» используется для хранения информации о поступающих заявках на техническое обслуживание оборудования.

Разработанная информационная система позволяет хранить, добавлять и изменять данные в базе данных, осуществлять поиск необходимых сведений о наличии и состоянии спецоборудования, с возможностью использования сторонних программ сотрудниками организации, контролировать выполнение заявок, а также производить запросы на поиск информации по кассам, весам и компьютерам определенного магазина. Приложение имеет удобный и интуитивно понятный интерфейс, протестировано и успешно функционирует, кроме того возможно обновление графического вида программы и технических возможностей системы при необходимости.

Библиографический список

1. Морунов Е.П. PostgreSQL. Основы языка SQL. – СПб.: БХВ-Петербург, 2018. – 336 с.
2. Казанский А.А. Программирование на Visual C#. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 192 с.

**Перспективы развития сервисов
многофункционального портала готовых программных
разработок студентов и магистров**

О.Н. Половикова, В.В. Ширяев, Д.А. Осыкин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье представлены результаты исследовательского проекта по разработке многофункционального портала готовых программных разработок студентов. В работе сделан акцент на перспективные направления по развитию и продвижению разработанного приложения для информационно-образовательной среды вуза.

Ключевые слова: *программное решение, процесс образования, Docker-платформа, web-приложение, портал, тестирование программы, модернизация сервисов*

На сегодняшний день цифровая образовательная среда вуза не обладает необходимой ресурсной базой для развертывания выпускных программных решений студентов и магистров. Основная сложность изучения и тестирования работоспособности прикладных программ – это ресурсоёмкость и трудозатратность операций по их установке и настройке. Отсутствие банка готовых программных разработок студентов (с возможностью проверить работу основных функций) сказывается на качестве организации образовательного процесса в вузе. На защитах выпускных работ студенты по направлению «фундаментальная информатика и ИТ», «прикладная информатика», «программная инженерия» демонстрируют *screenshot*-ы экрана, объясняя основные технологические моменты проекта и логику работы своей программы.

Разрабатываемая платформа без дополнительной установки программного обеспечения (через web-интерфейс) предоставляется доступ согласно групповой политике к следующим сервисам: публикация, хранения, тестирование прикладных решений. Студентам, которые только приступают к исследовательской и программной разработке предоставляется возможность изучать существующие решения, чтобы детально понять специфику применения определенной технологии для реализации поставленной практической задачи. Потребность в специализированной платформе с доступом к банку

программных решений назрела как у начинающих исследователей, так и их руководителей.

Анализ технологий и методов банка программных решений безусловно будет способствовать совершенствованию научно-исследовательской деятельности бакалавров, магистров и аспирантов. Возможность публичного обсуждения программных проектов на портале даст весомый толчок для их дальнейшего продвижения и развития, обеспечит дополнительную информационную поддержку выпускным проектам. Постепенное накопление разработок может использоваться и в качестве визитной карточки университета, демонстрирующей полученные компетенции выпускников, также в качестве индивидуального резюме достижений конкретного выпускника для работодателей.

Портал является веб-приложением с клиент-серверной архитектурой. В качестве инструмента для размещения проектов используется Docker-платформа. [1-3] Проект, в рамках которого реализуется портал программных разработок, требует дальнейшего развития. Для созданного портала являются актуальными вопросы проработки планов по активному использованию его сервисов в учебном процессе и расширения его функциональных возможностей. Следует выделить следующие направления продвижения и адаптации портала в цифровую среду вуза:

1. Реализовать функционал по поиску и фильтрации представленных на портале проектов на основе представленной авторами проектов информации (название, используемые технологии, краткое содержание).
2. Для удобства работы с ресурсами портала следует разработать виртуального помощника, который сможет продемонстрировать возможности размещенных проектов и рассказать о тех технологиях, которые были использованы и адаптированы под новые цели.
3. Спроектировать и внедрить балльно-рейтинговую систему (БРС) для оценивания опубликованных программных решений.

БРС определит механизм для демократичного выбора наиболее перспективных авторов и проектов для их дальнейшего участия в конкурсах, олимпиадах, соревнованиях. Кроме этого оценочная система позволит измерить уровень освоения профессиональных компетенций выпускниками и слушателями программ ДПО. Для участия в оценивании можно привлекать специалистов IT-сферы из ведущих компаний края.

4. Реализовать техническую и информационную поддержку для публичного обсуждения проектов и программных решений, используя возможности web-форума.

5. Разрешение вопросов по текущему обслуживанию портала, поиску и устранению ошибок. После разработки тестовой версии клиентского и серверного приложений следует выделить и проанализировать его уязвимости и ошибки разработки. Сбор и анализ ошибок, пожеланий от пользователей выступают двигателем для модернизации сервисов приложений.

6. Сформировать информационную среду для комфортного взаимодействия студентов магистров, школьников, преподавателей с сервисами портала.

Для решения этой задачи следует создать коллекцию видеороликов для самостоятельного развертывания готовых программных решений студентами и магистрами. Также планируется организовать вебинары и консультации для школьников и студентов с демонстрацией сервисов и возможностей портала.

Безусловно, перечисленные выше направления не исчерпывают весь потенциал возможного развития портала. Потребность в новых сервисах и перспективы развития существующих будут выделяться и формироваться в процессе дальнейшей работы с приложением.

Работа поддержана средствами программы развития ФГБОУ ВО Алтайский государственный университет «Приоритет-2030».

Библиографический список

1. Васильев П А Развертывание сервера с помощью технологии docker // Вестник науки и образования. – 2016. – № 12. – С. 25-25.
2. Microservice Architecture. [Электронный ресурс]. – URL: <https://microservices.io/pat-terns/microservices.html> (Дата обращения: 05.06.2022).
3. Docker. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.docker.com> (Дата обращения: 05.06.2022).

Разработка концептуальной модели базы данных для информационной системы официально-деловых текстов¹

Ю.Е. Поломошнова, Т.В. Михеева, Ю.А. Алябышева

АлтГУ, г. Барнаул

Данная статья посвящена разработке базы данных параллельных шаблонов документов на нескольких языках в рамках проекта «Роль русского языка как языка перевода официально-деловых текстов на территории Большого Алтая».

Ключевые слова: *информационная система, база данных, концептуальная модель, СУБД, PostgreSQL, SQL.*

Большие объемы информации в бумажном виде значительно усложняют их чтение, дальнейшую обработку, поиск. Решением данной проблемы стало создание баз данных. Базы данных – это совокупность структур данных, хранимых под управлением систем управления базами данных (СУБД). СУБД – это программный комплекс, обеспечивающий централизованное хранение данных и предоставляющий приложениям услуги по обработке данных [1]. В современном мире они стали незаменимы для эффективной работы даже с минимальными массивами данных.

Целью данной работы является проектирование и разработка базы данных для информационной системы официально-деловых текстов в рамках проекта «Роль русского языка как языка перевода официально-деловых текстов на территории Большого Алтая». Проект направлен на закрепление за русским языком статуса языка перевода официально-деловой документации на территории стран Большого Алтая в целях интеграции и развития региона, а также включения тюркоязычных народов в мировое сообщество посредством русского языка.

Одной из задач проекта является разработка и представление в цифровом виде базы параллельных шаблонов документов на нескольких языках. Использование такой базы документов будет направлено на привлечение иностранных партнеров и клиентов

¹Работа поддержана средствами программы развития ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет» «Приоритет-2030»

предприятиями Алтая. При необходимости подписания документа на русском языке носителем иного языка наличие соответствующего параллельного текста на ином языке значительно облегчит понимание исходного русского документа.

На рисунке 1 представлена ER-схема разработанной модели базы данных. Модель состоит из шести сущностей и связей между ними.

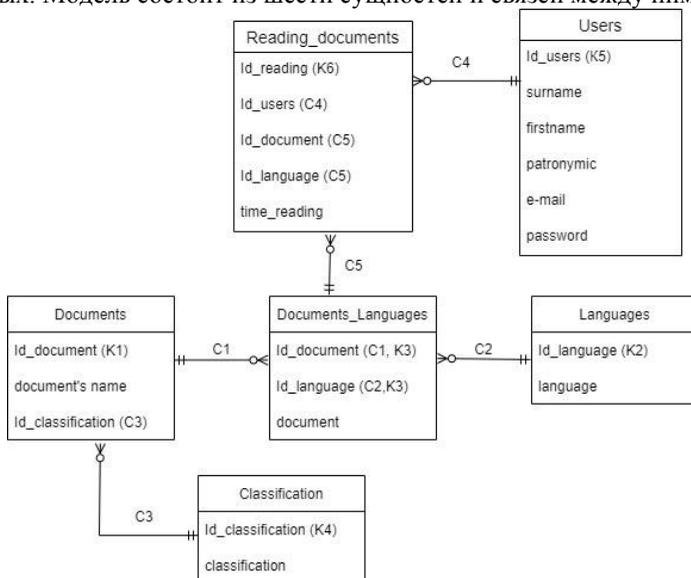


Рисунок 1 - ER-схема базы данных

В таблице Users хранятся данные о пользователях. Таблица Documents хранит название документа и классификацию, к которой относится документ. В таблице Classification хранит возможные классификации, на которые разделены документы. Таблица Languages хранит данные о языках, на которых написаны документы. Таблица Reading_documents хранит данные активности пользователей. В таблице Documents_Language хранится путь к документу на нужном языке.

Для реализации базы данных была выбрана система управления базами данных PostgreSQL.

PostgreSQL – СУБД, ориентирующаяся в первую очередь на полное соответствие стандартам и расширяемость и пытается полностью соответствовать SQL-стандартам ANSI/ISO, обладает объектно-ориентированным функционалом, отлично справляется с одновременной обработкой нескольких заданий [2-3]. Также следует

отметить PostgreSQL – это свободная объектно-реляционная система управления базами данных.

Построенная концептуальная модель базы данных будет использована для разработки информационной системы официально-деловых текстов, обеспечит хранение, систематизацию, быстрый поиск шаблонов документов.

Библиографический список

1. Новиков Б.А. Основы технологий баз данных: учебное пособие / Б. А. Новиков, Е. А. Горшкова, Н. Г. Графеева; под ред. Е. В. Рогова. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 582 с.
2. PostgreSQL: The World's Most Advanced Open Source Relational Database [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.postgresql.org/> – Загл. с экрана (Дата обращения 06.06.2022).
3. Документация PostgreSQL и Postgres Pro [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://postgrespro.ru/docs/> – Загл. с экрана (Дата обращения 06.06.2022).

Повышение стойкости стеганографической системы, использующей GIF-изображения в качестве файлов-контейнеров

Д.И. Строкин¹, И.В. Пономарев¹
¹АлтГУ, г. Барнаул

В статье рассматриваются метод обеспечения конфиденциальности данных средствами Цифровой Стеганографии, использующий в качестве файлов-контейнеров изображения формата GIF, описывается и производится возможная атака на данный метод. Как результат, предлагаются возможные средства повышения стойкости системы против проводимой атаки.

Ключевые слова: *контейнер, сообщение, палитра, индекс цвета, наименее значащий бит.*

Метод сокрытия информации

Данный метод подробно описан в работах [1, 6]. Здесь же приведем только основные сведения и алгоритм.

Определение. *Контейнером (носителем)* называют несекретные данные, которые используют для сокрытия сообщений. *Пустой контейнер* – контейнер без встроенного сообщения; *заполненный контейнер или стего-контейнер*, содержащий встроенную информацию [1].

В качестве носителей информации были выбраны изображения формата .GIF, использующие LZW-сжатие без потерь.

Отличительными чертами данного формата являются [3]:

- 1) Использование блочной структуры данных;
- 2) Использование *палитры цветов* - фиксированного набора (диапазона) цветов и оттенков, имеющего физическую или цифровую реализацию в том или ином виде.

Использование палитры подразумевает, что каждая точка изображения содержит лишь номер цвета из палитры, а не информацию о ее цвете в цветовом пространстве.

В основе алгоритма лежит метод *замены Наименее Значащего Бита* (Least Significant Bit), основной принцип которого заключается в том, что передаваемая информация встраивается в значения младших битов изображения. Такие биты несут в себе меньше всего

информации, а, следовательно, их модификация не восприимчива человеческим зрением [1, 5].

Однако заметим, что пиксели GIF-изображений – это поток индексов из цветовой палитры. Это значит, что прямая модификация пикселей изображения непригодная для нашего случая.

Наилучшем решением в подобной ситуации будет использование «подобных» элементов палитры [1]. Под *подобными*, в данном случае, понимаются пары элементов, цветовая интенсивность которых отличается на незначительное число d .

Алгоритм встраивания сообщения.

Шаг 1. Сортировка палитры цветов по возрастанию веса W , где:

$$W = R \cdot 65536 + G \cdot 256 + B$$

Шаг 2. Поиск пар элементов в отсортированной палитре, для которых разность весов W меньше заданной пороговой величины d . Обозначим одну такую пару за (j_i, j_k) , где i и k – это индексы элементов в неотсортированной палитре, причем в отсортированной таблице j_i от j_k отличается на 1.

Шаг 3. Скрытие сообщения. Последовательно просматриваются все точки изображения, по значению точки k определяется соответствующий номер j_k . Если элемент отсортированной палитры j_k пригоден для сокрытия, то его Наименее Значащий Бит заменяется на очередной бит сообщения. Затем по получившемуся номеру j_k' определяется связанный с ним элемент исходной таблицы k' , который и присваивается текущей точке.

Шаг 4. Извлечение сообщения происходит аналогичным способом. Для текущей точки k ищется номер j_k в отсортированной по весу W палитре цветов и если:

- Младший бит индекса j_k равен нулю, смотрим, удовлетворяет ли пара $(j_k, j_k + 1)$ условию: $W_{j_k+1} - W_{j_k} < d$. Если удовлетворяет, значит, из индекса j_k извлекаем младший бит и записываем его в сообщение.
- Младший бит индекса j_k равен единице, смотрим, удовлетворяет ли пара $(j_k - 1, j_k)$ условию: $W_{j_k} - W_{j_k-1} < d$. Если удовлетворяет, значит, из индекса j_k извлекаем младший бит и записываем его в сообщение.

Алгоритм обнаружения факта скрытия сообщения.

Выявление факта сокрытия информации внутри файла-контейнера – отдельный вид стеганографических атак, часто основывающихся на

различных статистических закономерностях контейнеров. Модификацию одной из таких атак мы и рассмотрим.

Гистограммный метод или *метод, основанный на критерии χ^2* [1, 2, 5] предполагает, что вероятность одновременного появления соседних (то есть отличных на наименее значащий бит) цветов в незаполненном контейнере крайне мала. А при последовательном встраивании равномерного сообщения, пиксели изображения, напротив, приобретают равномерное распределение.

Поэтому степень различия между вероятностными распределениями элементов естественных контейнеров и полученных из них стего может быть использована для оценки вероятности существования стегоканала.

Шаг 1. Сортировка палитры цветов по возрастанию веса W , где:

$$W = R \cdot 65536 + G \cdot 256 + B$$

Шаг 2. Разбиение изображение на отдельные блоки. Гораздо удобнее оценивать вероятность внедрения секретной информации в отдельный блок, чем во все изображение целиком.

Шаг 3. Для текущего блока подсчитывается, сколько раз n_i^* её элемент x_i принял рассматриваемые значения, где всего v -элементов. Иными словами, мы строим эмпирическую гистограмму по количеству вхождений для каждого элемента палитры.

Шаг 4. Далее происходит построение теоретической гистограммы на основе эмпирической, путём нахождения среднего арифметического количества пикселей элементов с соседними номерами:

$$n_0 = n_1 = \frac{n_0^* + n_1^*}{2}$$

Шаг 5. Величина χ^2 для сравниваемых распределений последовательности и ожидаемого распределения стего равна:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$$

Шаг 6. Таким образом, вероятность p того, что два распределения одинаковы [5], определяется:

$$p = 1 - \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(\frac{k-1}{2})} \int_0^{\chi_{k-1}^2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k-1}{2}-1} dx,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера, k – количество цветов в палитре.

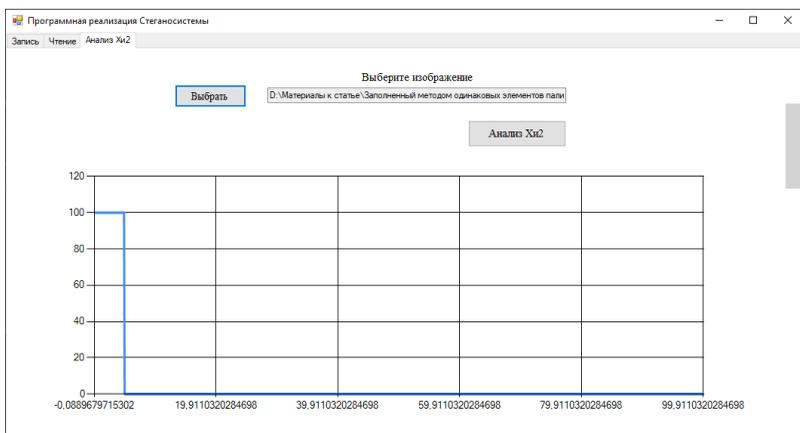


Рисунок 1 – Результат анализа файла-контейнера (заполненного на ~5%) на наличие скрытого сообщения.

Увеличение стеганографической стойкости системы.

Предполагается, что снижение вероятности обнаружения стегосообщения атаками, основанными на критерии χ^2 , можно добиться использованием псевдослучайных интервалов при скрытии очередного бита сообщения. Иными словами, лучше всего встраивать сообщение не последовательно, а рассеяно по всему контейнеру.

Для этого необходимо ввести в систему *генератор псевдослучайных чисел* и настроить его на генерацию случайных чисел по заданному *сиду* (иными словами *ключу*, *паролю*). Возвращаемые значения *ГПСЧ* – это отступы между пикселями изображения с секретной информацией.

Таким образом, при скрытии сообщения программа будет генерировать ключ, без которого дальнейшее извлечение информации из заполненного файла-контейнера не представляется возможным. При этом атака гистограммным методом будет безуспешной, так как не будет выполняться основная гипотеза.

Библиографический список

1. Аргановский А.В., Балакин А.В., Грибунин В.Г., Сапожников С.А.. Стеганография, цифровые водяные знаки и стеганоанализ. – М: Вузовская книга, 2009. – 220 с.
2. Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В.. Цифровая стеганография. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009. – 272 с.

3. Сэломон Д.. Сжатие данных, изображений и звука – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
4. Westfeld A., Pfitzmann A. Attacks on Steganographic Systems. Breaking the Steganographic Utilities EzStego, Jsteg, Steganos and S-Tools – and Some Lessons Learned. Lecture Notes in Computer Science, 1768:61–75, 2000
5. Куркина М.В., Пономарев И.В., Строкин Д.И.. Стеганографические методы, устойчивые к JPEG сжатию // Известия АлтГУ. Математика и Механика. – 2021 – №1(117). – DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-17
6. Пономарев И.В., Строкин Д.И.. Стеганографические методы встраивания и обнаружения сокрытых сообщений, использующие GIF-изображения в качестве файлов-контейнеров // Известия АлтГУ. Математика и Механика. – 2022 – №1 (123). – DOI: 10.14258/izvasu(2022)1-181.

Разработка программных модулей для внутренней оценки качества образования в вузе

*Т.М. Тушкина, О.А. Бубарева
БТИ (филиал) АлтГТУ, г. Бийск*

В статье описываются модули информационной системы, разработанной авторами и предназначенной для внутренней оценки качества образования в вузе, а именно качества подготовки обучающихся и их удовлетворенности организацией образовательного процесса. Данные подсистемы интегрированы в электронную информационную образовательную среду. Их использование позволяет автоматизировать обработку больших массивов данных – результатов анкетирования и тестирования обучающихся.

Ключевые слова: *информационная система, внутренняя оценка качества образования.*

Вступившие в силу в марте 2022 года изменения в федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» требуют от организаций высшего образования систематического проведения внутренней оценки качества образования, под которой подразумевается совокупность диагностических и оценочных процедур, обеспечивающих оценку качества образовательной деятельности и подготовки обучающихся в процессе реализации образовательных программ, качества условий осуществления образовательной деятельности с учетом запросов основных участников образовательного процесса.

Процедура оценки качества образования, осуществляемая собственными силами образовательной организации (ОО), достаточно трудоемка. Это связано с получением и обработкой больших объемов разнообразной информации, касающейся обучающихся. В первую очередь, это результаты анкетирования на предмет удовлетворенности условиями, содержанием, организацией и качеством образовательного процесса, а также показатели, характеризующие качество остаточных знаний студентов по отдельным дисциплинам и модулям. Этот фактор обуславливает актуальность создания программного средства для автоматизации указанных этапов, включенных в процедуру внутренней оценки качества.

Ниже перечислены функциональные требования к модулям «Анкетирование» и «Тестирование».

Модуль «Анкетирование»:

– генерация электронных анкет по принадлежности к образовательным программам (ОП) направлений подготовки/специальностей;

– добавление в базу данных ответов студентов по принадлежности к ОП направлений подготовки/специальностей;

– статистическая обработка и графическое представление результатов анкетирования по направлению подготовки/специальности в целом;

– формирование текстового документа (отчета об анкетировании).

Модуль «Тестирование»:

– выбор направления подготовки/специальности и группы;

– выбор дисциплин из учебного плана для контроля наличия у обучающихся сформированных результатов обучения по ранее изученным дисциплинам (тестирование остаточных знаний);

– выгрузки информации о результатах промежуточной аттестации обучающихся по выбранным дисциплинам;

– внесение в базу данных информации о результатах тестирования остаточных знаний;

– формирование текстового документа (отчета о результатах тестирования), содержащего вывод о наличии у обучающихся сформированных результатов обучения по ранее изученным дисциплинам.

Данные модули интегрированы в единую электронную образовательную систему (ЭИОС) вуза [1]. Из подсистемы ЭИОС «Информационная система учета контингента» в определенные временные интервалы осуществляется сбор данных (заданиями ETL) [2], которые передаются и хранятся в хранилище данных. Затем в соответствии с набором правил осуществляется предварительная обработка, очистка и анализ данных, визуализация результатов с помощью инфографиков и формирование отчета в установленном формате.

Пользовательский интерфейс модуля «Анкетирование» организован таким образом, что после накопления данных, полученных в ходе опроса, у администратора есть возможность просматривать отдельные ответы (по каждому направлению подготовки/специальности), формировать в текстовом формате отчет с указанием основных обнаруженных во время анкетирования фактов, характеризующихся числовыми значениями, а также в автоматическом

режиме осуществлять визуализацию результатов ответов на отдельные вопросы.

При активации страницы «Тестирование», администратор имеет возможность выбрать из имеющегося списка направление подготовки/специальность, добавить группу и дисциплины, внести информацию об оценках, полученных каждым студентом соответствующей группы в ходе тестирования по каждой дисциплине. После сохранения данных программа предоставляет возможность обработать их, в частности, в автоматическом режиме рассчитывается процент тестированных среди студентов группы, при этом если указанный процент меньше 70, то тестирование считается несостоявшимся; вычисляется процент оценок разного уровня, полученных студентами как в ходе промежуточной аттестации, так и в ходе тестирования, определяется процент случаев подтверждения оценок. Значение последнего показателя, меньшее 100, свидетельствует о необходимости корректирующих и предупреждающих действий со стороны преподавателя, реализующего соответствующую дисциплину.

В БТИ АлтГТУ на протяжении многих лет разрабатываются информационные системы для управления образовательным и сопутствующими процессами [3-6]. Внедрение в практику описанных в настоящей статье программных модулей позволило снизить риски ОО в преддверии федеральных проверок, унифицировать оценочные действия сотрудников отдела учебной работы и менеджмента качества образования и существенно уменьшить временные затраты на проведение внутренних аудитов образовательных программ в рамках подготовки к надзорным мероприятиям МОН РФ [7].

Библиографический список

1. Попов Ф.А., Ануфриева Н.Ю., Бубарева О.А., Паутов К.Г., Тютякин А.А., Наумова Д.А. Единая электронная информационно-образовательная среда: особенности построения и реализации // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2016. – № 8 (16). –С. 69-71.
2. Бубарева О.А. Применение метода коллаборативной фильтрации для задач интеграции данных // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП–2019): материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, 14-15 ноября 2019 года / Алт.

- гос. техн. ун-т, БТИ. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2019. – С. 328-331.
3. Тушкина Т.М., Павлова Н.В., Смирнов В.В. Информационная система для перерасчета учебной нагрузки преподавателей //МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 28 июня – 1 июля 2018 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – С. 156-157.
 - 4 Тушкина Т.М., Павлова Н.В. Информационная система для планирования внеучебной работы преподавателей // МАК: Математики – Алтайскому краю: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 27 июня – 1 июля 2019 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2019. – С. 100.
 5. Тушкина Т.М., Татаринова Н.В. Информационная система «Аудит практики в вузе» // МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2021. – С. 247-250.
 6. Ульянов Д.В., Бубарева О.А. Моделирование информационной системы управления научно-техническими конференциями вуза // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП–2020): материалы XV Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, 10-11 ноября 2020 года / Алт. гос. техн. ун-т, БТИ. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2020. –С. 73-74.
 7. Ермакова В.П., Тушкина Т.М., Судаков В.А. Информационная система сопровождения внутреннего аудита в высшем образовательном учреждении // Стандарты и качество. –2013. – № 1. – С 72-75.

Реализация сервисов по автоматизации развёртывания и управления программными приложениями студентов

В.В. Ширяев, О.Н. Половикова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье посвящена исследованию по проектированию и разработке специализированного портала для публикации готовых программных разработок студентов и магистров с возможностью их тестирования на основе Docker-платформы.

Ключевые слова: *контейнеризация, docker-стек, программное решение, Docker-платформа, web-приложение, портал, тестирование программы*

На сегодняшний день остаются востребованы сервисы по размещению готовых приложений на удалённой платформе с возможностью их запускать и тестировать. Для института математики и информационных технологий (ИМИТ), который готовит квалифицированные кадры для IT-сферы, такие задачи также являются актуальными. Возможность для преподавателей и студентов опробовать функционал готового программного продукта с одной стороны даёт обратную связь для разработчиков проектов, а с другой – предоставляет базу для выполнения исследовательских работ. Для студентов и магистров, которые только приступают к проектированию программного продукта, важным шагом является анализ практических примеров, которые отвечают современным требованиям разработки.

В рамках данного исследования реализуется сервисы портала для размещения разработок и предоставления доступа к банку программных продуктов выпускников ИМИТ. Функционал портала обеспечивается работой web-приложения:

- клиентская часть разрабатывается с использованием JavaScript-библиотеки для создания пользовательских интерфейсов React (языки: JavaScript, TypeScript);
- серверная часть – это приложение ASP.NET Core (язык C#).

В качестве основного инструмента для размещения проектов портала используется Docker-платформа. Для каждого размещаемого проекта создаётся информационная карточка с ключевыми сведениями по работе. Заявленный стек технологий позволяет использовать web-

приложение не только как ресурс с информацией о проектах, но и как инструмент размещения программных реализаций проекта.

Изолированные контейнеры (виртуальные машины с заранее загруженным программным продуктом) позволяют абстрагироваться от процесса сборки, загрузки и запуска приложений на Docker-сервере.

Сервисы портала (dockermf.asu.ru)

Портал имеет встроенную авторизацию и аутентификацию пользователей. Для размещения описания проекта нужно пройти регистрацию. После регистрации пользователь сможет заполнить описание проекта, которое затем появится в общем списке из карточек проектов. В описании проекта можно включать изображения, видео, ссылки и текстовую информацию (Rich Text Editor). Метки, назначенные проекту, позволяют находить проекты в общем списке по ключевым словам. У каждой метки есть свой тип, который означает предметную область, стек технологий или тип участника. После создания описания проекта пользователь может перейти к размещению проекта.

Весь процесс размещения заключается в минимальной настройке файлов конфигураций. Каждый проект может включать в себя несколько сервисов или приложений. Сущность, которая описывает набор таких сервисов определяет docker-стек. Пользователю нужно выбрать заранее созданный стек, для которого уже настроена маршрутизация. После команды пользователя на размещение стека на сервере происходит попытка поднятия стека. Пользователь создает триггер, по которому утилита на сервере понимает, что необходимо выполнить команду: *docker-compose up -d*. Весь вывод результатов выполнения команды доступен пользователю в клиентском приложении.

Для публикации проекта на портале автору достаточно указать реестр (удаленный ресурс с загруженными образами: Docker Hub): откуда нужно скачать образ и запустить контейнер. Таким образом, процесс размещения делится на две части:

- 1) сборка и загрузка образа;
- 2) создание контейнера или стека (несколько контейнеров) на основе загруженных ранее образов.

У пользователя при работе с сервисами портала нет доступа к основному серверу, что повышает безопасность web-приложения.

На сегодняшний момент на портале размещено три проекта, создано десять docker-контейнеров, зарегистрировано три пользователя.

Работа поддержана средствами программы развития ФГБОУ ВО Алтайский государственный университет «Приоритет-2030».

Библиографический список

4. Build and push Docker images. – URL: <https://github.com/marketplace/actions/build-and-push-docker-images> (дата обращения: 4.06.2022). – Текст: электронный.
5. Docker Open Source Engine Guide: Documentation. – URL: <https://documentation.suse.com/sles/12-SP4/html/SLES-all/book-sles-docker.html> (дата обращения: 4.06.2022). – Текст: электронный.
6. Portal Documentation: Docker.com. – URL: docs.docker.com (дата обращения: 4.06.2022). – Текст: электронный.

СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

УДК 004.8, 551.581.1

Сравнительный анализ методов моделирования экологических ниш растений

*А.В. Ваганов¹, В.Ф. Зайков¹, О.С. Кротова²,
А.И. Мусохранов², З.В. Покалякин², Л.А. Хворова²*
¹Южно-Сибирский ботанический сад, г. Барнаул;
²АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена сравнению методов моделирования экологических ниш вида *Pulsatilla turczaninowii* Kryl. et Serg. (Прострел Турчанинова) – редкого лекарственного растения, имеющего узкую экологическую приуроченность, связанную со специфическими условиями произрастания. В ходе проведения исследования построены модели случайного леса и логистической регрессии, проведен сравнительный анализ результатов моделирования.

Ключевые слова: моделирование, методы машинного обучения, экологическая ниша, биоклиматическое моделирование.

Моделирование экологических ниш растений – процесс построения моделей прогнозирования ареала обитания с использованием современных алгоритмов и биоклиматических показателей. Результатом моделирования является модель, с помощью которой можно картографировать территорию произрастания видов, прогнозировать ареал или анализировать влияние окружающей среды на виды.

Для проведения всех этапов исследования выбран язык программирования Python ввиду универсальности, гибкости и разнообразия библиотек для анализа и обработки данных.

Задача моделирования экологических ниш может рассматриваться как задача классификации. Цель задачи – определить произрастает ли вид на конкретной территории. Для решения данной задачи необходим набор данных, содержащий как точки присутствия, так и точки отсутствия вида. Набор данных точек присутствия вида *P. turczaninowii* включает 122 точки. Как показано в статье [1], результаты

моделирования чувствительны к методу выбора точек псевдо-отсутствия и зависят от количества выбранных точек. Для проведения исследования сформирован набор данных из 122 точек присутствия вида и 244 точек псевдо-отсутствия вида. Точки псевдо-отсутствия выбирались случайным образом из всех точек за пределами подходящей для обитания вида области, оцененной на основе 19 биоклиматических показателей из базы данных WorldClim [2].

Для решения задач моделирования экологических ниш интересны алгоритмы, позволяющие не только классифицировать объекты, но и оценивать вероятность принадлежности объекта тому или иному классу [3]. Поэтому, для проведения сравнительного анализа авторами выбраны два алгоритма: случайный лес и логистическая регрессия.

Случайный лес. Случайный лес относится к ансамблевым методам машинного обучения. Ансамблевое обучение базируется на идее объединения множества моделей машинного обучения с целью получить более мощную модель, чем каждая из моделей по отдельности.

Алгоритм случайного леса можно описать следующими шагами [4]:

Шаг 1. Необходимо извлечь из исходного набора данных бутстрап-выборку размера n . При использовании бутстрапа из исходной выборки размером l берется случайный объект и записывается в обучающую выборку. Следующий объект также берется случайным образом из исходной выборки размером l . Так повторяется n раз, где n – желаемый размер обучающей выборки.

Шаг 2. Каждое дерево решений обучается на одной конкретной бутстрап-выборке. При этом, в каждом узле дерева:

- 1) случайным образом отбирается s признаков бесповторным способом;
- 2) происходит расщепление узла, с помощью признака, который обеспечивает наилучшее расщепление согласно целевой функции. Целевая функция состоит в максимизации прироста информации при каждом расщеплении:

$$G(D_p, f) = I(D_p) - \sum_{j=1}^m \frac{N_j}{N_p} I(D_j) \rightarrow \max,$$

где f – признак, по которому выполняется расщепление, D_p – набор данных p -го родительского узла, D_j – набор данных дочернего j -го узла, I – критерий расщепления, N_p – общее число объектов в p -ом родительском узле, N_j – число объектов в дочернем j -ом узле.

Шаг 3. Шаги 1 и 2 повторяются k число раз, где k – это количество деревьев в лесу.

Шаг 4. Для назначения объекту метки класса ответы деревьев агрегируются на основе большинства голосов.

Логистическая регрессия. Пусть p – вероятность некоторого события в бинарном случае. Отношение $\frac{p}{1-p}$ называется перевесом или преимуществом. Логарифм от отношения $\frac{p}{1-p}$ определяется как логит-функция вероятности:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Если $p(y = 1|x)$ – условная вероятность того, что отдельно взятый объект принадлежит классу 1 при наличии его признаков x , тогда

$$\text{logit}(p(y = 1|x)) = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 + \dots + \omega_m x_m = \sum_{i=0}^m \omega_i x_i = \omega^T x,$$

где $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_m)$ – вектор весов.

Функция $\varphi(z)$, обратная к *logit*, называется логистической функцией или сигмоидой и позволяет предсказывать вероятность того, что определенный объект принадлежит отдельно взятому классу:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

где $z = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 + \dots + \omega_m x_m = \omega^T x$ – линейная комбинация весов и признаков объекта.

Вход сигмоидальной функции интерпретируется как вероятность принадлежности отдельно взятого объекта i классу: $\varphi(z) = P(y = i|x, \omega)$.

Предсказанная вероятность конвертируется в бинарный результат:

$$\tilde{y} = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(z) \geq 0,5, \\ 0, & \text{если } \varphi(z) \leq 0,5. \end{cases}$$

Для подбора параметров $\omega_0, \dots, \omega_m$ используется метод максимального правдоподобия.

Построение и обучение классификаторов осуществлялось с помощью библиотеки Scikit-learn языка Python [5]. Для подбора оптимальных гиперпараметров применен поиск по сетке. Для оценки и сравнения качества полученных моделей выбраны f-мера (f-score), кривая ошибок (ROC) и показатель AUC, известный как площадь под ROC-кривой. Значение f-меры для случайного леса равно 0.86, для логистической регрессии 0.81.

На рисунке 1 изображены ROC-кривые для построенных моделей: синяя кривая соответствует модели случайного леса (AUC = 0.94), оранжевая кривая соответствует модели логистической регрессии (AUC = 0.86). Таким образом, на основе значений метрик качества моделей, можно сделать вывод, что модель случайного леса лучше подходит для решения поставленной задачи.

Интерпретация полученных результатов осуществлялась специалистами в области ботаники. Каждая из построенных моделей отражает распространение вида *Pulsatilla turczaninovii* Kryl. et Serg. Наиболее точно, по мнению специалистов распространение вида описывает модель случайного леса (рисунок 2).

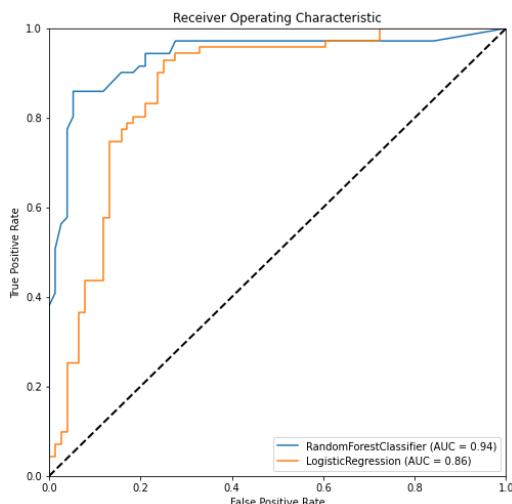


Рисунок 1 – ROC-кривые для построенных моделей

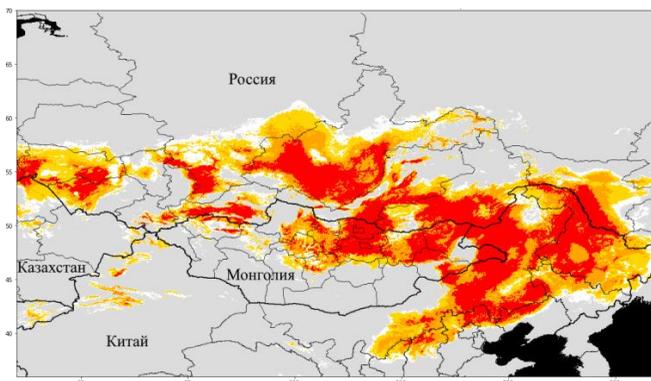


Рисунок 2 – Потенциальный ареал *P. turczaninovii*, полученный с помощью модели случайного леса

В результате проведения исследования выбрана оптимальная модель, наилучшим образом описывающая потенциальный ареал *P.*

Turczaninovi. Настоящее исследование является практически значимым и может служить опорой для поиска новых местонахождений вида *P. Turczaninovi*.

Работа поддержана средствами программы развития ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет» «Приоритет-2030».

Библиографический список

1. Morgane Barbet-Massin, Frédéric Jiguet, Cécile Hélène Albert, Wilfried Thuiller. Selecting pseudo-absences for species distribution models: how, where and how many? – Режим доступа: <https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.2041-210X.2011.00172.x> (дата обращения 27.05.2022)
2. WorldClim. – Режим доступа: <https://www.worldclim.com/node/1> – Загл. с экрана (дата обращения 25.05.2022).
3. Зайков В.Ф., Ваганов А.В., Шмаков А.И. Климатическое моделирование потенциального ареала *Pulsatilla turczaninovi* Kryl. et Serg. (Ranunculaceae) на территории Евразии // Теоретическая и прикладная экология, 2022. № 1. С. 140-144.
4. Полетаева Н.Г. Классификация систем машинного обучения // Вестник Балтийского федерального университета, 2020. № 1. С. 5-22.
5. Scikit-learn [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://scikit-learn.org/stable/> – Загл. с экрана (дата обращения 25.05.2022).

Расчет пожарных рисков электроустановок апк на основе нейронных сетей

М.А. Габова¹, О.К. Никольский¹

*¹Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Статья посвящена формированию системы расчета пожарных рисков при эксплуатации электроустановок в аграрно-промышленном комплексе региона. Для расчета используются экспертные системы и нейронные сети. На основе разработанной системы можно осуществлять расчет текущего пожарного риска эксплуатации электроустановки и с помощью имитационного моделированию определить какие профилактические мероприятия принесут наибольший эффект по уменьшению этого риска.

Ключевые слова: *пожарные риски электроустановок, экспертные системы, нейронные сети.*

В настоящее время в аграрной отрасли народного хозяйства активно эксплуатируются различные технические устройства и электроустановки. Однако, наряду со всеми положительными сторонами их применения, они также являются источниками пожарной опасности, поэтому контроль их технического состояния является важнейшим направлением исследований.

По данным МЧС России около 1/3 всех пожаров происходят по электротехническим причинам. Сложившаяся ситуация представляет угрозу национальной безопасности страны, а также свидетельствует о необходимости совершенствования систем оценки текущего пожарного состояния и прогнозирования уровня пожароопасности эксплуатации электроустановок. Согласно ГОСТ 12.1.004-91 [1] допустимый уровень пожарной опасности для людей должен быть не более 1×10^{-6} воздействия опасных факторов пожара, превышающих предельно допустимые значения, в год в расчете на каждого человека. В реальности этот показатель составляет порядка 5×10^{-4} . С целью улучшения ситуации необходима разработка методики оценки пожарных рисков на основе наиболее адекватного набора рискообразующих факторов, которая будет способна не только оценивать уровень опасности эксплуатации электроустановки, но и

давать прогноз о возможности возгорания в будущем. Разработка такой методик и ее автоматизация возможна только с применением современных систем с интеллектуальными компонентами, в работе применены нейронные сети как наиболее оптимальный метод для создания систем поддержки принятия решений и прогнозирования.

Для представления предметной области применена концепция человеко-машинной системы «Человек-Электроустановка-Среда», согласно которой пожарную опасность электроустановки характеризуют три группы обобщенных рискообразующих факторов, которые во взаимодействии создают предпосылки для возникновения аварий и пожаров.

Рассматриваемая человеко-машинная система (ЧМС) представляет собой обобщенную слабоструктурированную динамическую модель, компоненты которой имеют различную физическую природу: люди (электротехнический персонал, операторы, лица принимающие решения) и электроустановки, взаимодействующие в рабочей среде для достижения поставленных целей. Безопасность условий труда работников производственного объекта обеспечивается комплексом организационно-технических мер, препятствующих возникновению аварий и пожаров. Эффективность ЧМС определяется надежностью функционирования человека – оператора и состоянием электроустановки, используемая модель имеет трехкомпонентную структуру:

Анализ существующих подходов к оценке и управлению пожарной безопасностью применительно к аграрной отрасли показал, что весьма перспективным представляется разработка метода интеллектуального анализа данных о пожарных рисках и создания на этой основе программного обеспечения с применением нейронных сетей. Преимуществом их является способность решать задачи, в которых неизвестны закономерности развития ситуации и зависимости между входными и выходными данными и способность показывать хорошие результаты в случаях, когда невозможно применение традиционных математических методов и экспертных систем.

С целью создания программы были собраны данные о текущем состоянии электроустановок и на их основе сформирована база знаний, обучившись на основе которой нейронная сеть проводит вычисления уровня пожарной опасности, а также генерирует рекомендации по проведению профилактических мероприятий на основе имитационной модели.

Математически модель данной задачи можно представить в следующем виде:

$$R_f = \langle \text{Expert}, H, Y_{\text{PSI}}, \text{Ner}, X, S, A \rangle, \quad (1)$$

где Expert – множество экспертов, участвующих в оценке; Z – множество целей, подзадач, узлов дерева; H – шкала оценки интегральных показателей, Ner – применяемый метод оценивания – нейронная сеть; X – множество входных, измеряемых показателей нижнего уровня; S – настроенный решатель (механизм вывода); A – совокупность правил текстовой интерпретации значений показателей модели; Str – структура элементов модели.

База знаний хранит обучающую выборку нейронной сети, описывающую область решения задачи. Обучающие выборки нейронной сети представлены в виде массива примеров $\text{prim} = (x, o)$, где $x = (x_1, \dots, x_{N_f})$ – значения показателей, подаваемые на вход нейронной сети; N_f – количество входных факторов в примере; o – значение выходного фактора.

Математическую модель пожарного риска электроустановок в общем виде можно представить следующей формулой:

$$R_f = N(F_{\text{PSI}}(x_1, \dots, x_{42})), \quad (2)$$

где $N()$ – нейросетевая функция, F^{PSI} – метод вычисления главных компонент, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – исходные показатели модели.

Точность и адекватность модели оценивается ошибкой, выдаваемой в результате решения задачи. Адекватной считается модель, если в результате расчетов она показывает минимальное отклонение от мнения экспертов:

$$\rho (R_f) = |y_{R_f} - o_{R_f}| / o_{R_f} \rightarrow \min, \quad (3)$$

где y_{R_f} – значения, рассчитанные с помощью нейронной сети; o_{R_f} – экспертные значения.

Для формирования обучающей и тестовой выборки для нейронной сети было обследовано 70 различных электроустановок предприятия АПК. На основе этих данных сформирована обучающая выборка, состоящая из 42 входных параметров, характеризующих 70

электроустановок и 1 выходной параметр, содержащий значение интегрального пожарного риска.

Применение нейронных сетей для большого количества показателей (в нашем случае 42) оправдано только при наличии большой обучающей выборки, более 1000 обучающих примеров для качественного обучения нейросети, сбор такого количества данных является очень трудоемкой задачей, которая решается с помощью различных методов математической статистики. На основе проведенного анализа [2] был выбран метод главных компонент, так как он позволяет проводить расчеты с учетом всех используемых параметров.

На основе разработанной методики был написан программный комплекс. Проводящий расчеты. Для подтверждения адекватности проводимых расчетов проведены контрольные испытания для 10 электроустановок, для которых сначала был рассчитан текущий уровень поджарного риска, а потом после проведения профилактических мероприятий по параметрам, рекомендуемым программой. Результаты проведения эксперимента представлены в таблице 1.

При переводе значений из принятого диапазона в значения, соответствующие ГОСТ Р 12.1.004-91 принято, что 1 соответствует неприемлемому значению пожарного риска, $\leq 1 \times 10^{-4}$, 2 - 1×10^{-5} , а 3 1×10^{-6} – желаемому, но труднодостижимому показателю.

$$\hat{y} = \begin{cases} 1 = 1 \times 10^{-4} \\ 2 = 1 \times 10^{-5} \\ 3 = 1 \times 10^{-6} \end{cases} \quad (6)$$

Перевод полученных значений в используемом диапазоне в данные, соответствующие ГОСТ Р 12.1.004-91 проводился в соответствии со следующей формулой:

$$x = \frac{1}{\hat{y} \times 10^{(\hat{y}+3)}}, \quad (7)$$

где x – значение в диапазоне, соответствующем соответствующие ГОСТ Р 12.1.004-91, \hat{y} – значение в диапазоне, используемом в программе.

Таблица 1– Результаты проведения расчетов

Порядковый номер ЭУ	Значение пожарного риска	
	до проведения мероприятий	после проведения мероприятий

	В принятом диапазоне	В значениях ГОСТ Р 12.1.004-91	В принятом диапазоне	В значениях ГОСТ Р 12.1.004-91
ЭУ 1	2,20	$4,52 \times 10^{-5}$	2,758	$3,625 \times 10^{-5}$
ЭУ 2	2,25	$4,43 \times 10^{-5}$	2,985	$3,35 \times 10^{-5}$
ЭУ 3	1,98	$5,03 \times 10^{-4}$	2,523	$3,96 \times 10^{-5}$
ЭУ 4	2,36	$4,23 \times 10^{-5}$	2,947	$3,393 \times 10^{-5}$
ЭУ 5	2,05	$4,86 \times 10^{-5}$	2,957	$3,381 \times 10^{-5}$
ЭУ 6	1,45	$6,85 \times 10^{-4}$	2,025	$4,938 \times 10^{-5}$
ЭУ 7	3,01	$3,31 \times 10^{-6}$	3,014	$3,317 \times 10^{-6}$
ЭУ 8	2,48	$4,02 \times 10^{-5}$	2,987	$3,34 \times 10^{-5}$
ЭУ 9	1,97	$5,06 \times 10^{-4}$	2,548	$3,92 \times 10^{-5}$
ЭУ 10	2,23	$4,47 \times 10^{-5}$	2,486	$4,02 \times 10^{-5}$
Среднее значение	2,203	$1,964 \times 10^{-5}$	2,517	$0,342 \times 10^{-5}$

Среднее значение интегрального пожарного риска для рассматриваемых 10 электроустановок уменьшилось с $1,96 \times 10^{-5}$ до $0,342 \times 10^{-5}$, что позволяет сделать вывод о целесообразности применения разработанной программы для составления плана проведения профилактических мероприятий по снижению уровня пожарного риска электроустановок на предприятии.

Библиографический список

- ГОСТ 12.1.004-91 Межгосударственный стандарт Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность
- The expert system for assessing fire risks of electrical installations in agrarian industrial complex based on neural networks / М.А. Gabova, О.К. Nikolsky, М.В. guner - DOI:10.1088/1742-6596/2142/1/012005 // Journal of Physics: Conference Series 2142 (2021) 012005
- Государственный доклад «О состоянии защиты населения и территорий Российской Федерации от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера в 2020 году» / - М.: МЧС России. ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2021, 264 с.
- Еремина, Т. В. Метод оптимизации техногенных рисков в электроустановках производственного объекта / Т. В. Еремина, И. А. Шаньгин, М. Б. Балданов // Безопасность труда в промышленности. – 2021. – № 7. – С. 73-78. – DOI 10.24000/0409-2961-2021-7-73-78.

**Архитектурные особенности нейросети для
обнаружения состояния сонливости водителя**
Н.Н. Калинин¹, Ю.Г. Скурыдин¹, Е.М. Скурыдина²
¹АлтГУ, г. Барнаул, ²АлтГПУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию архитектурных особенностей нейросети для обнаружения состояния сонливости водителя. Показаны библиотеки, методы и инструменты, позволяющие реализовать нейросеть, описаны слои, используемые в них функции и параметры.

Ключевые слова: *компьютерное зрение, состояние сонливости, нейросеть, архитектура нейросети, слои нейросети.*

Пребывание водителя в состоянии сонливости или микросна означает его высокую степень утомления, и способно привести к значительному ухудшению работоспособности, замедлению времени реакции на происходящие события. Возникает ситуация, аналогичная той, которую вызывает алкоголь [1]. Во время вождения подобные симптомы чрезвычайно опасны, поскольку значительно увеличивают вероятность возникновения дорожно-транспортных происшествий (ДТП).

Автомобильные компании, такие как Mercedes-Benz, Tesla и другие, разрабатывают технологии машинного зрения [2], способствующие предотвращению ДТП из-за сонливости водителей. Компания Samsung в сотрудничестве с компанией Eyesight предложила технологию [3], которая может быть использована для отслеживания внимания водителей посредством считывания биометрических параметров лица. Несмотря на достижения, большинство из подобных систем запатентованы [3], и применяются лишь в дорогостоящих автомобилях. Общей проблемой современных моделей машинного зрения является и то, что большинство применяемых в них алгоритмов громоздки, и требуют специального оборудования для запуска. Они не могут эффективно работать на устройствах с низкой вычислительной мощностью.

Целью исследования является разработка архитектуры и подбор параметров нейронной сети для обнаружения состояния сонливости водителя, способной работать на устройствах низкой и средней вычислительной мощности.

На вход поступает изображение, на котором присутствует лицо человека. Изображение обрабатывается на предмет обнаружения лица. Нейронная сеть, получая обработанное изображение, определяет состояние сонливости и точность его обнаружения через функцию score.

Выбор алгоритма машинного обучения на основе нейронной сети был сделан исходя из следующих соображений:

- во-первых, библиотеки нейронного обучения, такие как TensorFlow и Theano позволяют глубоко настроить архитектуру сети и параметры ее обучения,
- во-вторых, имеется возможность менять конфигурацию модели от однослойной нейронной сети до многослойной.

Перед обучением нейронной сети необходимо определиться с признаками, определяющими состояние открытого и закрытого глаза. Также следует определить критерии для принятия решения о соответствующем признаке. Для этого был выделен булев ответ: глаз открыт – 1, закрыт – 0. Набор данных, подходящий под описанные критерии, был найден на сайте Kaggle [4].

Ввиду ограниченности вариаций закрытого и открытого глаза, обучающая выборка формируется путем сохранения изображений разного размера и цветности. Предварительно подготовлено 50% изображений с открытым глазом и 50% с закрытым глазом, то есть в работе использовались сбалансированные классы. Для каждого класса использовано 80% изображений обучающей выборки. Написан код, реализующий аугментацию данных для искусственного увеличения обучающей выборки.

После подготовки изображений к обучению определяется модель нейронной сети. В работе использована сверточная нейронная сеть простой структуры. Выбор обусловлен тем, что ее архитектура дает лучшие результаты при работе с изображениями и видеопотоками [5]. Далее разработана архитектура нейронной сети, фрагмент которой представлен на рисунке 1.

```
bmodel = Conv2D(32, (5, 5), input_shape=(1, 28, 28), activation='relu')
hmodel = bmodel.output
hmodel = Flatten()(hmodel)
hmodel = Dense(64, activation='relu')(hmodel)
hmodel = Dropout(0.5)(hmodel)
hmodel = Dense(2, activation='softmax')(hmodel)
```

Рисунок 1 – Фрагмент архитектуры нейронной сети

Настройка процесса обучения выполняется с помощью метода `compile`. Метод содержит три аргумента [5]:

- оптимизатор «Adam» – как один из наиболее эффективных алгоритмов оптимизации в обучении нейронных сетей;
- функция вычисления ошибок;
- список метрик – в модели использована метрика `accsgasy`, которая вычисляет долю правильных ответов сети.

Оценка качества модели проверялась методом `evaluate` [5]. При проверке точности обучения на тренировочном наборе данных, достигнута точность обучения, равная 93%. При использовании изображений глаз, взятых не с обучающего набора данных, модель дает результаты, показанные на рисунке 2.

После обучения сети необходимо применить ее на тестовых изображениях самого человека, а не только на изображении его глаз. Перед началом определения состояния человека на фото, необходимо найти его лицо, а далее глаза. В связи с этим было решено использовать библиотеку `Face Recognition` [6].

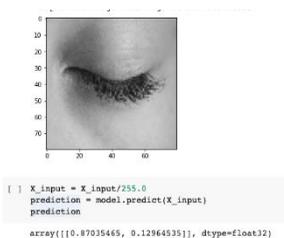


Рисунок 2 – Проверка точности обучения модели на фотографии глаза, взятой из интернета. Первое число массива отвечает за значение закрытого глаза, второе – открытого.

После объединения библиотеки и обученной нейронной сети, получены результаты, показанные на рисунке 3.



Рисунок 3 – Проверка работоспособности модели по фотографии человека.

Обученная модель в совокупности с библиотекой распознавания лица человека хорошо работает с изображениями спящих и бодрствующих людей даже в том случае, когда глаз человека находится под каким-либо углом.

В результате выполнена разработка архитектуры и подбор параметров нейронной сети для обнаружения состояния сонливости водителя, способной работать на устройствах низкой и средней вычислительной мощности

Библиографический список

1. Williamson, A.M.; Feyer, A.M.; Mattick, R.P.; Friswell, R.; Finlay-Brown, S. Developing measures of fatigue using an alcohol comparison to validate the effects of fatigue on performance // *Accid. Anal. Prev.* – 2001. – V. 33. – pp. 313-326. DOI: 10.1016/s0001-4575(00)00045-2
2. M. Benz, Mercedes benz safety - s class. [Электронный ресурс] – URL: <https://www.mercedes-benz.co.uk/passengercars/mercedes-benz-cars/models/s-class/saloon-w222/safety/intelligent-drive.module.html>
3. Muze, Eyesight. [Электронный ресурс] – URL: <https://www.eyesight-tech.com/>
4. Kaggle [Электронный ресурс] – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/dheerajperumandla/drowsiness-dataset>
5. Криспин Л., Грегори Д. Гибкое тестирование. Практическое руководство для тестировщиков ПО и гибких команд. – СПб.: Вильямс, 2010. – 365 с.

6. Face Recognition [Электронный ресурс] – URL:
https://github.com/ageitgey/face_recognition

Построение имитационных моделей распространения вирусных заболеваний

А.В. Кульшин, А.В. Ефанов, Т. Попова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье рассматривается построение имитационных моделей распространения различных вирусных заболеваний на территории Алтайского края.

Ключевые слова: *имитационная модель, вирусные заболевания, язык программирования Python, среда имитационного моделирования Anylogic.*

При невозможности экспериментировать на реальном объекте в медицине часто используют имитационное моделирование. Имитация – это процесс «выполнения» модели, проводящий её через (дискретные или непрерывные) изменения состояния во времени. Цель имитационного моделирования состоит в воспроизведении поведения исследуемой системы на основе результатов анализа наиболее существенных взаимосвязей между ее элементами или другими объектами – разработке симулятора исследуемой предметной области для проведения различных экспериментов. В медицине к имитационному моделированию прибегают, когда: дорого или невозможно экспериментировать на реальном объекте; невозможно построить аналитическую модель: в системе есть время, причинные связи, последствия, нелинейности, стохастические (случайные) переменные; необходимо смитировать поведение системы во времени. Имитационную модель можно рассматривать как множество правил, которые определяют, в какое состояние система перейдёт в будущем из заданного текущего состояния.

В работе рассмотрены 3 реализованных имитационных модели.

1. Модель распространения ветряной оспы

За основу модели распространения ветряной оспы взята классическая SIR-модель, предложенная Кермаком и Маккендриком в 1927 г. В ней рассматривается три группы индивидов – восприимчивые к заболеванию (Susceptible), инфицированные (Infected) и переболевшие/умершие (Recovered/Removed). Передача инфекции осуществляется от инфицированных индивидов к восприимчивым. Считается, что переболевшие индивиды приобретают

иммунитет и не могут быть заражены вторично. Модель описывается системой 3-х дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -r \cdot S \cdot I, \quad \frac{dI}{dt} = r \cdot S \cdot I - \nu \cdot I, \quad \frac{dR}{dt} = \nu \cdot I, \quad (1)$$

$$S(t_0) = S_0, \quad I(t_0) = I_0, \quad R(t_0) = R_0.$$

Здесь $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ – численности восприимчивых, инфицированных и переболевших индивидов в момент времени t соответственно; r – коэффициент скорости передачи инфекции; ν – коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов.

Из системы уравнений (1) видно, что для общей численности популяции M выполняется закон сохранения:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0, \quad M(t) = S(t) + I(t) + R(t) = M = const.$$

Общее число заболевших в модели определяется по формуле:

$$Z(t) = M - S(t) = I(t) + R(t).$$

В работе использована модифицированная имитационная SEIR-модель распространения эпидемии. Здесь к трём состояниям в SIR-модели добавляется еще одно – Exposed (зараженный, находящийся в инкубационном периоде). Кроме того, в исследовании учитывается уровень риска в зависимости от возраста пациента, количество социальных связей, вероятность заражения, наличие вакцины в организме и другие.

Одним из методов имитационного моделирования является Монте-Карло симуляция. В основу построенных имитационных моделей положен метод Монте-Карло симуляции, суть которого заключается в построении математических моделей с использованием генератора случайных чисел. Метод Монте-Карло – общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи. Метод Монте-Карло относится к имитационному моделированию, в котором при расчете какой-либо системы воспроизводится и исследуется поведение всех ее компонентов.

Подобного рода модели помогают оценить скорость распространения инфекции, характеристики уязвимых групп населения, оптимальный возраст вакцинации и другие, связанные с заболеванием, социальные и экономические факторы.

Построение имитационных моделей методом Монте-Карло реализуется по следующим этапам:

- осуществляется декомпозиция системы на более простые части-блоки;

- формулируются законы и «правдоподобные» гипотезы относительно поведения как системы в целом, так и отдельных ее частей;

- в зависимости от поставленных перед исследователем вопросов вводится так называемое системное время, моделирующее ход времени в реальной системе;

- формализованным образом задаются необходимые феноменологические свойства системы и отдельных ее частей;

- случайным параметрам, фигурирующим в модели, сопоставляются некоторые их реализации, являющиеся постоянными в течение одного или нескольких тактов системного времени.

Программная реализация модели осуществлена на высокоуровневом языке программирования Python. Для программной реализации имитационной модели были отобраны следующие наиболее значимые параметры для каждого индивидуально-особенного человека: возраст, наличие выработанного иммунитета, длительность протекания заболевания, количество социальных связей, вероятность заражения, наличие вакцины в организме и другие.

2. Общий подход к моделированию распространения эпидемии

Модель описывает распространение инфекционного заболевания среди населения. В данной модели не учитывается все разнообразие населения, а лишь четыре категории людей: Susceptible – восприимчивые к заражению люди, которые еще не были заражены вирусом; Exposed – люди, находящиеся в латентной стадии заражения (они уже заражены, но еще не могут заражать других); Infectious – люди в активной стадии заражения (они могут заражать других людей); Recovered – выздоровевшие люди (они уже приобрели иммунитет к данному заболеванию).

Модель реализована в среде имитационного моделирования Anylogic.

3. SEIR-модель распространения эпидемии COVID-19

В модели стоит задача прогнозирования размеров потенциального социального ущерба, сроков пика и окончания распространения эпидемии, а также оценки эффективности возможных управленческих решений, направленных на предотвращение распространения эпидемии. В данной модели каждый индивидуум может находиться в

одном из четырех возможных состояний: Susceptible → Exposed → Infected → Removed.

Анализ распространения и тяжести протекания болезни при COVID-19 за прошедший период, предполагает необходимость разделения всей исследуемой популяции на некоторые возрастные категории, т.к. по большей части у молодого населения болезнь протекала в легкой стадии. В то же время, у старшего населения очень часто болезнь протекала в тяжелой форме и заканчивалась зачастую летальным исходом.

Имитационная модель реализована на языке программирования Python.

Разработка системы трекинга и обработки движений

С.П. Миненков, Г.В. Кравченко

АлтГУ, г. Барнаул

В статье приведено описание систем захвата движений при анимации 3D моделей. Подробно рассмотрена технология Motion Capture. Обоснован выбор программного обеспечения и электронных компонент для сборки аппаратной части тестового прототипа системы трекинга и обработки движений.

Ключевые слова: *анимация 3D моделей, Motion Capture, технология захвата движений, обработка движений, система трекинга.*

Человечество еще с начала времен ищет способы развлечь себя. Если в первобытные времена это были пляски у костра и какие-то примитивные игры, то сейчас выбор стал гораздо шире. Это музыкальные концерты, спектакли в театрах, походы в кино и многое другое.

С развитием технологий грани между сферами все больше стираются. Сейчас, например, на сцене рядом с живыми – «материальными» – артистами может выступать «виртуальный» – голографический. Как это было в случае с японским вокалоидом Хатсуне Мику. Все это не могло бы быть возможным без развития цифровых технологий.

Также, например, медленно стирается и грань между играми и кино. И дело не только в фотореалистичной графике и физике объектов. Есть сам жанр игр, который так и называется – интерактивное кино. В отличие от обычных игр, там мало свободы действий, но зато имеется возможность своими действиями менять ход повествования, что уже выходит за рамки привычного кинематографа.

Да и сам кинематограф все больше переходит на иной формат. Сейчас уже не снимают тысячную массовку, не делают декорации и модели для разрушения, все это заменяют компьютерными моделями, в некоторых случаях могут заменить даже актеров.

Но одной реалистичной модели мало, надо заставить ее двигаться. Анимация – это следующий этап после непосредственного создания модели.

Технология создания анимаций 3D-моделей развилась от

вертексной анимации – когда анимация сохраняется в виде последовательности координат положений вертексов модели для каждого кадра, до «костной» анимации – когда положения меняют лишь «кости» модели, а вертексы автоматически сдвигаются или деформируются по особому алгоритму в зависимости от «веса» (параметра, отвечающего за то, насколько сильно изменения кости передаются вертексу).

До конца XX века модели анимировались вручную, а потом свое развитие получила технология Motion Capture – технология захвата движений. Она, благодаря особой системе и датчикам, позволяла отследить движения актера на площадке и перенести их на компьютерную модель [3].

В настоящее время технология Motion Capture широко применяется в таких сферах, как:

- киноиндустрия – для формирования видеоконтента в результате наложения движений актера на виртуальные модели персонажей;
- спорт – для развития мышечной памяти и рефлексов, выработки корректных движений спортсменов;
- медицина – для диагностики нарушений опорно-двигательного аппарата и разработки реабилитационных методик;
- игровая индустрия – для обеспечения полноценного эффекта присутствия в виртуальной окружающей среде с максимально точной визуализацией движений тела.

Отметим разнообразие видов систем захвата движений: оптические, акустические, магнитные, механические, инерциальные (гироскопические) [1].

Оптические системы используют для захвата совокупность систем камер и датчиков на актере, их можно разделить на две основные группы: оптические активные и оптические пассивные. В оптически активных системах датчики сами излучают сигнал (ИК свет) принимаемый камерами, а в оптически пассивных рядом с камерами ставятся излучатели сигнала (ИК лампы), который датчики на актере просто отражают.

У этих двух подходов есть свои достоинства и недостатки. К достоинствам активных систем стоит отнести более высокую точность определения датчиков, т.к. они могут передавать свой ID (уникальный номер), что позволяет алгоритму достоверно определить, что это за датчик, и на каком месте на актере он находится. Но за это приходится расплачиваться более громоздким оборудованием, располагаемым на актере.

Оптически пассивные системы лишены этого недостатка, но они менее точные в определении датчиков: датчик на актере может выйти из поля зрения камер или быть перекрытым как самим актером, так и ассистентом или другим актером. И тогда алгоритму приходится самому, на основе имеющихся данных, угадывать положение «исчезнувшего» датчика, что не всегда удается сделать верно, особенно, если перекрыто более одного датчика.

Акустические системы используют триады приемников, расположенных на удалении от актера, и набор датчиков, расположенных на разных частях тела человека [4].

Магнитные системы используют наборы магнитов и набор датчиков, чувствительных к изменениям магнитного поля [2].

Инерциальные системы используют вместо маркеров датчики положения в пространстве – акселерометры и гироскопы. Они передают данные о своем положении в пространстве, которые потом обрабатываются особыми алгоритмами.

Так же отметим две технологии, которые вошли на рынок совершенно недавно – это безмаркерный захват движений и генеративная анимация. Безмаркерный захват движений позволяет из обычного видео или последовательности кадров создать анимацию для 3D-модели. Генеративная анимация воссоздает промежуточные состояния между заданными ключевыми кадрами анимации модели.

В профессиональной среде высокобюджетных игр и фильмов сейчас используются оптически пассивные системы, которые в свою очередь, как и любое профессиональное оборудование, являются довольно громоздкими и дорогими.

В среде инди-разработчиков и творцов отклик нашли гироскопические системы захвата, но и они не являются бюджетными вариантами, т.к. их цена в среднем начинается от 100 тысяч рублей. Поэтому было решено создать что-то свое, что не сильно бы уступало в качестве промышленным образцам, но стоило бы в разы дешевле.

На текущем этапе для сборки аппаратной части тестового прототипа были выбраны следующие электронные компоненты:

- Arduino UNO – аппаратная платформа на базе микроконтроллера ATmega328;
- MPU-9250 – 9-осевой датчик положения в пространстве, включающий в себя акселерометр, магнитометр и гироскоп;
- TCA9548A – мультиплексор для шины I²C, т.к. все датчики MPU имеют одинаковый адрес, мультиплексор необходим, чтобы на шину можно было подключить более одного такого датчика.

В качестве программной платформы был выбран игровой движок

Unity, т.к. он прост в освоении, легок и имеет необходимый базовый функционал для работы с 3D-моделями и скелетной анимации.

Библиографический список

1. Вабищевич А.Н., Восков Л.С. Беспроводная система захвата движения на основе платформы беспроводной сенсорной сети и инерциальных датчиков // Научные труды (Вестник МАТИ). – 2013. – Выпуск 20 (92). – С. 200-210.

2. Abyarjoo F., Barreto A., Cofino J., Ortega F.R. Implementing a Sensor Fusion Algorithm for 3D Orientation Detection with Inertial/Magnetic Sensors // URL: <https://daimonmicha.bplaced.net/media/raspberrypi/Algo3DFusionsMems.pdf> (дата обращения: 02.06.2022).

3. Kitagawa M., Windsor B. MoCap for Artists: Workflow and Techniques for Motion Capture. – Oxford, England: Focal Press, 2008. – 216 p.

4. Vlastic D., Adelsberger R., Vannucci G., Barnwell J., Gross M., Matusik W., Popovic J. Practical Motion Capture in Everyday Surroundings // Journal ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2007. – vol. 26, Issue 3, pp. 35:1-35:9.

Реализация сервиса для проведения корпоративных видеоконференций с применением методов обработки естественного языка

О.Н. Половикова, Н.С. Фелькер

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье представлена реализация сервиса для проведения видеоконференций для корпоративного пользования. Разработанный сервис основан на использовании алгоритмов суммаризации, классификации текстовых данных.

Ключевые слова: *WebRTC, web-приложение, суммаризация, классификация, транскрибация, протокол передачи данных, видеоконференция.*

За последние годы все чаще можно услышать словосочетание “удаленная работа”. Удаленные рабочие места были необходимостью из-за ситуации с пандемией коронавируса. Компаниям пришлось быстро реагировать на новые условия рынка и менять уже устоявшиеся рабочие места на удаленные. Дистанционная работа имеет ряд преимуществ, как для компании, так и для сотрудников, но также имеет и ряд недостатков. Одним из существенных недостатков является – отсутствие профессионального общения. Сотруднику зачастую не хватает своевременной информации, как официальной, так и неофициальной, несмотря на то, что в компании может существовать внутрикорпоративный портал и почта.

Решением выступили системы мгновенного обмена сообщениями, системы видеоконференций, IP-телефония. Поэтому неудивительно, что последние два года мы наблюдаем бум онлайн-общения. Рынок корпоративный мессенджеров очень крупный, таким образом компании могут выбрать готовый продукт под свои требования, например: Microsoft Teams, Zoom, Яндекс.Телемост, Google Meet и др. Но в некоторых компании есть конфиденциальный данные, которые не должны попадать в руки к третьим лицам, также облачные сервисы не гарантируют малую задержку передачи сообщений, либо готовый продукт не устраивает компанию в силу других причин, то единственным решением будет создание собственного продукта.

Целью данной работы является разработка веб-приложения для проведения корпоративных видеоконференций с транскрипцией аудио-потока, с функциями хранения видеозаписей конференции и поиска по ключевым словам. А также, реализовать алгоритм суммаризации полученного, путем транскрипции, текста конференции и алгоритм тематического моделирования.

Задача – Проектирование и реализация веб-приложения позволяющего передавать потоковые данные в режиме реального времени, управлять пользователями и рабочим местом видеоконференции. Создание базы данных для хранения видео и текстовых записей. Интеграция алгоритмов машинного обучения - Латентное размещение Дирихле и Экстрактивная суммаризация.

Для создания веб-приложения использовался фреймворк Django, для работы с базой данных была выбрана СУБД PostgreSQL, для передачи потокового видео был взят готовый сервер с открытым исходным кодом, написанным на языке С и использующий технологию WebRTC. WebRTC – стандарт, который описывает передачу потоковых аудиоданных, видеоданных и контента от браузера и к браузеру в режиме реального времени без установки плагинов или иных расширений. Стандарт позволяет превратить браузер в оконечный терминал видеоконференцсвязи, достаточно просто открыть веб-страницу, чтобы начать общение [1]. Для транскрипции использовался API Google Speech-to-Text. Транскрипция – это перевод информации из аудио или видео в текст.

Алгоритм тематического моделирования – Латентное размещение Дирихле (LDA) реализован с помощью языка программирования Python и модуля Gensim. LDA - позволяет определить латентные (скрытые) тематики в тексте, считая, что тематики сформированы на базисе вероятности вхождения слова в заданном тексте. Для суммаризации текста был реализован алгоритм экстрактивная суммаризация на языке Python и модуля spaCy. Данный алгоритм прост в понимании и реализации, он извлекает из текста предложения, которые затем образуют некую аннотацию не меняя структуру предложений. Ниже представлен пример фрагмента кода функции для суммаризация текста:

```
sorted = sorted(text.items(), key=lambda kv: kv[1],
reverse=True)
i = 0
for i in range(len(sorted)):
    end_text.append(str(sorted[i][0]).capitalize())
    i += 1
    if(i >= limit):
```

```
break  
return ' '.join(end_text)
```

На данном этапе работы реализована основная архитектура веб-приложения, интегрированы алгоритмы машинного обучения, внедрен функционал потоковой передачи, осуществляется хранение и обработка данных.

Библиографический список

1. TrueConf. Видеоконференции в браузере. [Электронный ресурс]. – URL: <https://trueconf.ru/webrtc.html> (Дата обращения: 05.06.2022).
2. Веб-приложения. [Электронный ресурс]. – Википедия. Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Веб-приложение>.
3. Руководство по Django. [Электронный ресурс]. – Веб-документация MDN Mozilla. Режим доступа: <https://developer.mozilla.org/ru/docs/Learn/Server-side/Django>.
4. Дж. Плас: Python для сложных задач. Наука о данных и машинное обучение // Плас Дж. Вандер. – Питер, 2019 г.
5. Воронцов К.В. Лекции по вероятностным тематическим моделям. [Электронный ресурс] – MachineLearning.ru. Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/voron-2013-ptm.pdf>.
6. Латентное размещение Дирихле. [Электронный ресурс]. – Википедия. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Латентное_размещение_Дирихле.
7. Суммаризация текста: подходы, алгоритмы, рекомендации и перспективы. [Электронный ресурс]. – Хабр. Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/514540/>.
8. Новиков Б. А: Основы технологий баз данных: учеб. пособие // Б. А. Новиков, Е. А. Горшкова, Н. Г. Графеева. – ДМК Пресс, 2020 г.

Использование современных информационных технологий для снижения травматизма населения города Барнаула

С.С. Пронин², В.А. Антропов², А.И. Пиянзин^{1,2}

¹*АГМУ, г. Барнаул;*

²*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию возможности использования современных компьютерных технологий для уменьшения травматизма населения и быстрого реагирования администрации города на опасные участки.

Ключевые слова: *люди, медицина, искусственный интеллект, машинное обучение, мобильное приложение, веб-сайт, коммуникации.*

Сегодня мы наблюдаем большое количество программ для смартфонов в таких магазинах приложений как Google Play, App Store, App Gallery. У большинства приложений имеется много проблем: невозможность масштабирования и встраиваемости в другие системы, большое количество рекламы, программы сделаны с целью получения дохода, а не с целью развивать и улучшать продукт. Поэтому мы решили сделать качественное приложение с целью помочь родному городу путём организации связи с медицинскими учреждениями и людьми, ответственными за уборку территорий.

Для начала мы наладили связь с медицинскими учреждениями и получили данные о травмоопасных местах, в которые выезжала скорая помощь. Проанализировав эти данные, мы получили представление на карте наиболее опасных (с точки зрения количества пострадавших) участков во время гололёда, за которыми нужен особый контроль. Отсюда следует, что полученную информацию об опасных участках необходимо быстро отправить в городскую администрацию и владельцам закреплённых территорий для оперативного реагирования.

Мы создали приложение [1,2] для налаживания связи между руководством скорой помощи и администрацией города, что позволило своевременно проводить уборку на дорогах городах и уменьшить количество пострадавших людей во время гололёда. Когда своевременно не проводится уборка территории тогда имеется

возможность прийти на помощь волонтерам и студентам, которые помогут провести уборку территории в труднодоступных местах.

Мобильное приложение не ограничивается только связью с организациями, но ещё предназначено для широкого пользования населения города. Любой желающий сможет скачать его через любой из магазинов приложений. Для всех пользователей приложение будет делать предупреждающую рассылку об изменении погодных условий, опасных участках при построении маршрута и предлагать обходной (рекомендуемый) путь с меньшей вероятностью получения травмы. Приложение будет распознавать падение человека и автоматически обозначать потенциально опасное место на карте. Но ни одно приложение не совершенно, поэтому человеку нужно будет подтвердить своё падение и, по возможности, сфотографировать это место, чтобы администрация и владельцы этой территории могли быстро отреагировать на такое событие. Здесь же пользователь может вызвать скорую помощь, которая будет реагировать быстрее благодаря тому, что мы исключаем оператора как посредника, который передаёт информацию врачам и только после этого производится выезд.

Наше приложение автоматизирует процессы, оповещающие пользователей об опасных участках и отправляет уведомления для сотрудников медицинских учреждений. С помощью технологий искусственного интеллекта [3] мобильное приложение, используя данные о погоде, будет прогнозировать опасные участки и сообщать владельцам закреплённых территорий о возможности их возникновения. Планируется создание базы данных территорий [4,5] и ответственных за их уборку, чтобы в случае невыполнения обязанностей можно было легко узнать виновных.

Мы заключили договоры партнёрства: с руководством станцией скорой помощи и получили данные о травматизации населения в период гололёда 2021-2022гг., с представителем комитета по социальной политике Барнаульской государственной думы Мариной Понкрашёвой. Работа выполнялась при поддержке: центра развития технологического предпринимательства, трансфера технологий и управления интеллектуальной собственностью Алтайского государственного университета, Общероссийского народного фронта Алтайского края, Института Математики и Информационных технологий Алтайского государственного университета.

Библиографический список

1. Изучаем программирование на JavaScript / Маликова С., Матвеев Е. 2018 – 640 с.

2. Android. Сборник рецептов. Задачи и решения для разработчиков приложений / Ключин Д.А. 2018 – 759 с.

3. Рашка С. Python и машинное обучение. -ДМК прес, 2017. -418 с.

4. Проектирование и реализация баз данных в СУБД MySQL с использованием MySQL Workbench. Методы и средства проектирования информационных систем и технологий. Инструментальные средства информационных систем. Учебное пособие / Мартишин С.А., Симонов В.Л., Храпченко М.В. 2018 – 160 с.

5. Основы технологий баз данных: учеб. пособие / Б. А. Новиков,

Е. А. Горшкова; под ред. Е. В. Рогова. — М.: ДМК Пресс, 2019. — 240 с.

Оценка времени вычисления Supercookie для решения задачи аутентификации пользователя

А.А. Саломатин¹

*¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, г. Москва*

Статья посвящена исследованию применения браузерного атрибута Supercookie в задаче аутентификации пользователя. Описаны принципы формирования идентификатора Supercookie, а также проведён эксперимент по определению времени вычисления признака. Результаты эксперимента и исследование особенностей работы с Supercookie позволяют выявить некоторые преимущества и недостатки использования Supercookie в качестве одного из идентификаторов пользователя, а также дают предпосылки для дальнейших исследований.

Ключевые слова: *кибербезопасность, Supercookie, браузерные атрибуты, аутентификация.*

В наши дни все большее внимание приобретает проблема кибербезопасности. Любые пользователи интернет-сетей, как обычные люди, так и особенно важные государственные инфраструктуры, подвергают себя рискам потери конфиденциальности, связанной с тем, что большинство веб-серверов активно собирает информацию о своих пользователях. В результате несмотря на то, что обеспечивается безопасность самого веб-сервера, безопасность посетителей ставится под угрозу.

Одним из решений проблемы является формирование цифрового следа пользователя на основе браузерных отпечатков [1]. Получение такого цифрового следа не требует значительного периода времени, а отбор наиболее информативных браузерных атрибутов, составляющих браузерный отпечаток, позволяет добиться желаемой точности. Исследования в данной области дают возможность использовать новые альтернативные технологии вычисления браузерных атрибутов. Одной из таких технологий является Supercookie [2,3]. Предлагаемое исследование направлено на то, чтобы определиться, является ли эффективным использование Supercookie наравне с другими стандартными признаками.

Supercookie использует значки для присвоения уникального

идентификатора посетителям веб-сайта (см. рис. 1).

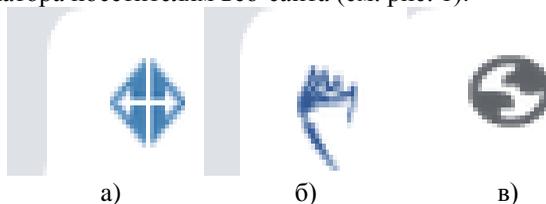


Рисунок 1 – Примеры значков веб-сайтов (случай в) – пустой значок)

Значки кэшируются в отдельной локальной базе данных системы, называемой кэшем favicon (F-Cache). Записи данных F-кэша включают посещенный URL-адрес (поддомен, домен, маршрут, параметр URL), идентификатор значка и время жизни (TTL). Когда пользователь посещает веб-сайт, браузер находит локальный F-Cache на наличие записи, содержащей URL активного веб-сайта, либо отправляет запрос GET на сервер для загрузки значка.

Идентификатор Supercookie формируется следующим образом. Если на сайте имеется N подразделов (путей) и для каждого из них задан значок (в том числе, возможно пустой), то при первом заходе на сайт пользователя можно перенаправить по этим путям. Тогда браузер сохранит только записи о доставленных значках в F-кэше. Комбинируя состояние доставленных и недоставленных значков для определенных URL-адресов для браузера, клиенту может быть присвоен уникальный идентификатор. В режиме чтения сервер всегда отвечает на запросы favicon со статусом ошибки, но нормально отвечает на все остальные запросы. Это сохраняет целостность кэшированных значков во время операции чтения, поскольку браузер не создает новую запись F-кэша.

При формировании цифрового следа важно, чтобы формирующие его признаки были информативны и могли быть получены за довольно короткие сроки.

Допустим, что для идентификатора Supercookie необходимо осуществить 2 перехода. Вычислим среднее время получения признака Supercookie на основе 100 проведенных измерений и сравним со временем получения основных информативных браузерных атрибутов [4]. В таблице 1 отражена часть проведенных измерений времени получения браузерного атрибута Supercookie.

Таблица 1 – Время получения браузерного атрибута Supercookie

№	Время, с
1	1.17

2	1.17
3	1.16
4	1.17
5	1.16
6	1.16
7	1.17
8	1.16
9	1.16
10	1.16

Итак, среднее время получения браузерного атрибута Supercookie с 2 переходами равно 1.17. Результаты его сравнения со средним временем для других атрибутов представлены на диаграмме на рисунке 2.

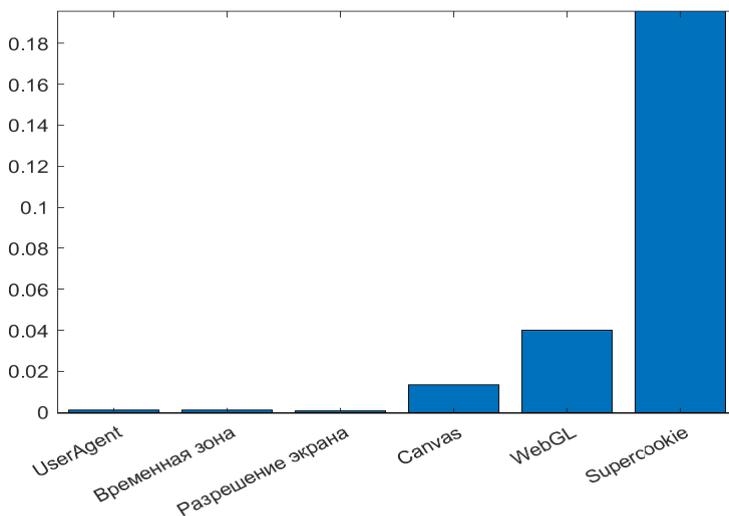


Рисунок 2 – Средние времена получения основных браузерных атрибутов и Supercookie

Из диаграммы видно, что необходимо намного больше времени на получение Supercookie, чем на вычисление других браузерных атрибутов. Однако, это может быть компенсировано хорошей степенью информативности признака (такое характерно для наиболее информативных Canvas и WebGL). Более того, его значение остается неизменным даже в случаях закрытия браузера, перезапуска операционной системы, использования набирающих популярность

VPN и может быть вычислено, если пользователь использует браузер в режиме инкогнито.

В дальнейшем планируется исследовать Superscookie отдельно и совместно с другими ранее изученными информативными компонентами в цифровом следе на основе браузерного отпечатка пользователя, чтобы определить точность правильной проверки подлинности пользователей и иметь возможность сделать итоговый вывод об эффективности применения Superscookie для решения задачи аутентификации.

Библиографический список

1. Jiang W., Wang X., Song X., Liu Q., Liu X. Tracking your browser with high-performance browser fingerprint recognition model // *China Communications*. – 2020. – №17 (3). – P. 168–175.
2. Бессонова Е.Е., Зикратов И.А., Росков В.Ю. Анализ способов идентификации пользователя в сети Интернет // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2012. – №6 (82). – С. 128–129.
3. Московченко В.М., Столяров Д.О., Горбунов А.А., Белянин В.И. Анализ технологий защиты от идентификации веб-браузеров // *NBI-technologies*. – 2018. – №12 (1). – С. 34–39.
4. Iskhakov A.Yu., Salomatin A.A. Estimation of the time for calculating the attributes of browser fingerprints in the user authentication task // *Topical Problems of Agriculture, Civil and Environmental Engineering (TPACEE 2020)*. – 2020. – № 224. – P. 1–9.

Оценка условий обитания, численности, половой и возрастной структуры популяции рачка *Artemia* озера Кулундинское

М.Г. Тримбач, М.М. Лукьянова, Л.А. Хворова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье рассматривается роль биотических и абиотических факторов среды на динамику численности разновозрастного состава популяции рачка *Artemia* в озере Кулундинское. Осуществлена визуализация и анализ абиотических факторов гипергалинных озер Алтайского края. Проведен анализ состояния популяции артемии в озере Кулундинское.

Ключевые слова: рачок *Artemia*, гипергалинные озера, озеро Кулундинское, температурный режим, минерализация воды.

В Западной Сибири разрабатывается принципиально новое направление использования природных биологических ресурсов – переработка биосырья водного происхождения. Исследования гипергалинных озер показали наличие промысловой сырьевой базы в мелководных артемиевых водоемах – рачка артемии (на стадии цист). Систематические мониторинговые исследования этих озер выявили наличие монокультуры – представителя ракообразных рода *Artemia* Leach1819, уникальность которого состоит в его высокой адаптационной способности к неблагоприятным факторам среды обитания и выметыванию при этом диапаузирующих яиц. Практическая ценность артемии связана с использованием диапаузирующих яиц рачка *Artemia* в качестве стартового корма для личинок ценных видов рыб и ракообразных.

Среди гипергалинных озер Алтайского края особое место занимают водоемы Кулундинской низменности.

Цель работы – изучение роли биотических и абиотических факторов среды на динамику численности разновозрастного состава популяции рачка *Artemia* в озере Кулундинское.

Для реализации цели исследования в работе были решены две задачи:

- 1) Осуществлена визуализация и анализ абиотических факторов гипергалинных озер Алтайского края;

2) Проведен анализ состояния популяции артемии в озере Кулундинское.

Природные комплексы гипергалинных озёр находятся в тесной связи с климатическими условиями, которые формируют тепловой и водный балансы, условия жизнедеятельности организмов. Природные условия влияют на формирование биоты озёр, на озёрные накопления и химический состав воды.

Известно, что численность беспозвоночных регулируется как абиотическими, так и биотическими факторами среды, которые определяют динамику уровня воспроизводства биоресурса и его объемы добычи (вылова). Численность артемии зависит от ряда основных гидрологических и гидрохимических характеристик воды.

Озеро Кулундинское – самый крупный в Российской Федерации (728 км²) ультрагалинный артемиевый водоем. Оно расположено на территории Благовещенского, Славгородского и Табунского районов. Занимает центральную часть Кулундинской депрессии.

В естественных условиях гипергалинных озер главными факторами, лимитирующими развитие популяции артемии, являются: температура рапы, общая минерализация воды и уровенный режим водоема, лимитирующий объем «жилой» зоны рачков артемии, их диапаузирующих яиц (цист).

По многолетним наблюдениям (2002–2021 гг.) выявлена связь между температурой воды гипергалинных озер и численностью артемии предвзрослой стадии развития, численностью половозрелых самок, а также между температурой воды и плодовитостью самок, а также связь между минерализацией воды гипергалинных водоемов и численностью половозрелых самок, между минерализацией воды и важным продукционным показателем – плодовитостью самок.

Сбор гидробиологического материала осуществлялся д.б.н. Весниной Л.В. на постоянных литоральных и глубоководных станциях. На каждой станции измерялись: прозрачность воды; температура воды в поверхностном слое (на глубине не менее 0,2 м); соленость воды в поверхностном слое (на глубине не менее 0,2 м).

Для оценки условий обитания рачка артемии использовались также гидрометеорологические данные по количеству осадков, температуре воздуха, направлению и скорости ветра. Статистическую обработку материала проводили с помощью пакета прикладных программ Microsoft Excel.

Зоопланктон оз. Кулундинское представлен 9 видами, из которых 6 коловраток (*Rotiphora*), 1 гидробионт – из клadoцер (*Cladocera*) и 2 вида – из копепод (*Copepoda*). С увеличением солёности воды число

видов снижается, повышается роль артемии в сообществе и уменьшается доля в общей биомассе солоноватоводных видов.

В составе популяции артемии выделяли следующие группы: науплиальные, ювенильные (1,0–5,0 мм), предвзрослые (5,1–10,0 мм), половозрелые самки и самцы. Различали также летние тонкоскорлуповые яйца и диапаузирующие (цисты). В 2020 г. и в 2021 г. популяции жаброногого рачка артемии, принадлежащих к роду *Artemia* Leach, 1819, были представлены всеми разновозрастными группами (науплиями, метонауплиями, предвзрослыми, взрослыми особями) и цистами. Популяция артемии в оз. Кулундинское представлена самками, что характерно для сибирских популяций артемии. Самцы отмечались в пробах в единичных экземплярах.

Солоноватоводные гидробионты в июне представлены тремя основными группами: коловратками (*Rotifera*), ветвистоусыми (*Cladocera*), веслоногими (*Copepoda*) ракообразными, средняя численность которых составляла, соответственно, $30,77 \pm 11,32$; $5,52 \pm 1,72$ и $29,98 \pm 6,21$ тыс. экз./м³. В июне доля рачков артемии в составе зоопланктона в процентном отношении от общей численности зоопланктона и артемии (на стадии цист) составила всего лишь 12,6%, в 2020 г. – 9,1%. Несколько выше занимают место цисты в 2021 г., на долю которых приходится 16,9%, в 2020г. – 12,4% и доминирующее положение определено прочим видам из солоноватоводной фауны – 67,5%, в 2020 г. они преобладали на 11% (от 78,5%) (рис. 1). Таким образом, в июне наблюдалось повышение численности в планктоне рачков артемии и цист и снижение численности гидробионтов солоноватоводной фауны.

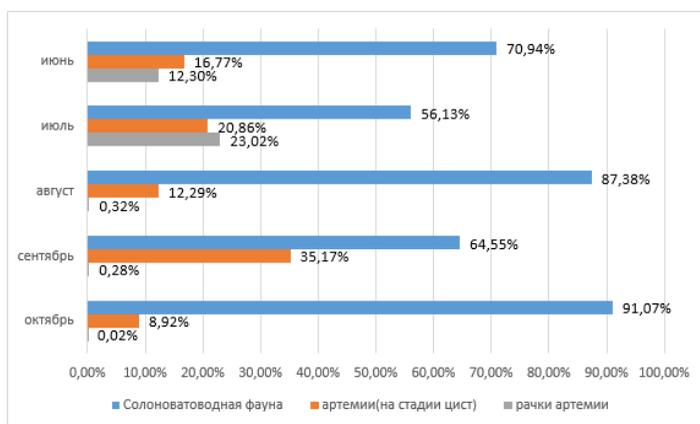


Рисунок 2.2. Доля солоноватоводной фауны, артемии (на стадии цист) и рачков артемии от общей численности зоопланктона, %

В целом, анализ многолетних данных гипергалинных водоемов Западной Сибири показал, что наиболее продуктивны водоемы с соленостью от 70 до 230 г/л. При солености воды в озере менее 100 г/л преобладает продукция рачков, при солености более 140 г/л преобладает продукция цист. Из этого следует, что в озере Кулундинское соленость рапы, с динамикой от 1,9 (апрель) до 99,0 мг/дм³ (июль) будет оптимальной только для продукции рачков артемии и прочих видов солоноватоводной фауны.

СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

УДК 378.14

Роль электронных образовательных ресурсов в самостоятельной работе студентов при изучении курса дискретной математики

Н.В. Баянова¹, В.В. Лодейщикова²

¹*Алтайский государственный университет, г. Барнаул;*

²*Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

В статье анализируется роль электронных образовательных ресурсов в самостоятельной работе студентов. Описывается опыт применения электронных образовательных ресурсов при изучении курса дискретной математики.

Ключевые слова: *самостоятельная работа, электронные образовательные ресурсы, дискретная математика.*

Под самостоятельной работой студентов обычно понимается выполняемая студентами в аудиторное и внеаудиторное время учебная деятельность, методически организованная преподавателем, без его непосредственного участия.

В работе [1] отмечается, что самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

1. Закрепление и расширение знаний, умений, полученных во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности.
2. Приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана.
3. Формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью.
4. Развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы.
5. Развитие навыков самоорганизации.
6. Формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

7. Выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Курс дискретной математики сегодня является одним из основных в системе подготовки по направлениям «Прикладная информатика», «Информационная безопасность», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и т.д., закладывающим основной фундамент дальнейшей специализации. И успешное усвоение азов дискретной математики невозможно без организации самостоятельной работы самого студента.

Дискретная математика, как раздел математики, изучает свойства дискретных структур, которые возникают как в самой математике, так и в различных её приложениях. В дискретной математике важную роль играют задачи, связанные с алгоритмической разрешимостью и построением конкретных решающих алгоритмов. При изучении данного курса необходимо, чтобы студент овладел алгоритмами решения некоторого объема стандартных задач. Соответственно, главной целью текущего контроля знаний является проверка навыков применения стандартных алгоритмов при решении задач. Обычно такой контроль осуществляется в виде аудиторных письменных контрольных работ. Подготовка к данному виду контроля знаний является важнейшим элементом самостоятельной работы студентов. Она решает задачи закрепления знаний, умений и развивает навыки самоорганизации.

В качестве ресурса для организации самостоятельной работы студента при изучении дискретной математики целесообразно использовать электронные образовательные ресурсы (Moodle, ILIAS). Наряду с тем, что обычно при создании курсов в этих системах размещается материал лекционных и практических занятий, рассматриваемые LMS позволяют проводить тестирование. Именно в виде тестирования удобно размещать образцы контрольных работ. При этом рекомендуется ограничить количество попыток прохождения теста. Мы считаем важным, после определенного числа неудач, предложить студенту подробное решение заданий для того, чтобы перед контрольной работой обучающийся имел возможность исправить ошибки, допущенные в ходе решения. В работе [2] мы рассматривали особенности формирования тестов по дискретной математике и приводили примеры тестовых заданий.

Использование электронных образовательных ресурсов в организации самостоятельной работы студентов имеет положительные

результаты. Студенты, проходящие в качестве подготовки предложенное тестирование, успешно справляются с заданиями аудиторной контрольной работы.

Библиографический список

1. Меренков А.В., Куньшиков С.В., Гречухина Т.И., Усачева А.В., Вороткова И.Ю. Самостоятельная работа студентов: виды, формы, критерии оценки. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 80 с.

2. Лодейщикова В.В., Баянова Н.В. Особенности формирования вопросов для теста по дискретной математике //МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 1–5 июля 2020 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – С. 285–287.

Giftedness and the role of information technology in the identification and development of giftedness

A. Bektenova, N. Denisova.

D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk city, Kazakhstan

Abstract: This article discusses the problem of determining giftedness and the classification of types of giftedness based on the analysis of scientific and technical literature. The results of recent research in the field of identifying giftedness using information technology were also discussed. The results of the empirical analysis showed that to date, scientific and practical ideas of identifying giftedness through information technology have not been studied in depth enough.

Keywords: giftedness, types of giftedness, methods of identifying giftedness, information system, information technologies.

For many decades, the identification of giftedness in children has been one of the most important topics in both the scientific and educational community. That is why, today, the concept of «giftedness», its types and ways of detecting it are widely discussed not only in many foreign literatures, but also in domestic ones. Keeping up with the times, this work will also discuss the literature, which reveals the possibilities of using information technology in determining the types of giftedness.

It is worth starting with the fact that over the years, scientists have put forward countless definitions of the term "giftedness". However, since this concept covers many different areas of life, only a few scientists could give the most accurate and correct definition that would bring different perspectives together. One of them is Joseph S. Renzulli, who in his article "What Makes Giftedness?: Reexamining a Definition" focused on exploring the limitations in examining this concept and avoiding subjectivity tried to give own accurate definition of "giftedness" of children and students. The author believes that before explaining the term giftedness, it is necessary to understand that there are many restrictions that can drive the definition of such a very broad concept into an invisible framework. As an example, from a conservative point of view, the term giftedness risks being disclosed only from the academic side of a person, excluding other spheres of life such as art, music, oratory and others [1]. After all, for several centuries,

only those people who could score the top 1 % on the Stanford-Binet intelligence scale, which measures only the coefficient of intellectual and academic abilities of a person, were considered gifted. However, Joseph S. Renzulli does not quite agree with this approach and comes up with the idea that it is time to expand such a narrow and inaccurate definition of giftedness and begin to consider giftedness as something more. To be more precise, the author suggests a three-dimensional definition of giftedness instead of using a single criterion [1].

Thus, according to the Joseph S. Renzulli, giftedness is a set of three basic traits in one person, which include intellectual abilities that are rated as above average, a high level of commitment to different tasks and also a high level of creativity (figure 1). Those children and students who have been able to develop these complex abilities in themselves, and are still able to effectively apply them to the main valuable areas of human activity are considered “gifted” from a scientific and educational point of view [1, p.83].

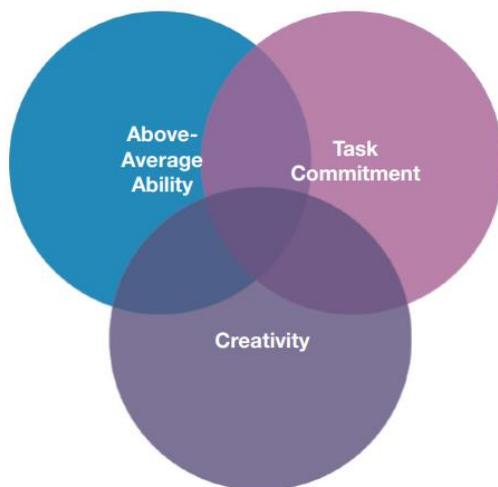


Fig.1 The ingredients of Giftedness [1, p.83]

Along with this, the author of another scientific article “Giftedness: The Answer in One and a Half Centuries” Diana B. Bogoyavlenskaya explains the concept of giftedness in a different way. She agrees that giftedness cannot be measured by just one human quality, but on the contrary, it should be perceived as a system of various qualities of the psyche, which not only can develop over the years, but also gives a person

the opportunity to reach great heights in many areas compared to other people [2]. But, it is worth clarifying that the system in this case does not imply just a set of traits, as Joseph S. Renzulli [1] claimed, but explains the process of integrating these characters among themselves and identifying giftedness as a separate, new character trait. In addition, the author finds out that if giftedness is such a complex system, then it should be divided into different classifications, these include creative giftedness, intellectual giftedness and also academic giftedness, which includes the ease and rapid pace of mastering given material and knowledge in large quantities [2]. However, there is a risk that in the current realities, an ordinary teacher will most likely not be able to distinguish the difference between the classifications of intellectual and academic giftedness of a student. Bogoyavlenskaya adds that intellectually gifted children are mostly very mentally independent, can give solutions to more philosophical and global problems of the scientific world without any help (2010). While academically gifted students have the ability to quickly and, most importantly, qualitatively settle any material of any level. However, mostly they can achieve brilliant results covering school and university knowledge with a little help from a teacher.

During the study of giftedness, Bogoyavlenskaya also notes a large gap in the study of this concept, as until now scientists cannot come to a single and common unit of measurement of giftedness. The explanation for this is that science and technology have not yet reached such a level to conduct systematic monitoring of all components of giftedness. This, in turn, definitely leads to problems of measuring giftedness. Bogoyavlenskaya skillfully criticizes Joseph S. Renzulli's conservative view that giftedness is an intelligence that is rated as above average [1]. In her opinion, such a measurement of giftedness is very contradictory with modern methodology.

Meanwhile, the authors of another article "Identifying Gifted Students: Educator Beliefs Regarding Various Policies, Processes, and Procedures" were able to consider the problem of measuring and evaluating giftedness in more detail. The study revealed that today, in practice, within educational institutions, the identification of gifted students among others is based only on their academic performance and high intellectual abilities [3]. To identify an academically gifted child, such general methods as standardized tests, observations of teachers, parents and peers, and also evaluation of the effectiveness of work by experts are widely used (table 1). While the other components of giftedness are usually not taken into account. They note that the most classic way to identify gifted children is through passing IQ (Intelligence Quotient) tests, which is actually a

traditionally reliable method. To be more precise, the IQ range of the entire population can be depicted as a normal curve, where most people are rated at about 100 points, while only 1% to 3% of selected people scored above 130 and can qualify as gifted [3]. The advantage of this method of identifying gifted children is that they are absolutely not biased against different cultures, races, ethnic minorities and people at a socially low standard of living.

	Very Effective	Effective	Ineffective	Very Ineffective	Don't Know	Missing
Standardized tests	73 (17.8)	275 (66.9)	52 (12.7)	9 (2.2)	1 (0.2)	1 (0.2)
Teacher nominations	111 (27)	246 (59.9)	43 (10.5)	9 (2.2)	1 (0.2)	1 (0.2)
Parent nominations	13 (3.2)	150 (36.5)	195 (47.4)	33 (8)	18 (4.4)	1 (0.2)
Peer nominations	18 (4.4)	110 (26.8)	182 (44.3)	24 (5.8)	73 (17.8)	4 (1)
Portfolios of student work	136 (33.1)	224 (54.5)	26 (6.3)	0 (0)	14 (3.4)	11 (2.7)
Performance assessments by experts	142 (34.5)	231 (56.2)	9 (2.2)	6 (1.5)	15 (3.6)	8 (1.9)
Observations	164 (39.9)	207 (50.4)	21 (5.1)	1 (0.2)	13 (3.2)	4 (1)

Table 1. Educator Beliefs Regarding methods of Identifying Academically Gifted students [3]

It is worth noting that there are other methods of identifying talents and gifted children, for example, Talent Search/SMPY, which uses tests that allow students to use their reasoning abilities and find answers to solve higher-level problems. Interestingly, this identification of giftedness is a two-stage, but not quite a complicated process [3]. Initially, a person goes through screening, which involves passing standardized tests, these include the Stanford Test or the Iowa Basic Skills Test. This stage is usually necessary in order to identify people, mostly students who scored above 95 or 97 percentiles. As for the next stage, a higher level test is conducted for students, such as Scholastic Aptitude Test or American College Test. However, it is worth recognizing that despite the fact that these methods of identifying giftedness have high reliability, they still look at the quality of

giftedness one-sided and distorted, evaluating only the academic skills of students.

As for identifying gifted students from the point of view of creativity and art, E. I. Guseva and her colleagues were able to reveal this topic more detailed. According to the authors of the article "Diagnostics of gifted children", the process of identifying giftedness in students should begin from early childhood. In detecting gifted students, an active role is played primarily by teachers who, using various psychological and pedagogical technologies and a personality-oriented approach in the education of children, should be able to distinguish these students from a large number of others [4]. Based on this, the authors conducted a study aimed at identifying the main predisposition of children to a particular type of giftedness, including intellectual, academic or creative giftedness. The study sample was students of the 5th and 6th grades aged from 10 to 12 years. For this study, such methods of identifying gifted people as the "Giftedness Map" by Haan and Kaffa, additionally the Torrens creativity test and also the P. Rzhichan intellectual potential test were used [4]. During the experiment, quite significant differences between specifically creative and intellectual abilities of students were identified. As it turned out, according to the results of the conducted research, art plays an incredibly large role in the formation of a child as a creatively gifted person, rather than intellectual potential.

In order to come to this conclusion, the Guseva and her colleagues suggested students to perform two tests on two main and general types of giftedness, which were highlighted in the work of the famous Russian psychologist M. A. Kholodnaya. In her scientific article "Principles and methods of identifying gifted children", Kholodnaya makes it clear that in order to identify a particular type of giftedness, it is necessary to use specified means of psychodiagnostics of the human brain [5]. Which means that actually there is no need to use the Raven test if it is necessary to identify musically gifted children and adolescents, just as it is pointless to use the Guilford verbal creativity test in order to assess the technical giftedness of a child. Taking this into account, M. A. Kholodnaya puts forward for scientific discussion a completely new and most adequate method of identifying signs of giftedness in children, which takes into account the specifics of giftedness especially in childhood and calls it psychodiagnostic monitoring (2000).

As she explains, psychodiagnostic monitoring, which should be used to identify gifted children, meets a large number of requirements. Firstly, this monitoring should last such an amount of time to be able to record and fix the dynamics of the child's giftedness without any problems, besides, this is not a one-time examination. It should be carried out repeatedly, using

several measuring procedures in accordance with the individual characteristics of the child [5]. Psychodiagnostic monitoring can also assess the behavior of a child, not in all areas of life, but in certain ones where the child's abilities could be applied. Special attention should also be paid to the fact that this method of diagnosing gifted children should be carried out within the framework of the child's educational environment and implies an individualized learning strategy for this gifted child [5].

In addition, Kholodnaya mentions that psychodiagnostic monitoring has a special dialogic character, which means that during the diagnosis, mandatory feedback is received from the child. Thus, the child can be provided with timely emotional and psychological support throughout the study. It is also worth noting that this diagnosis of gifted children should occur in the most natural way possible and be attached to real life situations. Last but not least, psychodiagnostic monitoring should create and use such subject research situations to give the gifted child maximum freedom and independence in solving some problems or in choosing behavior in a particular situation [5].

Kholodnaya, focusing on what requirements the diagnostic method for determining gifted children should meet, gave ground for reflection to other scientists. For example, based on these studies, S.V. Pazukhina and G.N. Abdurakhmanov, the authors of the article "Diagnostic System For Early Detection Of Children With Signs Of Giftedness" were able to successfully develop a completely new and innovative, computerized diagnostic system. This system of early detection of children with signs of giftedness is a theoretically and methodologically based scientific tool that was designed as a diagnostic computer program combined with common system-forming technologies (2013). Pazukhina and Abdurakhmanov assume that this system will be successfully used when working with primary school children and primary school teachers, as well as with school psychologists.

As for the diagnostic program itself, it is based on the most optimal set of different diagnostic techniques for the purpose of multi-faceted establishment of both quantitative and qualitative assessment of the level of development of the studied mental property of a person and can cover a wide range of the child's abilities. Interestingly, just as Kholodnaya claimed in her research, Pazukhina and Abdurakhmanov also believe that basically, one-time studies will not help in identifying giftedness, but only long-term diagnostics can be considered effective and objective [6]. Taking this into account, the authors put forward the idea of using not a traditional static diagnostic program, but on the contrary to modernize and put into practice a dynamic program, which is based on a longitudinal study of the signs of

giftedness in preschool children [6]. This program will successfully allow scientists to track and record changes in the studied parameters of giftedness in different frequencies.

Thus, in this program to identify gifted children, Pazukhina and Abdurakhmanov created a large table, where they add different psychophysiological criteria and signs of giftedness, such as intelligence, or mental abilities, creative abilities, cognitive motivation and also socio-personal characteristics (2013). Further, selecting appropriate and already known diagnostic techniques, they also entered them into the program table accordingly to the abovementioned criteria. These diagnostic methods include the "Giftedness Card" method for parents, a short test of creative thinking (Torrens), the Raven Method (children's version), the scale of the rating of behavioral characteristics of J. Renzulli for teachers, questionnaire for determining the intensity of cognitive need by V.S. Yurkevich and etc. So, the creation and implementation of such an innovative diagnostic program makes it possible not only to identify signs of giftedness in a child, but also to successfully track the dynamics of the development of giftedness at an early age.

Taking steps towards the use of computer technology in identifying gifted children, abovementioned authors opened the way for other researchers and scientists in this direction. This is proved by the authors of the article "Modern Opportunities for the Development of Gifted Children with the Help of Ict" Revunov S. E., Barkhatova O. M. and Dolgova D. S., who reveal the topic of the use of information and communication technologies in working with gifted children. They focus in more detail on understanding how information technology can be used in a profitable way to help gifted children in their further development. For example, the main argument is that with the help of modern ICT, we can provide absolutely open access to a variety of educational materials for gifted children. These include various mobile training, international websites, interactive whiteboards, etc. Gifted children get the opportunity not only to receive and analyze the information given to them, but to skillfully create and construct this information, using these tools [7].

To be more precise, an example of the successful use of information technologies that can contribute to the development of gifted children are virtual laboratories, such as Chemistry Lab [7]. This application implies an online laboratory with realistic objects. For example, a child has the opportunity to choose a chemical beaker or chemical ingredients for conducting a particular scientific experiment. The functions of the application include all the real chemicals that are present in any laboratory room, only all in an online format. In addition, all chemical reactions are

very realistic, the real colors of the reagents are displayed. Thus, a gifted child who, for example, does not have the opportunity to visit a laboratory equipped with modern technology, can develop his abilities through information technology, including a smartphone and a computer (2020).

Modern methods of information technology have also helped to create video advertisements for Booktrailers that can help develop gifted children not only in the field of art, but also in the field of analytical thinking. Gifted children, in order to successfully create booktrailers, need to read a certain book and mastering the tools of a video editor, record a video advertisement for this book. The key task is not only to retell the plot, but also to critically evaluate and highlight the main points in this book. Using platforms such as VideoPad (<https://www.nchsoftware.com/vidoopad/ru/>) they can make video editing of their project using all their creativity. Information technologies enable these gifted children to re-sound videos, add titles, create transitions between slides and upload their ready-made Booktrailer to the beloved and most popular YouTube platform. With such modern technological tools, the task of making a booktrailer for a gifted child will not only be an interesting experience, but at the same time it will also develop his/her other hidden abilities [7]. Thus, using these tools of modern information technologies, Revunov and his colleagues were able to realize the development of gifted children.

In addition to this, if Revunov used information technology for gifted children within the school, the author of another scientific article Zhukova O. N. focused on another information and educational environment- the university. She argues about the importance of creating an information system of scientific and pedagogical support for gifted schoolchildren in the conditions of an educational portal [8]. To do this, one of the most important stages is the creation and implementation of the information and communication educational environment of the university and any school with the help of an educational portal. Taking into account modern information technologies, the portal can be built on the basis of Moodle. This is necessary in order to enable gifted children to independently choose the subjects or sections of these subjects that they wanted to study in depth or, on the contrary, accelerated, thereby accompanying the development of intellectual giftedness of schoolchildren [8].

Based on the above, it can be concluded that the analysis of modern and scientific literature on the problems of giftedness of schoolchildren's children shows that to date, scientific research in this area is completely insufficient. During the analysis of research papers, an accurate and correct

definition of the concept of giftedness was given, three main types of giftedness were discussed and special attention was paid to the identification and evaluation of giftedness in students. It was revealed that one of the most promising and potentially most important areas of work with gifted students are information technology tools, including the creation of specialized portals. However, as it turned out, the available foreign articles are mostly only of an ascertaining nature and in practice these information technologies are little used in working with gifted students.

References

1. Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi delta kappan*, 60(3), 180. <https://doi.org/10.1177/003172171109200821>
2. Bogoyavlenskaya, D. B. (2010). Giftedness: the answer in one and a half centuries. *Psychology in Russia: State of the Art. Scientific Yearbook. Moscow: Lomonosov Moscow State University*, 197-213 <https://doi.org/10.11621/pir.2010.0009>
3. Schroth, S. T., & Helfer, J. A. (2008). Identifying gifted students: Educator beliefs regarding various policies, processes, and procedures. *Journal for the Education of the Gifted*, 32(2), 155-179. <https://doi.org/10.4219/jeg-2008-850>
4. Guseva, E., Migovich, O., Tikhomirova, L., & Khitrova, G. (2016). Diagnostics of gifted children. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*.
5. Kholodnaya, M. A. (2000). Principles and methods of identifying gifted children. *Giftedness: working concept: yearbook of the RPO*, 8(1), 22-29.
6. Pazukhina, S. V., & Abdurakhmanov, G. N. (2013). Diagnostic System For Early Detection Of Children With Signs Of Giftedness. *Humanitarian Bulletin of L. N. Tolstoy TSPU*, 3(7).
7. Revunov, S., Barkhatova, O., & Dolgova, D. (2020). 1. Modern Opportunities For The Development Of Gifted Children With The Help Of Ict. *Innovative Economy: Prospects For Development And Improvement*, 3(45).
8. Zhukova, O. (2015). Theoretical Model Of Support And Development Of Schoolchildren With Signs Of Intellectual Giftedness In The Conditions Of The Educational Portal Of The University. *Omsk State Pedagogical University*.

Генератор индивидуальных заданий по математике на *Wolfram Mathematica*

С.В. Вараксин

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается автоматическая генерация индивидуальных вариантов текстовых заданий по темам «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия» по дисциплине «Математика» с использованием систем *Wolfram Mathematica* и *LaTeX*.

Ключевые слова: *системы компьютерной алгебры, системы подготовки текстов, индивидуальные задания по математике.*

В процессе обучения математическим дисциплинам у преподавателя возникает необходимость обеспечить группу студентов стандартными индивидуальными заданиями. Процесс составления серии однотипных заданий однообразный, утомительный и трудоемкий, на него уходит значительное время преподавателя. Один из широко используемых приемов - ввести в задание параметр и подставлять в качестве его значения или дату рождения, или последние цифры номера студенческого билета и т.д., но в компьютерный век это выглядит анахронизмом. Возникает желание для сокращения время подготовки серии однотипных заданий использовать информационные технологии на основе датчика случайных чисел. В свое время автор при составлении заданий на приведении матрицы к нормальной жордановой форме использовал программу на Паскале. Очевидно, что это не тот язык, на котором нужно реализовать подобные задачи, и что требуется система компьютерной алгебры. Позже были попытки применения пакетов *Maple* и *Sage*. Для составления банка заданий по математике для студентов ИХиХФ была использована система *Wolfram Mathematica*. Подобный подход уже известен при разработке индивидуальных вариантов текстовых заданий [1].

Система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*, широко используемая для научных, инженерных, математических расчётов, была разработана еще в 1988 году Стивеном Вольфрамом. Дальнейшим развитием системы занята основанная им компания *Wolfram Research*. Система оснащена как аналитическими возможностями, так и обеспечивает численные расчёты; результаты выводятся как в алфавитно-цифровом виде, так и в форме графиков. Она позволяет работать с матрицами (сложение, умножение,

нахождение обратной матрицы, умножение на вектор, вычисление экспоненты, взятие определителя), находить собственные значения и собственные вектора. Кроме того, она умеет решать системы полиномиальных, тригонометрических уравнений и неравенств, находить пределы, производные, первообразные, решать дифференциальные уравнения и многое другое [2].

Работа заключалась в подготовке двух основных файлов. Один из них на *LaTeXe* [3], со стандартной преамбулой, которая определяет формат издания, с титульной страницей и определением команд, создающих текст задания. Параметрами этих команд являются текстовые строчки, представляющие соответственно координаты векторов, точек или других параметров задания. Например, в основном файле сборника заданий по линейной алгебре определяется команда `\taskiii`, печатающая текст, предлагающий решить систему линейных уравнений методом Крамера и с параметром, которым должен являться набор сформированных строк системы линейных уравнений в формате *TeX*, с именами переменных системы уравнений и разделителями на поля и строки. Текст основного *LaTeX*овского файла также содержит строчку с командой `\input`, которая ссылается на вспомогательный текстовый файл. Этот файл создается программой в ноутбуке системы *Wolfram Mathematica*, состоит из текстовых строчек, начинающихся с имени команды `\taskiii` и далее содержащих необходимые параметры – строки системы линейных уравнений с учетом, чтобы решение подобной системы не требовало больших технических усилий. Коэффициенты этих строк формируются датчиком случайных чисел в пределах от -5 до 5. Программа производит те же вычисления, которые должен провести студент, и если значения определителей не являются двузначными числами, набор коэффициентов признается удачным, и формируется строка-параметр команды. Эти команды и формируют полный текст заданий. В *LaTeX*овском файле сборника заданий по аналитической геометрии, аналогично, определяется команда с текстом задания, например, нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, и также содержится строчка с командой `\input` для включения текстового файла. Результатом программы соответствующего ноутбука системы *Wolfram Mathematica* является необходимый текстовый файл, повторяющий несколько раз имя этой определенной команды с изменяемым параметром, значением которого являются координаты точек прямых и направляющих векторов – так же с проверкой условия, чтобы вычисления не потребовали чрезмерных технических усилий. В итоге формируются сборники индивидуальных заданий по линейной

алгебре и по аналитической геометрии. Таким образом совместное использование систем *Wolfram Mathematica* и *LaTeX* помогает подготовить пакет индивидуальных заданий и сократить время его подготовки.

Библиографический список

1. Лагуто А.А. Автоматическая генерация вариантов тестовых заданий и решений в *Wolfram Mathematica* // Материалы международной научной конференции “Информационные технологии и системы (ИТС-2016)”, БГУИР, Минск, 26.10.2016 г. – Минск, БГУИР, Беларусь. – 2016. – С. 116–117. – URI: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161409> (дата обращения 16.05.2022)
2. Дьяконов В. П. *Mathematica 5/6/7. Полное руководство.* - М.: ДМК Пресс, 2010. - 624 с
3. Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А. Путеводитель по пакету LATEX и его расширению LATEX2 ϵ / Пер. с англ. О. А. Маховой и др. - М.: Мир, 1999. - 606 с.

Использование сред разработки Unity и Vuforia для реализации системы электронного обучения

ШКОЛЬНИКОВ

Д. А. Коротких

Алтайский государственный университет

Изучены возможности игрового движка Unity и существующего для него набора инструментов дополненной реальности Vuforia SDK. Были созданы и подобраны игровые ресурсы для использования в среде разработки. Реализована демоверсия мобильного обучающего приложения, симулирующего поведение пешехода при переходе дороги. Разработаны планы по дальнейшему развитию проекта.

Ключевые слова: *дополненная реальность (AR), Unity, Vuforia, правила дорожного движения, электронное обучение, мобильная разработка, ситуационное моделирование.*

В настоящее время информационные технологии активно используются на всех этапах образовательных процессов. Новые технологии предоставляют широкий спектр возможностей, но при этом требуют изменений в организации обучения. Среди наиболее заметных тенденций в современных технологиях обучения лидирующую позицию занимает дополненная реальность. Дополненная реальность (англ. augmented reality, AR – «расширенная реальность») – технология, позволяющая посредством компьютерных приложений создавать и идентифицировать виртуальный слой информации с каким-либо маркером или объектом, находящимся в реальном физическом мире [1]. Использование AR-технологий в образовании является перспективным направлением, отвечает современным тенденциям и поэтому требует дальнейших исследований и разработок.

Особую актуальность приобретают новые формы обучения с использованием персональных электронных устройств – мобильное обучение (МО). Важнейшей составляющей МО являются мобильные приложения (МП), обладающие значительным потенциалом для повышения качества учебного процесса. В связи с этим проблема разработки мобильных приложений является актуальной.

Целью данной работы является разработка прототипа мобильного приложения для симуляции поведения пешехода-школьника при переходе дороги. Для этого необходимо было:

- провести анализ существующих примеров использования AR технологий в обучении;
- изучить возможности движка Unity и инструментов дополненной реальности Vuforia AR Engine;
- составить план работы мобильного приложения;
- подготовить игровые ресурсы;
- скомпоновать сцену;
- создать дополнительные ресурсы, на основе имеющихся (*таймлайн анимации, UI*);
- реализовать базовую расширяемую игровую логику;
- протестировать приложение, исправить какие-либо найденные ошибки;
- определить планы по дальнейшему развитию приложения.

Для реализации была выбрана среда разработки Unity, так как она является одной из самых известных и устойчивых сред разработки приложений под Android. Для Unity существует множество совместимых ресурсов, в том числе – Vuforia AR SDK: набор инструментов для работы с технологиями дополненной реальности.

Для работы с созданным приложением игроку (ученику) следует распечатать (или взять готовые) специальные карточки (Рисунок 1), вырезать их и установить приложение.



Рисунок 3 - Карточки действий виртуального пешехода

В приложении перед началом уровня будет всплывать пояснение (как работает игра, как правильно переходить дорогу и т.д.). Перед началом уровня игрок направляет камеру телефона на карточки, расположенные на столе, они распознаются движком Vuforia, добавляются в список действий агента пешехода, и игрок запускает

симуляцию. Во время симуляции по очереди будут воспроизводиться анимации, ассоциированные с каждой карточкой. Исход симуляции будет зависеть от действий агента и того, как устроен уровень.

3D Модели, материалы и анимационные клипы персонажа были взяты с открытых источников Unity Asset Store, Mixamo; некоторые из них были созданы вручную в пакете моделирования Blender 3D. Данные клипы, были собраны в несколько таймлайнов, рассчитанных для каждой ситуации. (Рисунок 2)



Рисунок 4 - Таймлайн неуспешного перехода дороги

Vuforia SDK предоставляет сервис создания базы данных игровых объектов (таргетов), которые размещаются в сцене, и эмулируют положение распознанных реальных карточек. В сцену добавлена AR камера Vuforia, которая специально настроена рендерить только таргеты и видеопоток с камеры телефона, а полученные изображения отображаются в интерфейсе во время создания последовательности действий (Рисунок 3). Здесь же игрок может:

- спрятать интерфейс, чтобы посмотреть на сцену;
- добавить действия, распознанные инструментом Vuforia,
- сбросить действия, добавленные в последовательность;
- посмотреть на текущую последовательность действий;
- подтвердить последовательность действий и тем самым запустить симуляцию.



Рисунок 5 - Интерфейс (Создание последовательности действий)

Во время симуляции, запускается собственный скрипт, определяющий какие таймлайны будут воспроизведены. На данный момент он имеет буфер только под одно препятствие, но скрипт можно в будущем расширить под несколько препятствий. Скрипт идет циклом по каждому действию, добавленному в последовательность.

Для первого уровня скрипт довольно простой.

- Если игрок переходит дорогу, не посмотрев по сторонам, то на него наезжает машина. Всплывает окно проигрыша, с подсказкой и кнопкой перезапуска.
- Если игрок переходит дорогу, посмотрев по сторонам, то уровень пройдет успешно.
- Если игрок не переходит дорогу под конец цикла, то всплывает окно проигрыша.
- Если очередное действие – переждать сигнал светофора, то игрок пожимает плечами (т.к. светофора в первом уровне нет).

В ходе разработки приложения дополненной реальности для закрепления навыков правильного поведения школьников на дороге, были изучены возможности движков Unity и Vuforia AR, реализована демоверсия обучающей игры и определены планы по дальнейшему развитию проекта:

- оптимизация приложения;
- разработка более гибкой и интуитивной системы создания уровней (например, для учителей);
- улучшение общего качества приложения: создание более подходящих (и возможно кастомизируемых) ассетов;
- выпуск стабильной релизной версии разработки.

Библиографический список

1. Зильберман Н.Н., Сербин В.А. Возможности использования приложений дополненной реальности в образовании // Открытое и дистанционное образование. 2014. № 4 (56). – С. 28–33.

УДК 378.14

Проблемы преподавания дисциплины «Цифровая культура в профессиональной деятельности»

Г.В. Кравченко

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена рассмотрению проблем, выявленных в результате преподавания курса «Цифровая культура в профессиональной деятельности» у студентов не ИТ-направлений и специальностей. Предложены пути решения выявленных проблем.

Ключевые слова: *цифровая культура, цифровые компетенции, ИТ, цифровые навыки, проблемы преподавания.*

На сегодняшний день цифровая культура нужна абсолютно всем специалистам как в технических, так и в гуманитарных профессиональных областях, поскольку информационные технологии проникли во все сферы жизни общества без исключения. Специалист, который обладает навыками в области цифровой культуры, знает, как использовать инструменты, предлагаемые современными информационными технологиями, вне зависимости от того, имеет ли он профильное образование в области ИТ.

Дисциплина «Цифровая культура в профессиональной деятельности» входит в университетское «ядро» и читается во 2-3 семестрах после дисциплины «Цифровая культура» во всех институтах на всех направлениях обучения в Алтайском государственном университете.

Несомненно, что в настоящее время дисциплины, развивающие цифровые компетенции, являются одними из центральных. Однако методы, используемые для решения таких задач, требуют хорошего знания математики, лежащей в основе информатики и ее технологий. Нынешние проблемы многих студентов проистекают именно из плохого знания математики и недостаточного уровня логического мышления. Без решения этих проблем не будет достигнут достаточный профессиональный уровень владения современными информационными технологиями.

Профессиональная компетентность специалиста в области цифровых технологий предполагает уровень осознанного применения цифровых знаний, умений и навыков, опирающийся на знание

алгоритмизации и основ программирования, умение составлять программы на одном из языков программирования, изучаемых в школе (Pascal, C/C++, Python и т.п.).

Под цифровыми навыками (digital skills) принято понимать «устоявшиеся, доведенные до автоматизма модели поведения, основанные на знаниях и умениях в области использования цифровых устройств, коммуникационных приложений и сетей для доступа к информации и управления ей» [1].

В классификации цифровых навыков выделяют [2]:

1. Общие ИТ-навыки, позволяющие работникам самого широкого спектра профессий использовать ИТ в своей повседневной работе. Например, это поиск информации в Интернете, использование офисного ПО, средств для статистического анализа данных, форматирования и производства документации и т.п.

2. Профессиональные ИТ-навыки, требуемые специалистам в области ИКТ и их приложений для производства продуктов, услуг и ресурсов в сфере ИКТ. Например, это навыки системного проектирования, программирования, разработки приложений, управления данными и сетями, разработки систем электронной коммерции, облачных хранилищ данных, и т.п.

3. Проблемно-ориентированные цифровые навыки – навыки специалистов, разрабатывающих и использующих специализированные проблемно-ориентированные платформы, приложения, пакеты программ, системы автоматизированного проектирования, ВІМ-платформы, ГИСы, инструментальные средства логистики, фреймворки для решения задач биоинформатики и пр.

4. Комплементарные ИТ-навыки (complementary skills) – навыки использования возможностей экосистемы для выполнения отдельных задач, связанных с применением ИТ на рабочем месте. Например, использование социальных сетей для коммуникации с коллегами и клиентами, продвижение бренда продуктов на платформах электронной коммерции, анализ больших данных, бизнес-планирование и т.п.

5. Навыки использования приложений и сервисов цифровой экономики – навыки использования различных специализированных сервисов и приложений, реализуемых на основе инфраструктуры Интернета Вещей и функциональных компонент цифровой экономики. Например, такие, как службы облачных хранилищ информационных ресурсов и управления ими, автоматизация выполнения процессов логистики, использование возможностей технологии 5G, оптимизация задач розничной торговли, управление малым бизнесом и управление

его трансформацией и т.п.

На изучение дисциплины «Цифровая культура в профессиональной деятельности» отводится 144 часа, из которых 86 часов приходится на самостоятельную работу студентов. Курс не предполагает проведения лекционных занятий. Темы, предложенные в учебно-тематическом плане дисциплины, очень сложны и непонятны студентам не ИТ-направлений – «Введение в программирование на языке Python, знакомство со средами разработки Jupyter Notebook и GoogleColab», «Загрузка данных в рабочую среду. Визуализация данных и описательная статистика. Корреляционно-регрессионный анализ», «Типовые задачи машинного обучения: кластеризация, классификация и регрессия», «Введение в нейронные сети и глубокое обучение», «Сверточные нейронные сети в задачах анализа изображений», «Нейронные сети в задачах анализа текста. Конструирование чат-ботов», «Сервисы, использующих технологии искусственного интеллекта».

Все темы предполагают, что студенты имеют базовые знания алгоритмизации, владеют навыками программирования на каком-либо языке программирования, имеют представления о современных трендах информатизации.

Несомненно, что при формировании профессионально значимых цифровых умений и навыков у студентов ИТ-направлений, изучение языка программирования Python и возможностей его применения в профессиональной деятельности является первоочередной задачей. Чего нельзя сказать о студентах не ИТ-направлений. Остановимся на этом поподробнее.

В двух группах студентов-первокурсников института гуманитарных наук Алтайского государственного университета проводилось исследование, направленное на выявление начального уровня владения цифровыми навыками.

Кроме практических заданий студентам было предложено ответить на несколько вопросов, среди которых были следующие:

- Был ли в вашей школе / колледже в последние 1-2 года такой учебный предмет, как информатика?

- Изучали ли вы алгоритмизацию и основы программирования?

- На каком языке вы умеете программировать?

В 1 группе (21 чел.) более половины студентов (14 чел.) заявили, что учебный предмет «Информатика и ИКТ» не изучали. Это оказались студенты, обучавшиеся или в сельских школах или студенты, приехавшие на обучение из стран ближнего зарубежья.

Из тех студентов, что изучали дисциплину «Информатика и ИКТ»,

знакомы с основами алгоритмизации и программирования всего 2 человека. Они отметили Паскаль, как язык, на котором их обучали писать программы (но «это было давно», и они «ничего уже не помнят»).

Во 2 группе (25 чел.) был «обнаружен» 1 студент, умеющий программировать на Python. Оказалось, что он закончил колледж по ИТ-направлению подготовки. Остальные студенты этой группы не умеют программировать и даже ничего не слышали о языке программирования Python.

Результаты проведенного исследования показали, что высокий уровень владения общими ИТ-навыками имеют 21,7% студентов, средний – 23,9%, а большинство респондентов (54,4%) имеют низкий уровень владения общими ИТ-навыками. И это даже после изучения дисциплины «Цифровая культура».

Средний уровень владения профессиональными ИТ-навыками был выявлен у 3 студентов (6,5%), высокий и низкий уровень не был выявлен ни у одного респондента.

Конечно же необходимо учитывать, что студенты, поступающие в вуз, имеют разный уровень школьной подготовки. Чаще всего у студентов гуманитарных направлений низкий уровень знаний по математике, информатике и ИКТ (что нашло подтверждение в нашем исследовании), а в некоторых школах информатика или совсем не преподавалась или преподавалась на очень низком уровне, даже без изучения программирования. И, несмотря на то, что на самостоятельную работу студентов отводится достаточно большой объем часов, заниматься самостоятельно студенты не только не хотят, но они не могут правильно организовать свою самостоятельную работу, да и аудиторные занятия студенты посещают плохо.

Для решения выявленных проблем, на наш взгляд, необходимо:

1. Пересмотреть учебно-тематический план дисциплины «Цифровая культура в профессиональной деятельности» в сторону его упрощения для студентов не ИТ-направлений.

2. Обязательно добавить в учебный план лекции.

3. Перенести дисциплину «Цифровая культура в профессиональной деятельности» на 5-6 семестры, выделив в ней несколько разноплановых модулей (дисциплин), и дав студентам возможность выбора наиболее интересного и полезного контента для применения его в своей будущей профессиональной деятельности.

Это могут быть такие модули, как «Компьютерная безопасность», «Технологии поиска, хранения и обработки информации», «Основы сетевых технологий», «Интернет вещей», «Обработка изображений»,

«Компьютерное зрение», «Анализ социальных сетей», «Методы искусственного интеллекта», «Компьютерная визуализация» и т.п.

Предложенные модули помогут студентам не ИТ-направлений быть в курсе современных технологических трендов (развитие мобильного Интернета, Интернет вещей, искусственный интеллект, большие данные и машинное обучение, VR/AR-технологии, автоматизация и роботизация) и успешно овладеть необходимыми цифровыми навыками.

Библиографический список

1. Обучение цифровым навыкам: глобальные вызовы и передовые практики // URL: <http://edu.mari.ru/school/DocLib3/Функциональная%20грамотность/Глобальные%20навыки.pdf> (дата обращения: 02.06.2022).

2. Сухомлин В.А., Зубарева Е.В., Якушин А.В. Методологические аспекты концепции цифровых навыков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Том 13. – №2. – С. 146–152.

Проблемы преподавания математики в колледже

Л.А. Линевич

Колледж АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена современным проблемам преподавания математики в колледже на первом курсе и адаптации студентов к новой форме подачи учебного материала.

Ключевые слова: *преподавание математики, адаптация студентов, математическая подготовка студентов, Moodle.*

В настоящее время скорость прироста информации настолько велика, что для адаптации студентов к процессу обучения в колледже и достижения успешности в дальнейшей профессиональной деятельности остро стоит вопрос о формировании у них комплексных умений и новых способов деятельности, которые способны обеспечить универсальность образования.

Обучение математики в колледже и школе имеет ряд отличий. Итогом школьного обучения является набор некоторых математических знаний, умений и навыков, которые не обязательно связаны с его будущей профессиональной деятельностью. Обучение же математике в колледже предполагает, что студент должен осознавать, что уровень владения математическими знаниями, умениями и навыками, является важнейшим условием для дальнейшей успешной профессиональной деятельности, особенно для технических и информационных специальностей. Основной задачей преподавателя является донести до студента, что применение математических методов, алгоритмов и моделей в реальной жизни очень многообразно. Математика формирует и развивает логическое мышление; умение анализировать сложные профессиональные задачи, требующие реализацию многошагового алгоритма для своего решения; умение четко и кратко выражать свои идеи. Большинство экономических задач, задач в сфере компьютерных технологий и т.п. решаются с помощью математических знаний [2]. Успех в профессиональной деятельности обусловлен высоким уровнем логического мышления, определенными навыками нестандартного мышления, критическим подходом к казалось бы очевидным фактам, а также высоким уровнем интеллекта [1]. Математика учит мыслить нестандартно, логически, творчески.

Также специфика обучения в колледже заключается в том, что вводится лекционно-практическая система обучения математике. Опыт нашей работы в колледже показывает, что большинство первокурсников достаточно сложно дается адаптация к сдвоенным урокам в течение полутора часов, в сравнение с уроком в школе, который длится 40-45 минут. Однако у сдвоенных уроков есть свои преимущества. Во-первых, появляется возможность уделить больше внимания каждому этапу урока, для более сложных тем предложить большее количество практических заданий, позволяющих закрепить полученные знания. При этом формирование положительной мотивации, объяснение того, где в будущей профессиональной деятельности пригодится изучаемая учебная информация, позволяет сохранить заинтересованность и работоспособность студентов в течение полутора часов.

Основная проблема, с которой мы сталкивались – это существенные различия в уровне математической подготовки студентов. Одни студенты, обучавшиеся в физико-математических классах, имеют глубокие математические знания, другие же обнаруживают пробелы даже в базовых математических знаниях. Одно из решений данной проблемы это формирование индивидуальных заданий, с приложением к ним необходимого теоретического материала и примеров решения типовых заданий. Также эффективным методом решения данной проблемы является использование образовательной платформы Moodle. Видеолекции позволяют студенту осваивать учебную информацию в удобном для него режиме и темпе, а не во временных рамках очного занятия. Также наличие в видеолекции вопросов по предложенному материалу, позволяет студенту адекватно оценить насколько качественно была усвоена информация.

Изучение математики становится все более существенным для общеобразовательной профессиональной подготовки студентов. Преподаватель математики (в том числе и в колледже) должен руководствоваться тезисом «не ученик для математики, а математика для ученика». Поэтому преподавание математики в современных образовательных учреждениях основывается на том, что необходимо учитывать индивидуальные особенности личности студента, а также результаты, которые он хотел бы получить в процессе обучения.

Библиографический список

1. Беляева Я.А. Мотивация студентов 1 курса СПО к успешному изучению математики // Проблемы преподавания математики, физики

и информатики в ВУЗе и средней школе: матер. научно-практ. конф. Воронеж, 15 апреля 2017г. – Воронеж: ВГУИТ, 2017. – С. 8–17.

2. Колмогоров А.Н. Математика наука и профессия. — М.: Наука, 2008. — 280с.

О роли электронного обучения в процессе формирования профессиональных ИТ-компетенций бакалавров

Т.В. Михеева
АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена вопросам разработки и применения электронных учебно-методических комплексов ИТ-дисциплин в процессе подготовки бакалавров, обучающихся в Институте математики и информационных технологии АлтГУ.

Ключевые слова: *ИТ, электронное обучение, электронный учебно-методический комплекс, профессиональные компетенции.*

Информатизация является одной из важнейших составляющих процесса модернизации системы образования, направленного на повышение качества получения образования всех уровней и ступеней. В настоящее время интерес к электронному обучению неуклонно возрастает, а новые информационные технологии имеют огромный диапазон возможностей для совершенствования учебного процесса и системы образования в целом. Это предъявляет повышенные требования к уровню информационной культуры всех участников образовательного процесса как важнейшего компонента сущностной характеристики личности.

По сравнению с традиционными формами ведения занятий, в электронном обучении меняется взаимодействие преподавателя и обучаемого: активность педагога уступает место активности обучаемых, а задачей педагога становится создание условий для их инициативы.

Новые поколения обучающихся всё более ориентируются на современные источники информации, цифровые образовательные технологии, виртуальные средства коммуникации для своего личностного роста, так как представление учебной информации в цифровом виде оказывает комплексное влияние на учащегося – повышается интерес к обучению, расширяется круг знаний, повышается качество обучения, улучшается обратная связь между преподавателем и обучающимися [1].

Технологии электронного обучения несут в себе совершенно иной подход к образовательному процессу, так или иначе смещая

традиционную форму обучения на задний план. На сегодняшний день смешанные формы обучения в вузе являются самыми востребованными и перспективными.

Актуальность темы определяется необходимостью совершенствования подготовки преподавателя к осуществлению учебного процесса в соответствии с уровнем развития современного информационного общества в аспекте формирования профессиональной готовности к применению средств информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе. Одним из таких средств является электронный учебно-методический комплекс дисциплины (ЭУМКД).

Под ЭУМКД понимается совокупность структурированных учебно-методических материалов, объединенных посредством компьютерной среды обучения, обеспечивающих полный дидактический цикл обучения и предназначенных для оптимизации овладения студентами профессиональных компетенций в рамках учебной дисциплины [2].

ЭУМКД создаются в системах управления обучением (LMS), являющихся программным приложением, которое предназначено для администрирования, мониторинга, документирования, предоставления учебного контента и контроля средствами электронного обучения и учебных курсов [3]. Одним из самых распространенных вариантов реализации таких технологий и методов во многих университетах, в том числе и в АлтГУ, является LMS Moodle.

Таким образом, в основе настоящей работы лежит разработка и использование ЭУМКД подготовки бакалавров на базе LMS Moodle с целью повышения эффективности того или иного вида учебной деятельности студентов в процессе формирования их профессиональных ИТ-компетенций.

В результате проделанной работы были разработаны ЭУМКД, использующиеся для комплексного информационного обеспечения обучающихся процессов по дисциплинам «Базы данных», «Программная инженерия», «Теория алгоритмических языков и трансляторов» для бакалавров 2 и 3 курса Института математики и информационных технологий АлтГУ по специальностям 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 09.03.03 Прикладная информатика. Данные дисциплины являются одними из основных дисциплин, формирующих у студентов профессиональные знания и навыки в области современных технологий разработки программного обеспечения, в том числе баз данных и систем управления базами данных.

Использование электронного учебно-методического комплекса позволило модернизировать преподавание данных дисциплин, предоставив возможность студентам доступ к материалам курса в любое время, а также возможность задавать вопросы преподавателю, по мере их возникновения, что стимулирует успешное обучение по данной дисциплине, повышает успеваемость и мотивацию студентов.

Электронные курсы интегрируют в себе мощные распределенные образовательные ресурсы, они могут обеспечить среду формирования и проявления ключевых компетенций бакалавра. Использование ЭУМКД является одной из современных форм организации учебного процесса, позволяет осуществлять обучение независимо от места проживания обучаемого, а также оперативно реагировать на динамику изменения содержания предметной области путем обновления учебного контента.

Библиографический список

1. Ашимова Х.Н. Цифровые технологии как метод формирования информационных навыков студентов в процессе обучения // *Globus*. – 2020. – № 3(49). – С. 13-16.
2. Сергеев А.Г., Жигалов И.Е., Сергеев А.Г., Баландина В.В. Введение в электронное обучение. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 182 с.

**Основные аспекты программы ДПО «Основы
программирования на С» для федерального проекта
«Содействие занятости»**

Л.Л. Смолякова

АлтГУ, Барнаул

В статье рассмотрены основные аспекты программы дополнительного профессионального образования. Рассмотрены цели реализации программы, планируемые результаты обучения

Ключевые слова: *ДПО, программирование, образование.*

Изучить популярный язык программирования и технологию, заполнить пробелы в знаниях. Получить еще одну востребованную и интересную профессию, все это можно в курсе «Основы программирования на С».

Курс построен таким образом, что позволяет изучить язык с азов. Зная основные конструкции языка, позволит обучаемым понять внутренние механизмы и устройство большинства современных высокоуровневых языков, поскольку данный язык является их прародителем. Язык программирования Си - это универсальный язык с богатым набором операторов и компактным способом записи выражений. По данным ТЮВЕ (ТЮВЕ programming community index — индекса, оценивающего популярность языков программирования, на основе подсчёта результатов поисковых запросов) язык Си занимает по популярности второе место в мире (май 2022). Благодаря данному курсу, слушатели познакомятся с основными понятиями, используемыми в программировании, научатся напрямую работать с оперативной памятью, получат навык написания простых системных программ и библиотек, а также применять полученные знания при работе с любым другим языком программирования. Для работы с Си существует большое количество сред разработки: Visual Studio, Dev-C++, NetBeans, Code::Blocks. Среди них есть среды с открытым исходным кодом, а также бесплатные on-line оболочки в сети (примеры приводятся в курсе).

Программа «Основы программирования на С» вошла в федеральный проект «Содействие занятости» национального проекта «Демография». Ее цель – содействие занятости определенных категорий граждан. К ним относятся, например, граждане в возрасте

50 лет и старше, люди предпенсионного возраста, женщины, находящиеся в отпуске по уходу за ребенком, женщины, не состоящие в трудовых отношениях и имеющие детей дошкольного возраста в возрасте от 0 до 7 лет включительно и ряд других категорий. Впервые в этом году добавлена категория выпускников, которые в течение четырех месяцев после окончания вуза или ссуза не могут устроиться на работу.

Категория слушателей - все заинтересованные лица из перечисленных выше. Уровень образования: высшее, среднее специальное. Требования к уровню подготовки поступающего на обучение – школьный курс информатики. Трудоемкость обучения 72 часа. Форма обучения очно-заочно с применением дистанционных образовательных технологий.

В результате освоения данного курса обучающиеся должны знать основные понятия в области алгоритмизации, свойства алгоритмов, методы анализа сложности алгоритмов; синтаксис и базовые конструкции языка С, основные возможности и приемы программирования на этом языке; принципы структурного программирования; назначение, устройство и свойства основных структур данных, алгоритмы поиска и сортировки.

Уметь разрабатывать алгоритмы решения типичных задач и реализовывать их на языке С, использовать для разработки современные интегрированные среды разработки. Владеть навыками построения математической модели и алгоритма для прикладной задачи; написания и отладки программ в интегрированной среде разработки.

Библиографический список

1. Полат Е. С. Педагогические технологии дистанционного обучения / Е. С. Полат, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; под ред. Е. С. Полат. — М.: Академия, 2006.

2. Смолякова Л.Л., Половикова О.Н., Пиянзин А.И. Профессиональная направленность курса по программированию для бакалавров с учетом государственных приоритетов развития цифровой экономики. Мир науки, культуры, образования. № 3 (76) июнь 2019.

3. Половикова О.Н., Смолякова Л.Л. Разработка электронного курса смешанной формы обучения по дисциплине «Объектно-ориентированное программирование» (научная статья) Информация и образование: границы коммуникаций INFO'19: сборник научных трудов №11. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2019.

О применении цифровых технологий при изучении математического анализа

А.В. Устюжанова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

В статье обсуждается роль цифровых технологий при изучении математических дисциплин. Приведены примеры применения цифровых технологий на занятиях по математическому анализу.

Ключевые слова: *цифровые технологии, учебный процесс, математический анализ.*

Компьютерные технологии достаточно давно используются для организации учебного процесса. В последнее время в системе образования происходят серьезные изменения, направленные на создание и распространение новых моделей работы образовательных организаций на основе цифровых технологий [1-4].

В настоящее время студенты к началу обучения в вузе обладают цифровыми навыками, которые необходимы им в повседневной жизни, а также знакомы с разными цифровыми сервисами и приложениями. Поэтому одной из задач современного вузовского образования, на наш взгляд, является разработка методов наиболее эффективного использования уже имеющихся цифровых навыков у обучающихся и дальнейшее их развитие при изучении математических дисциплин.

Цифровые технологии в обучении математике обычно используются в качестве инструмента для визуализации учебного материала и математического моделирования. В [2] авторы обращают внимание на психолого-педагогические исследования о взаимодействии цифровых технологий и математического образования, о масштабах и ограничениях использования цифровых технологий на занятиях по математике. Целью таких исследований является анализ влияния цифровых технологий на качество математического образования, изучение способов организации занятий по математике с применением цифровых инструментов.

В [3] предлагается использовать цифровые образовательные ресурсы для формирования тех знаний, умений и навыков по математическому анализу, которые студенты не смогли приобрести во

время практических и лекционных занятий. Для студентов Алтайского государственного университета также разработаны тестовые задания, предназначенные для проверки и самопроверки знаний по отдельным темам математического анализа. Но опыт показывает, что если у студентов нет мотивации к обучению, то прохождение в дистанционном режиме таких тестов качество знаний не улучшает.

Рассмотрим другие области применения цифровых технологий в курсе математического анализа. При изучении кратных интегралов необходимо знать основные понятия аналитической геометрии: точка, прямая, плоскость, кривые и поверхности второго порядка. К сожалению, приходится сталкиваться с низким качеством таких знаний у ряда студентов вследствие разных причин. Особенно актуально это для специальностей, где фундаментальная математическая подготовка считается излишней и количество учебных часов на изучение математических дисциплин в последнее время сокращается. В этом случае цифровые технологии могут быть использованы для частичного преодоления подобных затруднений, возникающих в учебном процессе. Кроме того, появляются дополнительные возможности для формирования и совершенствования цифровых навыков, направленных на решение прикладных задач, в которых требуется математическое моделирование.

Приведем несколько примеров задач, которые предлагаются на практических занятиях математического анализа при изучении темы «Кратные интегралы».

Задача 1. Вычислить площадь плоской области, ограниченной линией $x^3 + y^3 = axy$.

Задача 2. Вычислить $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, где область V ограничена

поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При решении подобных задач необходимо иметь геометрическое представление об области, по которой происходит интегрирование. Одним из удобных цифровых инструментов для изучения и преподавания математики является интерактивный математический программный пакет GeoGebra. С помощью GeoGebra можно строить динамические графики функций одной и двух переменных, наглядно

экспериментировать с ними, осуществлять поворот полученного изображения на удобный угол при решении конкретной задачи.

Отметим, что во время занятий, на которых планируется работа с цифровыми инструментами, студентам необходимо предоставить доступ к цифровым технологиям. Не стоит забывать, что использование компьютерных программ помогает понять геометрическую постановку самой задачи, но далее студенты, изучающие математический анализ, должны научиться вычислять «вручную» представленные выше двойные или тройные интегралы.

Цифровые технологии в разных сферах деятельности, в том числе и образовании, – это наша действительность. Но цифровые технологии не заменят математическое образование, они могут быть только вспомогательным инструментом для лучшего понимания и изучения математических дисциплин и повышения цифровой грамотности.

Библиографический список

1. Козлова Н.Ш. Цифровые технологии в образовании // Вестник Майкопского государственного технологического университета. – 2019. – № 1. – С. 83–91.

2. Чайкина Е.В. О необходимости использования электронных образовательных ресурсов по математическому анализу в техническом вузе // Современные наукоемкие технологии. – 2017. – № 3. – С. 120–124.

3. Molina-Toro J., Rendón-Mesa P.A., Villa-Ochoa J. Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education // Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. – 2019. – № 15. – P. 1–13.

4. Егорова Е.М. К вопросу о цифровизации в обучении математических дисциплин // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2020. – №4 (33). – С. 121-124.

НАШИ АВТОРЫ

Адиканова Салтанат, PhD, декан высшей школы IT и естественных наук, Восточно-Казахстанского университета им. С. Аманжолова.

Тлебалдинова Айжан, PhD, ассоциированный профессор кафедры компьютерного моделирования и информационных технологий Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, 070014, Казахстан, г.Усть-Каменогорск, ул. Шакарима, 148, Тел.: +7-705-752-15-22 Эл. почта: a_tlebaldinova@mail.ru.

Алгазина Дарья Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра цифровых технологий и бизнес-аналитики, e-mail: darya.algazina@mail.ru.

Алгазина Юлия Геннадьевна, кандидат экономических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул, факультет информационных технологий, кафедра «Информационные системы в экономике», e-mail: algazina@inbox.ru.

Алимбекова Нурлана Бауржановна, Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан), кафедра математики, сениор-лектор, e-mail: nurlana1101@gmail.com.

Алябышева Юлия Анатольевна, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра информатики, e-mail: veryaeva@gmail.com.

Амангелдин Адилет Сунгатулы, магистрант, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, e-mail: amangeldin1999@inbox.ru.

Андреева Татьяна Андреевна, магистрант, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, e-mail: andreeva08t@mail.ru.

Бондарович Андрей Александрович, кандидат географических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра экономической географии и картографии, e-mail: 79130262571@yandex.ru

Антропов Вадим Алексеевич: студент, Алтайский государственный Университет, Институт математики и информационных технологий, e-mail: angelelitegaming@mail.ru.

Афанасьева Анастасия Евгеньевна, ЮУрГГПУ (г. Челябинск), студент, e-mail: safonafan01@mail.ru.

Ахмерова Ирина Геннадьевна, Алтайский государственный

университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: iakhmerova@mail.ru.

Баев Лев Александрович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: baevlev9@gmail.com.

Байгереев Досан Рахимгалиевич, PhD, Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан), кафедра математики, ассоц. профессор, e-mail: dbaigereyev@gmail.com.

Баянова Надежда Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра алгебры и математической логики, e-mail: bayanova@math.asu.ru.

Безуглов Александр Игоревич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: a.bezuglov@bk.ru.

Бектенова Асель Мергалиевна, Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева, Школа информационных технологий и информационных систем, докторант, e-mail: bektenova_a@ukk.nis.edu.kz.

Береговых Анастасия Александровна, студент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: nberegovich@bk.ru.

Борисов Павел Валерьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: Saintersgame@mail.ru.

Бубарева Олеся Александровна, кандидат технических наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова», доцент кафедры методов и средств измерений и автоматизации, e-mail: angel@bti.secna.ru.

Будкин Александр Иванович, Алтайский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, e-mail: budkin@math.asu.ru.

Букатов Кирилл Евгеньевич, студент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, e-mail: kiropp27@gmail.com.

Бурлаков Игорь Валерьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: jckfijd@gmail.com

Ваганов Алексей Владимирович, кандидат биологических наук, Южно-Сибирский ботанический сад, старший научный сотрудник, e-mail: vaganov_vav@mail.ru.

Вараксин Сергей Владимирович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра алгебры и математической логики, доцент, e-mail: varaksin@math.asu.ru.

Вирец Рудольф Александрович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: virtsrudolf@gmail.com.

Габова Мария Андреевна, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, кафедра «Информационные системы в экономике», gabova_ma@mail.ru.

Гамова Алла Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, факультет компьютерных наук и информационных технологий, доцент, e-mail: gamovaan@yandex.ru.

Гилев Павел Вячеславович, бакалавр, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент.

Гилева Елизавета Алексеевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: molniy1111@gmail.com.

Глушко Дмитрий Сергеевич, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова», студент, e-mail: glushko2003@mail.ru.

Гнедко Максим Евгеньевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: gnedko98@mail.ru.

Гончаров В.И. – профессор-консультант Отделение автоматизации и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета. Email: gvi@tpu.ru

Григорьев Данила Сергеевич, Алтайский государственный педагогический университет, Институт информационных технологий и физико-математического образования, студент, e-mail: mailto:danila.grigoryev.2019@mail.ru

Гринкевич Александр Владимирович, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: alexander.grin97@gmail.com.

Денисова Наталья Федоровна, Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева, Школа информационных технологий и информационных систем, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: nata69_07@mail.ru.

Драничников Иван Анатольевич, АО «Федеральный научно-производственный центр «Алтай», Отдел неразрушающего контроля и физических методов исследования, начальник сектора, e-mail: akaLiic1@gmail.com.

Ефанов Алексей Владимирович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: leshafanov@gmail.com.

Жабина Алиса Владимировна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: alice230801@mail.ru.

Журавлев Евгений Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: evzhuravlev@mail.ru.

Забровский Александр Владимирович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: ausesin@gmail.com.

Завьялова Кристина Николаевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: kristina-zavyalova-1996@mail.ru.

Зайков Владимир Федорович, Южно-Сибирский ботанический сад, младший научный сотрудник, e-mail: zaikov@mail.ru.

Захарова Евгения Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: elka6187@yandex.ru.

Калинин Никита Николаевич, Алтайский государственный университет, Институт цифровых технологий, электроники и физики, магистрант, e-mail: nik.nikita.kalinin.98@mail.ru.

Калугина Светлана Сергеевна, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: ana.kalugina.97@mail.ru.

Канашева Саня Алмаскызы, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент.

Каракулова Ирина Владимировна, Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра «Высшая математика»,

старший преподаватель, e-mail: mail_for_irina@inbox.ru.

Каримов Александр Вячеславович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: aleksandrkarimov1488@gmail.com.

Кислицин Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, научный отдел, старший научный сотрудник; Алтайский государственный педагогический университет, кафедра математики и методики обучения математике, доцент, e-mail: kislitsin@altspu.ru.

Клепиков Павел Николаевич, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, преподаватель, e-mail: klepikov.math@gmail.com.

Кодолов Артем Владимирович, АО «Федеральный научно-производственный центр «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматики, начальник, e-mail: post@frpc.secna.ru.

Козлов Денис Юрьевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой информатики, e-mail: dyk.barnaul@gmail.com.

Коржавин Алексей Анатольевич, доктор технических наук, Институт химической кинетики и горения СО РАН (г. Новосибирск), лаборатория физики и химии горения газов, заведующий, e-mail: corzh@kinetics.nsc.ru.

Коростелев Вадим Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: midav.korostelev@gmail.com.

Коротких Дмитрий Андреевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, korotkih.00@gmail.com.

Кравченко Галина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений, доцент, e-mail: kravchenko@math.asu.ru

Кротова Ольга Сергеевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, преподаватель кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: kr.olga0910@gmail.com.

Крупский Никита Владимирович, студент, Алтайский государственный медицинский университет, Институт стоматологии.

Кузнецова Кристина Александровна, студент Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail:

kristina_24_2000@mail.ru

Куксина Анастасия Алексеевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: nastykukk@gmail.com.

Кульшин Антон Витальевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: KulshinTony@gmail.com.

Курочкин Дмитрий Владимирович, ИП Курочкин, Барнаул.

Курушбаева Динара Талгатовна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: sh_din097@mail.ru.

Лаас Александр Андреевич, б/с, асп., Алтайский государственный университет (АлтГУ), 656049, г. Барнаул, пр. Ленина, д. 61, e-mail: aleksandr_laas@mail.ru

Ларионова Виктория Николаевна, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: lazylazo801@gmail.com.

Леонова Эвелина Ивановна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: leonova.eve@gmail.com.

Линевич Любовь Андреевна, Алтайский государственный университет, Колледж, преподаватель высшей категории, e-mail: linevich_la@mail.ru.

Липатов Максим Владимирович, Югорский Государственный Университет, Институт цифровой экономики, студент, e-mail: lmv061098@edu.ugrasu.ru

Логвиненко Владимир Александрович, ЮУрГГПУ (г. Челябинск), студент, e-mail: vov.logvinenko@mail.ru.

Лодейщикова Виктория Владимировна, доцент, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра высшей математики, доцент, e-mail: lodeischikova@gmail.com.

Лукавский Евгений Витальевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: elukavski@gmail.com

Лукьянова Марина Максимовна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: marina909507@gmail.com.

Мальцев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, почетный профессор АлтГУ, e-mail: maltsevyn@gmail.com.

Маничева Анастасия Станиславовна, к.т.н., доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: manichevaas@mc.asu.ru.

Мархаба Карменова, PhD, сениор-лектор кафедры компьютерного моделирования и информационных технологий Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, 070014, e-mail: mmm_0582@mail.ru.

Миненков Сергей Павлович, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: sergo.skinner@yandex.ru.

Мироненко Наталья Олеговна, Алтайский государственный медицинский университет, Институт педиатрии, студент, e-mail: natalim.210@mail.com.

Михеева Татьяна Викторовна, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: miheeva-t@yandex.ru.

Молдашева Ж.Ж. – докторант кафедры Информационных систем, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, email: zhadiral985@mail.ru.

Монастырева Анна Сергеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: akuzmina1@yandex.ru.

Мордясов Евгений Дмитриевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: michisig11i7@gmail.com.

Мусохранов Андрей Игоревич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: maj_22125@mail.ru.

Найманова Елизавета Станиславовна, студент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, e-mail: l.naimanova@mail.ru.

Никольский Олег Константинович, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, главный научный сотрудник, e-mail: epb_401@mail.ru.

Оразбаев Б.Б. – доктор технических наук, профессор кафедры Системного анализа и управления, Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилёва, email: batyr_o@mail.ru.

Оскорбин Дмитрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики

и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: oskorbin@yandex.ru.

Останин Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, заместитель генерального директора по научной работе ООО «Алтайский геофизический завод», e-mail: ostanin1963@mail.ru.

Осыкин Дмитрий Алексеевич Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: minarai18@mail.ru.

Павлова Анна Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: anya.0596@mail.ru.

Папин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: papin@math.asu.ru.

Пекарская Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: pekarskayat@yandex.ru

Петров Евгений Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт массовых коммуникаций, филологии и политологии, доцент кафедры медиакоммуникаций, технологий рекламы и связей с общественностью, e-mail: pep@email.asu.ru.

Петрова Анна Георгиевна, д. ф.-м. н, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, профессор кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: annapetrova07@mail.ru

Пиянзин Алексей Илларионович, кандидат медицинских наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики; Алтайский государственный медицинский университет, доцент кафедры патофизиологии, e-mail: bio7777777@mail.ru.

Плотникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: pselena@gmail.com.

Погосян Вардан Баландурович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: vardan.pogosyn@yandex.ru.

Подосинникова Валерия Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и

информационных технологий, студент, e-mail: lerapod_28@mail.ru.

Покалякин Захар Валерьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: zpokalyakin@gmail.com.

Половикова Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: ponOlgap@gmail.com.

Поломошнова Юлия Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: Pyulyae@mail.ru.

Пономарев Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: igorpon@mail.ru.

Понькина Елена Владимировна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, зав. кафедрой теоретической кибернетики и прикладной математики, Барнаул, e-mail: ponkina@math.asu.ru.

Попов Федор Алексеевич, доктор технических наук, профессор, АО «Федеральный научно-производственный центр «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматики, главный научный сотрудник, e-mail: pfa2004@mail.ru.

Попова Татьяна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: KhvorovaLA@gmail.com.

Правдивцев Артем Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: as.pravdivtsev@yandex.ru.

Пронин Сергей Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент.

Просвирина Алина Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: aa.prosvirina@yandex.ru.

Родионов Евгений Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, e-mail: edr2002@mail.ru.

Родионова Людмила Васильевна, кандидат социологических наук, Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, старший научный сотрудник, e-mail: lvricie@mail.ru.

Романов Антон Александрович, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул, факультет информационных технологий, кафедра «Информационные системы в экономике», студент, e-mail: tosharomanov2012@yandex.ru.

Рупасов Кирилл Степанович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: kirillrupasov143@gmail.com.

Рябов Иван Юрьевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, аспирант, ivan.ryabov.y@mail.ru.

Саженок Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, кафедра математического анализа, заведующий, e-mail: sazhenkov_an@mail.ru.

Саженок Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск), лаборатория КЗ МСС, с.н.с., Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, профессор кафедры теоретической механики, sazhenkovs@yandex.ru.

Саженкова Елена Владимировна, НГУЭУ (Новосибирск), кафедра математики и естественных наук, старший преподаватель, elsazh1977@yandex.ru.

Саженкова Татьяна Владимировна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра математического анализа, доцент, t.sazhenkova@gmail.com.

Саломатин Александр Александрович, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, лаборатория «Киберфизических систем», младший научный сотрудник, e-mail: karateka30@mail.ru.

Самсонкин Алексей Анатольевич, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул, университетский технологический колледж, факультет информационных технологий, кафедра «Информационные системы в экономике», студент, e-mail: al_student@mail.ru.

Семенов Сергей Петрович, кандидат физико-математических наук, Югорский Государственный Университет, Институт цифровой экономики, доцент кафедры цифровых технологий, e-mail: ssp@ugrasu.ru.

Сеначин Андрей Павлович, кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: senachin.ap@yandex.ru.

Сергиенко Алие Мустафаевна, доктор социологических наук, Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, ведущий научный сотрудник, e-mail: a.m.sergienko@mail.ru.

Серых Кирилл Сергеевич, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, e-mail: s.kirill123@mail.ru.

Сибин Антон Николаевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, старший преподаватель, e-mail: sibin_anton@mail.ru.

Сибирякова Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: sibiriakova.tatiana@mail.ru.

Скурыдин Юрий Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт цифровых технологий, электроники и физики, e-mail: skur@rambler.ru.

Скурыдина Елена Михайловна, кандидат технических наук, Алтайский государственный педагогический университет, Институт информационных технологий и физико-математического образования, доцент, e-mail: skudem@rambler.ru.

Смирнов Виталий Васильевич, кандидат технических наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова», доцент кафедры технологии машиностроения и качества, e-mail: smirnov.vv@bti.secna.ru.

Смолякова Лариса Ленгардовна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, старший преподаватель, e-mail: knaus.larisa@gmail.com.

Строкин Дмитрий Игоревич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: mega.strokin@mail.ru.

Токарева Маргарита Андреевна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: tma25@mail.ru.

Тримбач Марина Геннадьевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: mtrimbach@bk.ru.

Тушкина Татьяна Михайловна, кандидат физико-математических

наук, доцент, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова», отдел учебной работы и менеджмента качества образования, начальник, e-mail: tanyamt@mail.ru.

Унтерова Дарья Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: dashunya_28_01@bk.ru

Устюжанова Алла Владимировна, к.ф.-м.н., Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru.

Уфимцева Виктория Павловна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: vik.ufimtceva@yandex.ru.

Фелькер Никита Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: felker.407m@stud.asu.ru.

Фоменко Анастасия Павловна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, преподаватель кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: nastena_fomenko@list.ru.

Хабашнашева Татьяна Ивановна, доктор физико-математических наук, доцент, Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН (г. Новосибирск), Лаборатория краевых задач механики сплошных сред, старший научный сотрудник, e-mail: tana@hydro.nsc.ru.

Хворова Любовь Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: KhvorovaLA@gmail.com.

Хромова Олеся Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, e-mail: khromova.olesya@gmail.com.

Чжун Цзябинь, Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, магистрант, 903699635@qq.com

Чуракова Анастасия Андреевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: churakova_2013@mail.ru.

Шахова Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail:

ssa@math.asu.ru.

Ширяев Вячеслав Вячеславович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: asmuddi628@gmail.com.

Шишимарев Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: shishmarev.k@mail.ru.

Шумакова Екатерина Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, ЮУрГГПУ (г. Челябинск), e-mail: shumakovaeo@cspu.ru.

Янов Сергей Иванович, Алтайский государственный педагогический университет, Институт информационных технологий и физико-математического образования, кафедра математики и методики обучения математике, доцент, e-mail: ianov_si@altspu.ru.

Оглавление

СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	3
НАКРЫТИЯ В РЕШЕТКЕ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ -ГРУПП.....	7
О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП, НЕ ИМЕЮЩИХ НЕЗАВИСИМЫХ БАЗИСОВ КВАЗИТОЖДЕСТВ	11
О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВОБОДНЫХ m -ПРОИЗВЕДЕНИЙ В КЛАССЕ МЕТАБЕЛЕВЫХ МОНОТОННО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМАМИ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ	13
КОММУТАТИВНОСТЬ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ С АВТОМОРФИЗМАМИ.....	15
СЖАТЫЕ ГРАФЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ НЕКОТОРЫХ КОЛЕЦ МАТРИЦ	17
УСЛОВИЯ КОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ ТОЖДЕСТВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ	20
О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССА ЛЕВИ, ПОРОЖДЕННОГО КВАЗИМНОГООБРАЗИЕМ 3-СТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП	23
ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ ДИЭДРА ПОРЯДКА 2^2	25
О КЛАССАХ ЛЕВИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ 2-СТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ ЭКСПОНЕНТЫ $ps - 1$	29

СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 32

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА КОНФОРМНО-КИЛЛИНГОВЫХ ПОЛЕЙ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ПОРЯДКА 2	32
---	----

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ШТЕЙНЕРА	37
КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ МИНКОВСКОГО В ТРЕХМЕРНОМ ЦИФРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	40
ЗАДАЧА ОБ ОХРАНЕ КАРТИННОЙ ГАЛЕРЕИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА	43
О ТЕНЗОРАХ КРИВИЗНЫ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗНОСТЕЙ ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП Ли.....	46
ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ (ПСЕВДО)РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ И ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ	50
О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ВЕРШИНЫ КОТОРОГО ЯВЛЯЮТСЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА	53
О СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОТОКАХ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ	55
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА РЕГИОНАЛЬНОМ РЫНКЕ ТРУДА	58
О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА ПРЯМОЙ	61
ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ПОТОКАХ НА ГРАФАХ	66
СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	70
Фильтрация воды и воздуха в пороупругом льду	70
Движение внешней нагрузки в замороженном канале	74
Численное исследование автомодельной задачи о движении жидкости в тающем.....	78
Пороупругом льду.....	78
Разрешимость двумерной задачи фильтрации с переменной пористостью.	82

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ ТЕРАПИИ РАКА НА ОСНОВЕ ИНГИБИРОВАНИЯ БЕЛКОВ БЭТ (ВЕТ) СЕМЕЙСТВА И ИММУНОЛОГИЧЕСКИХ КОНТРОЛЬНЫХ ТОЧЕК (СНЕСКРОИН).....	85
АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ДЕТОНАЦИИ ПЕРЕД ФРОНТОМ ПЛАМЕНИ В ВОДОРОДНОМ ДВИГАТЕЛЕ. I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ..	89
НОВАЯ РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ КАК АППРОКСИМАЦИЯ МЕЗОСКОПИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ИХ ДИНАМИКЕ.....	93
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ.....	109
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УГЛЕРОДА В БОЛОТНЫХ ЭКОСИСТЕМАХ.....	113
ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МУТНОСТИ ВОДЫ ПРИ РАСЧИСТКЕ РУСЛА РЕКИ УСА.....	117
ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ВОДНОМ РАСТВОРЕ ПОЛИМЕРА.....	121
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ: КЛЕТКА, МЕЖКЛЕТОЧНАЯ ЖИДКОСТЬ, ВНЕКЛЕТОЧНЫЙ МАТРИКС	127
УСРЕДНЁННЫЕ ДВУХМАСШТАБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГОГО КОМПОЗИТА.....	131
ОДНОСТОРОННЯЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА.....	136
БАРЕНЬЛАТТА — ЖЕЛТОВА — КОЧИНОЙ	136
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТОГО ЛЕДОВОГО ПОКРОВА.....	142
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОДВОДНОГО ТЕЛА В ЗАМОРОЖЕННОМ КАНАЛЕ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ ЛЬДА	146
АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАСЫЩЕНИЯ РАСТВОРА	151

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В ЗАМОРОЖЕННОМ КАНАЛЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНОЙ ЛЬДА	154
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА В КАНАЛЕ	158
ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ФИНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ	162
СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА.....	165
К УСЛОВИЯМ СХОДИМОСТИ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ К РАВНОВЕСИЮ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ.....	165
РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИИ ПАРКТРОНИКА С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКОВОГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ АВТОМОБИЛЯ.....	168
ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО СТРАХОВАНИЮ ЖИЗНИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА	172
ПРОЕКТ «РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОГО СЕРВИСА ПРОГНОЗА ПОГОДЫ НА ЛОКАЛЬНОМ УЧАСТКЕ»	177
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМНОЙ КАМПАНИИ	180
РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УЧЕТА ПОКАЗАНИЙ СЧЕТЧИКОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ.....	184
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОПУСКОВ В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДАННЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА.....	187
РАЗРАБОТКА ИНСТРУМЕНТОВ АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ СТРУКТУРНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	191
РАЗРАБОТКА ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИНА ПРОДОВОЛЬСТВЕННЫХ ТОВАРОВ	194
ОБНАРУЖЕНИЕ СОРНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ	197

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА СОПОСТАВЛЕНИЯ ОЦЕНОК СКЛОННОСТЕЙ В ОБЛАСТИ КРЕДИТОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ	201
--	-----

СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ С МНОГОЯЗЫЧНЫМИ ДЕЛОВЫМИ ТЕКСТАМИ	205
РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ.....	208
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХФАЗНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ	211
СОЗДАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ЛЁГОЧНЫХ ЗВУКОВ ДЕТЕЙ	216
ЦИФРОВИЗАЦИЯ СТУДЕНЧЕСКИХ СТОЛОВЫХ	218
КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХЕШ-КОДОВ ПАРОЛЕЙ И ШИФРОВАНИЯ.....	220
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ В КОНТЕКСТЕ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ НАУЧНО- ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ	224
РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «АТЕЛЬЕ. ВНУТРЕННИЙ УЧЁТ».....	228
РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФИЗИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РЕБЕНКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ REACT	232
АНАЛИЗ И ОЦЕНКА ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ ПО ОБЛАСТЯМ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ.....	234
ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЧЕСКОГО СИГНАЛА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ СЕРДЕЧНЫХ ПАТОЛОГИЙ	239

РАЗРАБОТКА СЕРВИСА ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СДЕЛОК С НЕДВИЖИМОСТЬЮ В НОВОСТРОЙКАХ	247
ДИАГНОСТИКА СТОМАТОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ У ДЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ	250
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПЕРСОНАЛА ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ..	252
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИГРЫ В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МЕДИЦИНСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ	257
АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ И КОНТРОЛЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ НЕФТЕПРОВОДОВ.....	262
КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ИГРЕ В ШАХМАТЫ	271
РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «УЧЕТ ОБСЛУЖИВАНИЯ КАССОВЫХ АППАРАТОВ».....	276
ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ СЕРВИСОВ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОРТАЛА ГОТОВЫХ ПРОГРАММНЫХ РАЗРАБОТОК СТУДЕНТОВ И МАГИСТРОВ....	279
РАЗРАБОТКА КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВЫХ ТЕКСТОВ	282
ПОВЫШЕНИЕ СТОЙКОСТИ СТЕГАНОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ GIF-ИЗОБРАЖЕНИЯ В КАЧЕСТВЕ ФАЙЛОВ-КОНТЕЙНЕРОВ.....	285
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ	290
РЕАЛИЗАЦИЯ СЕРВИСОВ ПО АВТОМАТИЗАЦИИ РАЗВЁРТЫВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММНЫМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ СТУДЕНТОВ.....	294
СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА .	297
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ НИШ РАСТЕНИЙ.....	297

РАСЧЕТ ПОЖАРНЫХ РИСКОВ ЭЛЕКТРОУСТАНОВОК АПК НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ.....	302
АРХИТЕКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ НЕЙРОСЕТИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СОНЛИВОСТИ ВОДИТЕЛЯ.....	307
ПОСТРОЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИРУСНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ.....	312
РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ТРЕКИНГА И ОБРАБОТКИ ДВИЖЕНИЙ	316
РЕАЛИЗАЦИЯ СЕРВИСА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОРПОРАТИВНЫХ ВИДЕОКОНФЕРЕНЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА	320
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ ТРАВМАТИЗМА НАСЕЛЕНИЯ ГОРОДА БАРНАУЛА.....	323
ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ВЫЧИСЛЕНИЯ SUPERCOOKIE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ.....	326
ОЦЕНКА УСЛОВИЙ ОБИТАНИЯ, ЧИСЛЕННОСТИ, ПОЛОВОЙ И ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ПОПУЛЯЦИИ РАЧКА <i>ARTEMIA</i> ОЗЕРА КУЛУНДИНСКОЕ	330
СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ	334
РОЛЬ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ.....	334
GIFTEDNESS AND THE ROLE OF INFORMATION TECHNOLOGY IN THE IDENTIFICATION AND DEVELOPMENT OF GIFTEDNESS	337
ГЕНЕРАТОР ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ НА <i>WOLFRAM MATHEMATICA</i>	346
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕД РАЗРАБОТКИ UNITY И VUFORIA ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ	349
ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЦИФРОВАЯ КУЛЬТУРА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ».....	353

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В КОЛЛЕДЖЕ...	358
О РОЛИ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ИТ-КОМПЕТЕНЦИЙ БАКАЛАВРОВ.....	361
ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ПРОГРАММЫ ДПО «ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА С» ДЛЯ ФЕДЕРАЛЬНОГО ПРОЕКТА «СОДЕЙСТВИЕ ЗАНЯТОСТИ»	364
О ПРИМЕНЕНИИ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	366
НАШИ АВТОРЫ	369