



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ С  
МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

Барнаул 2024

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**СБОРНИК ТРУДОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ  
с международным участием**

*Фундаментальная и прикладная математика*

*Цифровая экономика*

*Современные информационные и вычислительные  
технологии в прикладных задачах*

*Информационные технологии и системы искусственного  
интеллекта*

*Цифровые и информационные технологии в  
профессиональном образовании*

**ББК 22.1я431**

**М 150**

**Главный редактор**  
профессор Н.М. Оскорбин

**Редколлегия:**

А.И. Будкин, Д.Ю. Козлов, Г.В. Кравченко, А.А. Папин,  
Е.П. Петров, Е.В. Понькина, Е.Д. Родионов, А.Н. Саженьков

**М 150 МАК: «Математики – Алтайскому краю».** [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2024. – 218 с.

Выпуск содержит статьи, в которых представлены основные результаты научных исследований преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, докторантов и студентов учебных заведений. Конференция «МАК-2024» представляет собой Российско-Казахстанский проект, целью которого является активизация отношений с ВУЗами Казахстана и проведение конструктивного научного сотрудничества по важным для России и Казахстана направлениям в сфере образования и научно-исследовательской деятельности.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, прикладной математики, математического моделирования и информационных технологий в социальных, экономических, экологических системах; интенсификация междисциплинарных исследований, развитие научной активности научно-ориентированной молодежи, привлечение ее к решению актуальных задач современной науки и практики; сохранение и развитие научного потенциала Алтайского края и других регионов.

**ISSN: 2687-0118**

© Алтайский государственный университет, 2024

# СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.545

## О конечно-порожденных $\ell$ - группах из многообразия $\mathcal{L}_p$

*Н.В. Баянова*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе рассматриваются конечно-порожденные  $\ell$  – группы из многообразия  $\ell$  – групп с тождеством  $[x^p, y^p] = e$ . Доказано, что в таких  $\ell$  – группах существует конечное число попарно ортогональных сопряженных между собой положительных элементов.

**Ключевые слова:**  $\ell$  – группа, многообразие, ортогональные элементы.

Напомним [1], что алгебраическая система  $G$  сигнатуры  $\ell = \langle e, \text{ }^{-1}, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ , совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями:

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, \quad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy$$

называется решеточной упорядоченной группой ( $\ell$  – группой).

Как обычно,  $|x| = xv x^{-1}$ ,  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ ,  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел. Запись  $a \gg b$  означает, для любого целого  $n$  выполнено неравенство  $|a| \geq |b|^n$ . Элементы  $a$  и  $b$   $\ell$  – группы  $G$  называются ортогональными, если  $|a| \wedge |b| = e$ .

Класс  $\ell$  – групп  $X$  называется многообразием  $\ell$  – групп, если существует множество  $\Phi$  тождеств сигнатуры  $\ell$  такое, что  $X$  состоит из всех  $\ell$  – групп, на которых истинны все тождества из  $\Phi$ .

Через  $\mathcal{L}_p$ , где  $p$  – простое число, обозначим многообразие  $\ell$  – групп, определяемое тождеством  $[x^p, y^p] = e$ .

Обозначим через  $var_{\ell}(K)$  многообразие  $\ell$  – групп, порожденное классом  $\ell$  – групп  $K$ .

Все необходимые определения по решеточно упорядоченным группам можно найти в [1].

Согласно [2], обозначим через  $A(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , группу

$$A(n, p) = \text{gr} \langle u_1, \dots, u_n, a \mid [u_i, u_j] = [a, u_i^p] = e, \$$

$$[(u_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\sigma_n})^{-1} a u_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\sigma_n}, a] = e \rangle,$$

где  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M_n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i \in \{0, 1\}\}$ .

Решеточный порядок на группе  $A(n, p), n \in \mathbb{N}$  определим соотношениями:

$$1) u_1 \gg u_2 \gg \dots \gg u_n \gg a > e,$$

$$2) a \wedge (u_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\sigma_n})^{-1} a u_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\sigma_n} = e, \text{ при } \sum_{i=1}^n \sigma_i \neq 0, \text{ где } (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M_n.$$

Непосредственные вычисления показывают, что  $\ell$  – группа  $A(n, p) \in \mathcal{L}_p$  и  $A(t, p) \leq A(n, p)$  для любого  $t \leq n$ .

В решетке многообразий  $\ell$  – групп имеем следующую цепочку вложений:

$$\mathcal{A}_\ell \subset \text{var}_\ell(S_p) \subset \text{var}_\ell(A(2, p)) \subset \dots \subset \text{var}_\ell(A(n, p)) \subset \dots \subset \mathcal{L}_p,$$

где  $\mathcal{A}_\ell$  – многообразие абелевых  $\ell$  – групп,  $\text{var}_\ell(S_p)$  – многообразие  $\ell$  – групп, порожденное  $\ell$  – группой Скримджера

$$S_p = \text{gr} \langle a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b \mid [a_i, a_j] = e, b^{-1} a_i b = a_j,$$

$$j \equiv i + 1 \pmod{p} \rangle$$

и считаем элемент  $x = b^n a_0^{k_0} a_1^{k_1} \dots a_{p-1}^{k_{p-1}} \geq e$ , если  $n > 0$  или  $n = 0, k_0 \geq 0, \dots, k_{p-1} \geq 0$ .

Справедлива следующая

**Теорема.** Для любой конечно-порожденной  $\ell$  – группы  $G \in \mathcal{L}_p$  имеем

1)  $G \in \text{var}_\ell(A(n_0, p)) \setminus \text{var}_\ell(A(n_0 - 1, p))$ , где  $n_0$  – минимальное из всех  $n$  с таким свойством.

2) в  $G$  существует  $p^{n_0}$  различных попарно ортогональных сопряженных между собой положительных элементов. ■

## Библиографический список

1. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы // М. – Наука – 1984. – 320 с.

2. Гурченков С. А. Многообразия  $\ell$  – групп с тождеством  $[x^p, y^p] = e$  конечно-базируемы // Алгебра и логика. – № 1(23) – 1984. – С. 27–47.

## О пополнении нильпотентных групп

А.И.Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

В данной работе найдено условие, при котором пополнение 3-ступенно нильпотентной группы без кручения содержится в квазимногообразии, порождённом этой группой.

**Ключевые слова:** группа, нильпотентная группа, полная группа, квазимногообразие групп.

Группа  $G$  называется полной, если для любого элемента  $g$  из  $G$  и для любого натурального числа  $n$  в группе  $G$  разрешимо уравнение  $x^n = g$ .

Говорят, что  $G$  – группа без кручения, если  $G$  не содержит элементов конечного порядка.

Пополнением группы  $G$  называется всякая минимальная полная группа, содержащая  $G$ .

А.И. Мальцев [1], используя методы теории групп и алгебр Ли, доказал существование и единственность с точностью до изоморфизма локально нильпотентного пополнения для произвольной локально нильпотентной группы без кручения. М.И. Каргаполовым в [2] доказано следующее обобщение сформулированной теоремы А.И. Мальцева: если множества  $\pi'$  и  $\pi$  простых чисел не пересекаются, то произвольная локально нильпотентная  $\pi'$  – группа обладает единственным локально нильпотентным  $\pi$  – пополнением, являющимся  $\pi'$  – группой. Методы, используемые в [2] при всех доказательствах, по существу принадлежат общей теории групп.

Квазимногообразие групп – это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитожествами.

Группа  $A$  вложима в группу  $B$ , если  $B$  содержит подгруппу, изоморфную  $A$ .

Будем использовать следующие обозначения:

$qG$  – это квазимногообразие, порождённое группой  $G$ , т.е. наименьшее квазимногообразие, содержащее  $G$ ;

$N_2$  – многообразие групп, задаваемое тождеством

$$[x, y, z] = 1,$$

т.е.  $N_2$  – многообразие нильпотентных групп ступени не выше 2;

$N_3$  – многообразие групп, задаваемое тождеством

$$[x, y, z, u] = 1,$$

т.е.  $N_3$  – многообразие нильпотентных групп ступени не выше 3;  
 $F(N_3)$  – свободная в  $N_3$  группа ранга 2;

В данной работе установлено следующее свойство квазимногообразий нильпотентных групп ступени не выше 2.

**Теорема 1.** Всякое квазимногообразие  $M$  нильпотентных групп без кручения ступени не выше двух порождается конечно порождёнными группами, в представлениях которых в классе нильпотентных групп без кручения ступени не выше 2 в порождающих и определяющих соотношениях всякое определяющее соотношение есть произведение коммутаторов веса 2 (т.е. коммутаторное).

Используя теорему 1, доказана

**Теорема 2.** Пусть  $M$  – произвольное квазимногообразие нильпотентных групп ступени не выше двух без кручения. Тогда любая группа  $A$  из  $M$  вложима в полную группу из  $M$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 3.** Всякая группа из квазимногообразия  $qF(N_3)$  вложима в полную группу из  $qF(N_3)$ .

## Библиографический список

1. Мальцев А.И. Нильпотентные группы без кручения// Изв. АН СССР, сер. Матем. 1949. Т. 13. С. 201-212.
2. Каргаполов М.И. О -пополнении локально нильпотентных групп// Алгебра и логика. Семинар. 1962. Т. 1, №1. С. 5-13.

## О полуциклически упорядоченных группах

С.В. Вараксин

АлтГУ, г. Барнаул

Статья посвящена исследованию групп монотонных подстановок циклически упорядоченных множеств.

**Ключевые слова:** *циклически упорядоченное множество, линейно упорядоченное множество, порядковые автоморфизмы*

Напомним, что непустое множество  $X$  называется циклически упорядоченным множеством (ц. у. множеством) [1, 2], если на  $X$  определено тернарное отношение  $C$ , обладающее следующими свойствами:

C1) если  $C(x, y, z)$ , то  $x \neq y \neq z \neq x$ ,

C2) если  $x \neq y \neq z \neq x$ , то имеет место ровно одно из отношений  $C(x, y, z)$  или  $C(x, z, y)$ ,

C3) если  $C(x, y, z)$ , то  $C(y, z, x)$ ,

C4) если  $C(x, y, z)$  и  $C(x, z, t)$ , то  $C(x, y, t)$ .

Пусть  $G$  - группа монотонных подстановок ц.у.множества  $\langle X, C \rangle$ , т.е. для любого  $g$  из  $G$  либо для всех  $x, y, z$  из  $X$  из условия  $C(x, y, z)$  следует  $C((x)g, (y)g, (z)g)$ , либо для всех  $x, y, z$  из  $X$  из условия  $C(x, y, z)$  следует  $C((x)g, (z)g, (y)g)$ .

Назовем группу  $G$  полуциклически упорядоченной, если на ней определен циклический порядок  $C$ , и для любого  $g$  из  $G$  выполнено либо для всех  $x, y, z$  из  $G$  из условия  $C(x, y, z)$  следует  $C((x)g, (y)g, (z)g)$ , либо для всех  $x, y, z$  из  $G$  из условия  $C(x, y, z)$  следует  $C((x)g, (z)g, (y)g)$ .

Следуя М. Жираде и Ф. Лукашу [3], назовем группу  $G$  полулинейно упорядоченной, если на ней введен линейный порядок  $\leq$ , и для любого  $g$  из  $G$  выполнено либо для всех  $x, y$  из  $G$  из условия  $x \leq y$  следует  $xg \leq yg$ , либо для всех  $x, y$  из  $G$  из условия  $x \leq y$  следует  $xg \leq yg$ .

**Предложение 1.** Каждая полулинейно упорядоченная группа  $G$  может быть полуциклически упорядочена, если циклический порядок  $C$  на  $G$  ввести как : для всех  $x, y, z$  из  $G$  выполнено, если выполняется одно из неравенств  $x < y < z$ ,  $e < z < x$  или  $z < x < y$ .

**Теорема 1.** Для любой полуциклически упорядоченной группы  $G$  найдется полулинейно упорядоченная группа  $\Gamma$ , содержащая

центральный элемент  $z > e$ , выпуклое замыкание  $\{z\}_\Gamma = \Gamma$  которого совпадает с  $\Gamma$ , при этом группа  $G \approx \Gamma/z$  может быть циклически упорядочена, если положить, что  $C(a, b, c)$ , если имеет место  $s_a < s_b < s_c$  или  $s_b < s_c < s_a$  или  $s_c < s_a < s_b$  для представителей  $s_a, s_b, s_c$  смежных классов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , удовлетворяющих условию  $e \leq s_a < z, e \leq s_b < z, e \leq s_c < z$ , и такой набор представителей единственен.

### Библиографический список

1. Копытов В. М., Медведев Н. Я. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400p.
2. Тарарин В. М., О группах автоморфизмов циклически упорядоченных множеств // Сиб. матем. журн. – 2001. – № 1(42) . – С. 212–230.
3. Giraudet, M.; Lucas, F. Half-ordered groups. (Groupes à moitié ordonnés.) (French) Zbl 0766.06014 Fundam. Math. 139, No. 2, 75-89 (1991).

## О представлении свободных произведений в классе нормальнозначных $m$ -групп автоморфизмами линейно упорядоченных множеств

*С.В. Вараксин*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В статье рассматриваются свободные произведения в классе нормальнозначных  $m$ -групп. Построено представление такого произведения  $m$ -групп автоморфизмами линейно упорядоченных множеств.

**Ключевые слова:** *решеточно упорядоченные группы,  $m$ -группы, порядковые автоморфизмы, линейно упорядоченные множества.*

Моноotonно упорядоченной группой, или  $m$ -группой,  $(G, \varphi)$  будем называть алгебраическую систему  $G$  с тремя бинарными операциями:  $\cdot$ ,  $\vee$  и  $\wedge$ , двумя унарными:  $^{-1}$  и  $\varphi$  и константой  $e$ . Она является  $\ell$ -группой, т.е. решеточно упорядоченной группой относительно операций  $\cdot, \vee, \wedge, ^{-1}$  и  $e$  и одноместная операция  $\varphi$  на ней является автоморфизмом второго порядка группы  $G$  и антиизоморфизмом решетки  $\langle G, \vee, \wedge \rangle$ . Для любых элементов  $x, y \in G$  выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y), & \varphi(\varphi(x)) &= x \\ \varphi(x\vee y) &= \varphi(x)\wedge\varphi(y), & \varphi(x\wedge y) &= \varphi(x)\vee\varphi(y) \end{aligned}$$

Базовые понятия и определения теории решеточно упорядоченных групп описаны в монографии [1]. Напомним, в частности, что  $\ell$ -группа является группой по умножению и дистрибутивной решеткой, умножение дистрибутивно относительно решеточных операций

$$a(x \wedge y)b = axb \wedge ayb, \quad a(x \vee y)b = axb \vee ayb$$

и решеточные операции определяют на  $G$  решеточный порядок:  $x \leq y$  если  $x\wedge y = x$  или, что то же самое,  $x\vee y = y$ . Монотонно упорядоченная группа называется нормальнозначной, если все скачки выпуклых  $\ell$ -подгрупп в ней субнормальны, т.е. нижняя  $\ell$ -подгруппа скачка является идеалом в верхней  $\ell$ -подгруппе. Многообразие нормальнозначных  $m$ -групп обозначается  $\mathcal{N}$  и его можно задать  $\ell$ -групповым тождеством  $|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|$ . Далее будем рассматривать только такие  $\ell$ -группы и  $m$ -группы. Пусть  $G$  – группа с частичным порядком  $P$  и автоморфизмом второго порядка  $\varphi$ . Будем

говорить, что порядок  $P$  реверсируется автоморфизмом  $\varphi$ , если из неравенства  $x \leq_P y$  следует неравенство  $\varphi(y) \leq_P \varphi(x)$ , а пару  $(G, \varphi)$  называть частично упорядоченной (ч.у.) группой с реверсией. Назовем также  $m$ -группу  $(F, \varphi)$  свободной над ч.у. группой с реверсией  $(G, \varphi)$ , если  $(G, \varphi)$  вложима в  $(F, \varphi)$  и любой порядковый гомоморфизм  $\alpha_0: G \rightarrow H$ , устойчивый относительно  $\varphi$ , продолжается до гомоморфизма  $\alpha: G \rightarrow H$ . Пусть теперь  $\{(G_i, \varphi_i)\}$  – некоторое множество нормальнозначных  $m$ -групп,  $G = \prod_i^* G_i$  – их свободное произведение в классе групп,  $\varphi$  – продолжение автоморфизмов  $\varphi_i$  на группу  $G$ , а частичный порядок  $P$  на группе  $G$  порожден порядками на группах  $G_i$ . Пусть  $H$  – свободная нормальнозначная  $m$ -группа над  $(G, \varphi)$ . Тогда  $m$ -группы  $(G_i, \varphi_i)$  допускают порядковые вложения  $\alpha_i$  в  $m$ -группу  $(H, \varphi)$ , перестановочные с  $\varphi$  (но не  $\ell$ -вложения). Обозначим через  $J = \langle (\alpha_i(g)^-)^{-1} \wedge (\alpha_i(g)^+ \mid g \in G_i) \rangle$   $m$ -идеал группы  $(H, \varphi)$ , а через  $F$  фактор-группу  $H/J$  по этому  $m$ -идеалу.

**Теорема.**  $m$ -группа  $(F, \varphi)$  является свободным произведением  $m$ -групп  $\{(G_i, \varphi_i)\}$  в классе нормальнозначных  $m$ -групп.

## Библиографический список

1. Копытов В. М., Медведев Н. Я. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – 400p.
2. Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. of Algebra. – 1970. – V.16. – P. 191-203.
3. Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. – 1999. – V.49(124). – P.743-766.
4. Holland C., Scrimger E. Free products of lattice-ordered groups // Algebra Univ. – 1972. – V.2. – P. 247-254.
5. Вараксин С.В. О свободных  $m$ -группах и свободных  $m$ -произведениях // Изв. Алт.ГУ. – 2013. – № 1. – С.16-18.

**О классификации конечных локальных колец**

*Е. В. Журавлев, О. А. Филина*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе с точностью до изоморфизма классифицированы все конечные локальные кольца  $R$  характеристики  $p$  ( $p$  – простое число) с единицей и условиями:  $\frac{R}{J} = GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$ ,  $\dim_F J/J^2 = 2$ ,  $\dim_F J^2 = 3$ ,  $J^3 = 0$ , где  $J = J(R)$  – радикал Джекобсона кольца и  $Z(R)$  – центр кольца  $R$ .

**Ключевые слова:** *конечные кольца, локальные кольца.*

Пусть  $R$  – конечное локальное кольцо с единицей,  $\text{char } R = p$  – простое число,  $J$  – радикал Джекобсона и  $Z(R)$  – центр кольца  $R$ ,  $R/J \cong GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$ ,  $r \in N$ , и

$$\dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

Тогда  $R$  – конечномерное векторное пространство над  $F$  и

$$R = F \oplus J, \quad J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3,$$

где  $\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$  – отмеченный базис  $J$  над  $F$  (см. [1]), причем  $u_1, u_2 \in J/J^2$ ,  $v_1, v_2, v_3 \in J^2$ . Так как  $u_i u_j \in J^2$ , то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + a_{ij}^{(3)} v_3,$$

для некоторых  $a_{ij}^{(k)} \in F$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант:  $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{2 \times 2}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Такие матрицы линейно независимы и, если  $R$  – коммутативно, то матрицы являются симметрическими.

Пусть  $\Sigma$  – множество всех таких элементов поля  $F = GF(p^r)$ , что для любых  $a, b \in \Sigma$  не существует изоморфизма  $\rho$  поля  $F$  при котором  $a^\rho = b$  (равносильно – для любых  $a, b \in \Sigma$  не существует такого натурального числа  $k$ , что  $a^{p^k} = b$ ). Пусть  $\Gamma$  – множество всех таких элементов  $\Sigma$ , что  $a \neq b + 1$  для любых  $a, b \in \Gamma$ .

**Теорема.** *Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей и условиями:*

$$R/J \cong F \subseteq Z(R), \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

где  $J$  – радикал Джекобсона кольца  $R$ ,  $F = GF(p^r)$  – конечное поле.

При  $p = 2$ :

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$
- (3)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$
- (4)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix},$  где  $\beta \in \Gamma, \eta = 0$  или  $\eta$  – некоторый элемент  $F,$

такой, что  $\eta \neq x^2 + x$  для всех  $x \in F;$

При  $p \neq 2:$

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 1 \end{pmatrix}; f \in \Sigma;$
- (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \zeta \in \{0, 1, \delta\}, \delta$  – некоторый фиксированный элемент из  $F^*, \delta \notin F^{*2}, \delta \neq 1.$

В настоящее время классифицированы все конечные локальные кольца с единицей порядка  $p^n,$  при  $n \leq 5$  (см. [2, 3]). Вопрос о полной классификации колец порядка  $p^6$  остается открытым. Ранее, в частных случаях, такие кольца были изучены в работах [4, 5, 6, 7].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, <https://rscf.ru/project/24-21-00155/>.

## Библиографический список

1. Chikunji C.J. On a class of finite rings, Commun. Algebra 27 (10), 5049–5081 (1999).
2. Gorbas B., Williams G.D. Rings of order  $p^5$ . I. Nonlocal rings, J. Algebra 231 (2), 677–690 (2000).
3. Gorbas B., Williams G.D. Rings of order  $p^5$ . II. Local rings, J. Algebra 231 (2), 691–704 (2000).
4. Zhuravlev E.V. On equivalence classes of matrices over a finite field

of odd characteristic, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 20, 1200–1210 (2023).

5. *Zhuravlev E.V.* Local rings of order  $p^6$  with 4-nilpotent radical of Jacobson, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 3, 15–29 (2006).

6. *Zhuravlev E.V.* On the classification of finite commutative local rings, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 12, 625–638 (2015).

7. *Akers C., Szabo S.* A partial classification of local rings of order  $p^6$ , *Involve a Journal of Mathematics* 16 (1), 151–165 (2023).

## Об одном почти коммутативном $L$ -многообразии

*А.В. Кислицин*

*Алтайский государственный педагогический университет,  
г. Барнаул*

В работе строится пример почти коммутативного  $L$ -многообразия векторных пространств над полем  $GF(2)$ , которое порождено пространством над полем  $GF(2)$ , не являющимся  $GF(2)$ -алгеброй.

**Ключевые слова:** мультипликативное векторное пространство, тождество мультипликативного векторного пространства,  $L$ -многообразии, почти коммутативное  $L$ -многообразие.

Пусть  $F$  – некоторое поле,  $E$  – векторное пространство над полем  $F$ , являющееся подпространством ассоциативной  $A$ -алгебры, причем  $A$  порождается пространством  $E$  как алгебра. В этом случае также будем говорить, что  $E$  вложено в алгебру  $A$ .

Тождеством векторного пространства  $E$  назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре  $A$  при подстановке вместо переменных элементов пространства  $E$ . В этом случае также говорят о тождествах пары  $(A, E)$ .

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства  $E$ , будем называть  $L$ -многообразием, порожденным пространством  $E$ , и обозначать  $Var_L E$ .

$L$ -многообразие  $\mathcal{M}$  назовем почти коммутативным  $L$ -многообразием, если  $\mathcal{M}$  некоммутативно но всякое  $L$ -подмногообразие  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$  является коммутативным. Строение почти коммутативных многообразий ассоциативных колец и линейных ассоциативных алгебр над различными полями хорошо изучены [1, 2]. Также изучено строение почти коммутативных  $L$ -многообразий мультипликативных векторных пространств, порожденных линейными алгебрами над конечным полем [3]. В частности, доказано, что всякое ненильпотентное почти коммутативное  $L$ -многообразие порождается либо пространством  $A_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ , либо пространством  $A_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$  над конечным полем  $F$ . При этом мультипликативное векторное пространство

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in P \right\}$$

над конечным полем  $F$  (здесь  $\sigma$  – нетождественный автоморфизм поля  $P$ , и поле инвариантов этого автоморфизма является единственным максимальным подполем в  $P$ , содержащим  $F$ ) содержит собственное некоммутативное подпространство, а следовательно, не порождает почти коммутативное  $L$ -многообразие. Заметим, что алгебра  $A_3$  порождает почти коммутативное многообразие линейных алгебр над конечным полем  $F$ .

В настоящей работе построен пример мультипликативного векторного пространства, не являющегося линейной алгеброй, которое порождает почти коммутативное  $L$ -многообразие. А именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in GF(2) \right\}.$$

$L$ -многообразии  $Var_L A_3$  мультипликативных векторных пространств над полем  $GF(2)$  является почти коммутативным.

Отметим, что в случае произвольного конечного поля утверждение теоремы не верно. А именно, в пространстве  $A_3$  над конечным полем  $F$  может содержаться подпространство

$$A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in P \right\}$$

( $\sigma$  – нетождественный автоморфизм поля  $P$ , и поле инвариантов этого автоморфизма является единственным максимальным подполем в  $P$ , содержащим  $F$ ), не являющееся коммутативным.

## Библиографический список

1. Мальцев Ю. Н. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец // Сиб. мат. журн. – 1976. – Т.17. – № 5. – С. 1086–1096.
2. Finogenova O. V. Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects // Serdica Math. J. – 2012. – № 38. – P. 473–496.
3. А. В. Кислицин А. В. О ненильпотентных почти коммутативных -многообразиях векторных пространств // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 3. – С. 580–586.

**О свойствах класса Леви, порожденного  
квазимногообразием 3-ступенно нильпотентных групп**

*В.В. Лодейщикова*

*Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул; Алтайский  
государственный университет, г. Барнаул*

В статье рассматриваются некоторые свойства класса Леви квазимногообразия, порожденного свободной 3-ступенно нильпотентной группой ранга 2.

**Ключевые слова:** *квазимногообразие, класс Леви, нильпотентная группа.*

Класс  $L(M)$ , состоящий из всех групп  $G$ , в которых нормальное замыкание  $(x)^G$  каждого элемента  $x \in G$  принадлежит классу групп  $M$ , называется классом Леви, порожденным  $M$ .

Классы Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп исследовались в работах [1-10]. В работах [4-7] описаны классы Леви почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп.

Пусть  $qK$  – квазимногообразие, порожденное классом групп  $K$  (если  $K=\{G\}$ , то пишем  $qG$ ),  $F_2(N_3)$  – свободная группа ранга 2 в многообразии нильпотентных групп степени не выше 3.

В работе [11] сказано, что любая 4-ступенно нильпотентная группа  $G$ , принадлежащая классу  $L(qF_2(N_3))$ , является 3-энгелевой и любая 2-порожденная 4-ступенно нильпотентная группа  $G$ , принадлежащая классу  $L(qF_2(N_3))$ , является нильпотентной степени не выше 3.

**Утверждение.** Любая группа  $G$ , принадлежащая классу  $L(qF_2(N_3))$ , является 4-энгелевой.

**Теорема.** Любая группа  $G$ , принадлежащая классу  $L(qF_2(N_3))$ , является нильпотентной степени не выше 4.

### **Библиографический список**

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сиб. матем. журн. – 1999. – №2 (10). – С. 266–270.
2. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – №6 (39). – С. 635–647.

3. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2000. – №2 (41). – С. 270–277.
4. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2009. – №1 (61). – С. 26–29.
5. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сиб. матем. журн. – 2010. – №6 (51). – С. 1359–1366.
6. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты  $p^s$  // Алгебра и логика. – 2011. – №1 (50). – С. 26–41.
7. Лодейщикова В.В. О классе Леви, порождённом квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. – 2019. – №4 (58). – С. 327–336.
8. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. – 2018. – №5 (57). – С. 587–600.
9. Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты  $p$  // Алгебра и логика. – 2021. – №5 (60). – С. 510–524.
10. Лодейщикова В.В., Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий нильпотентных групп экспоненты  $p^s$  // Алгебра и логика. – 2022. – №1 (61). – С. 77–92.
11. Лодейщикова В.В. О некоторых свойствах класса Леви, порожденного квазимногообразием 3-ступенно нильпотентных групп // МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2022. – С. 23–24.

## О независимой аксиоматизируемости квазимногообразий 2-нильпотентных групп

М.С. Лукьянов  
АлтГУ, г. Барнаул

В работе изучаются 2-ступенно нильпотентные группы простой экспоненты, введенные ранее А.И. Будкиным. Доказано, что при каждом  $p$  эти группы изоморфны, в частности, они порождают одно и то же квазимногообразие.

**Ключевые слова:** *нильпотентная группа, квазимногообразие, независимый базис квазитожеств.*

Квазимногообразии групп – это класс групп, определяемый специальными формулами, называемыми квазитожествами.

Пусть  $\mathcal{R}_p$  ( $p$  – простое число,  $p \neq 2$ ) – многообразие групп, заданное тождествами

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) ([x, y, z] = 1), (\forall x) (x^p = 1).$$

Для каждого простого числа  $p \neq 2$  зафиксируем натуральное число  $m$  такое, что  $m$  – квадратичный невычет по модулю  $p$ . Рассмотрим группу  $G_p^{(m)}$ , имеющую в  $\mathcal{R}_p$  следующее представление:

$$G_p^{(m)} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4; [x_1, x_2] = 1, [x_3, x_4] = 1, [x_1, x_4] = [x_3, x_2], [x_2, x_4] = [x_1, x_3]^m \rangle.$$

Группы  $G_p^{(m)}$  были введены в работе [1]. В [1] доказано, что квазимногообразии  $qG_p^{(m)}$ , порожденное группой  $G_p^{(m)}$ , не имеет независимого базиса квазитожеств. Возник естественный вопрос: при разных  $m_1$  и  $m_2$  будут ли квазимногообразия  $qG_p^{(m_1)}$  и  $qG_p^{(m_2)}$  различными? В данной работе доказано, что группы  $G_p^{(m_1)}$  и  $G_p^{(m_2)}$  изоморфны, следовательно, квазимногообразия  $qG_p^{(m_1)}$  и  $qG_p^{(m_2)}$  совпадают.

**Теорема.** Пусть  $p \neq 2$  – простое число,  $m_1, m_2$  – такие натуральные числа, что  $-m_1, -m_2$  – квадратичные невычеты по модулю  $p$ . Тогда группы  $G_p^{(m_1)}$  и  $G_p^{(m_2)}$  изоморфны.

**Доказательство.** Рассмотрим элементы

$$z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2^a,$$

$$\begin{aligned} z_3 &= y_4, \\ z_4 &= y_3^b. \end{aligned}$$

Надо подобрать такие  $a, b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ , что отображение

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow z_1, \\ x_2 &\rightarrow z_2, \\ x_3 &\rightarrow z_3, \\ x_4 &\rightarrow z_4 \end{aligned}$$

продолжается до изоморфизма  $G_p^{(m_1)}$  и  $G_p^{(m_2)}$ . Для этого по теореме Дика [2, с. 55]  $z_1, z_2, z_3, z_4$  должны порождать группу  $G_p^{(m_2)}$  и удовлетворять определяющим соотношениям группы  $G_p^{(m_1)}$ .

Докажем порождаемость. Т.к.  $a$  и  $b$  взаимно простые с  $p$ , то существуют такие  $u$  и  $v$ , что

$$\begin{aligned} au &\equiv 1 \pmod{p}, \\ bv &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

и тогда  $z_2^u = y_2$ ,  $z_4^v = y_3$ . Получаем, что  $y_1, y_2, y_3, y_4$  выражаются через  $z_1, z_2, z_3, z_4$  и, следовательно,  $z_1, z_2, z_3, z_4$  порождают группу  $G_p^{(m_2)}$ .

Найдем условия на  $a$  и  $b$ , при которых выполняются соотношения группы  $G_p^{(m_1)}$  на элементах  $z_1, z_2, z_3, z_4$ :

- 1)  $[z_1, z_2] = 1$ :  

$$[z_1, z_2] = [y_1, y_2^a] = [y_1, y_2]^a;$$
- 2)  $[z_3, z_4] = 1$ :  

$$[z_3, z_4] = [y_4, y_3^b] = [y_4, y_3]^b;$$
- 3)  $[z_1, z_4] = [z_3, z_2]$ :  

$$[z_1, z_4] = [y_1, y_3^b] = [y_1, y_3]^b,$$

$$[z_3, z_2] = [y_4, y_2^a] = [y_4, y_2]^a = [y_1, y_3]^{-am_2};$$
- 4)  $[z_2, z_4] = [z_1, z_3]^{m_1}$ :  

$$[z_1, z_3]^{m_1} = [y_1, y_4]^{m_1} = [y_2, y_3]^{-m_1}.$$

Отсюда получаем систему сравнений

$$\begin{cases} b \equiv -am_2 \pmod{p} \\ ab \equiv -m_1 \pmod{p} \end{cases}$$

равносильную следующей:

$$\begin{cases} b \equiv -am_2 \pmod{p} \\ a^2 \equiv m_1 m_2^{-1} \pmod{p} \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно второе уравнение. Используя критерий Эйлера [3, с. 107] о квадратичных вычетах и невычетах, получим

$$\begin{aligned} (m_1 m_2^{-1})^{\frac{p-1}{2}} &\equiv ((-m_1)(-m_2)^{-1})^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-m_1)^{\frac{p-1}{2}} ((-m_2)^{\frac{p-1}{2}})^{-1} \equiv -1 \cdot \\ &(-1)^{-1} \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $m_1 m_2^{-1}$  – квадратичный вычет по модулю  $p$ . Отсюда получаем, что второе уравнение системы (1) разрешимо, а значит и вся система имеет решение. Теорема доказана.

**Следствие.** Квазимногообразия, порожденные группами  $qG_p^{(m_1)}$  и  $qG_p^{(m_2)}$ , совпадают и не имеют независимых базисов квазитождеств.

## Библиографический список

1. Будкин А.И. О независимой аксиоматизируемости квазимногообразий нильпотентных групп// Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, № 1 С. 28-39.
2. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002, 339 с.
3. Михелович Ш.Х. Теория чисел. М.: Высшая школа, 1967, 336 с.

**О стандартном тождестве в  $n$ -мерных нильпотентных алгебрах с двумя и тремя определяющими соотношениями и условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$**

*Е.П. Петров*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В статье показано, что всякая 2-порожденная  $n$ -мерная нильпотентная алгебра  $R$  над алгебраически замкнутым полем с двумя и тремя определяющими соотношениями и с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$  удовлетворяет стандартному тождеству степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .

**Ключевые слова:** *нильпотентная алгебра, определяющее соотношение, тождество.*

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех  $n$ -мерных ассоциативных алгебрах над полем ( $n$  – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при  $n < 18$ . Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр, порожденное всеми  $n$ -мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для  $n \leq 6$ . И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что  $n$ -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени  $k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ . В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что:

*произвольная  $n$ -мерная нильпотентная алгебра над полем удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(k)} = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .*

В качестве подтверждения этой гипотезы в [5] был приведен пример  $n$ -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что  $n$ -мерная нильпотентная

алгебра  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 = 2$  удовлетворяет данной гипотезе. С целью дальнейшего подтверждения данной гипотезы автором в работах [6] - [9] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры  $R$ , удовлетворяющей для некоторого натурального числа  $N > 1$  условию:  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ , с описанием ее строения, определяющих соотношений и тождеств. Доказано, что такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени  $N + 2$ . В частности, когда  $\dim R^2/R^3 = 2$ , в алгебре выполняется стандартное тождество степени 4.

Из полученных автором результатов ясно, что степень тождества в алгебре  $R$  с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ ,  $N > 1$ , не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры  $R$ . В случае, когда  $\dim R^2/R^3 = 3$ , такой независимости уже нет. В [10] автором замечено, что для любого натурального числа  $t$  найдется 2-порожденная нильпотентная алгебра  $R$  над алгебраически замкнутым полем с одним единственным определяющим соотношением и с условием  $\dim R^2/R^3 = 3$ , не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени  $t$ . Тем не менее, имеет место следующий факт.

*Теорема 1.* Пусть  $R$  –  $n$ -мерная нильпотентная алгебра над произвольным полем с одним единственным определяющим соотношением. Тогда алгебра  $R$  удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .

Таким образом, такая алгебра удовлетворяет вышеуказанной гипотезе. Сложнее обстоит дело, когда в алгебре более одного определяющего соотношения.

В [11], [12] автором выяснено строение 2-порожденной нильпотентной алгебры  $R$  над алгебраически замкнутым полем с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$ . Приведем полученные там результаты.

*Предложение 1.* Пусть  $R$  – 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем  $F$  с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$  с двумя определяющими

соотношениями. Тогда  $R$  изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:

(1) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	...
$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$a^4b$	...
	$b^2$	$ab^2$	$a^2b^2$	$a^3b^2$	...

определяющие соотношения:  $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$  (либо  $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$ ),  
 $b^3 \equiv \alpha a^3 + \gamma a^2b + \delta ab^2 \pmod{R^4}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ ;

(2) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	...
$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$a^4b$	...
	$b^2$	$b^3$	$b^4$	$b^5$	...

определяющие соотношения:  $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$  (либо  $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$ ),  
 $ab^2 \equiv \gamma a^2b \pmod{R^4}$ ,  $\beta, \gamma \in F$ ;

*Предложение 2.* Пусть  $R$  – 2-порожденная нильпотентная индекса  $N$  алгебра над алгебраически замкнутым полем  $F$  с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$  с тремя определяющими соотношениями. Тогда  $R$  изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:

(1) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	...
$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$a^4b$	...
	$ba$	$aba$	$a^2ba$	$a^3ba$	...

определяющие соотношения:  $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$ ,  $ba^2 \equiv \alpha_1 a^3 + \beta_1 a^2b + \gamma_1 aba \pmod{R^4}$ ,  
 $bab \equiv \alpha_2 a^3 + \beta_2 a^2b + \gamma_2 aba \pmod{R^4}$ ,  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in F$ ;

(2) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	...
$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$a^4b$	...
	$ba$	$ba^2$	$ba^3$	$ba^4$	...
		$ba^2b$	$ba^3b$	...	...

определяющие соотношения:  $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$ ,  $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$ ,  
 $bab \equiv 0 \pmod{R^4}$  при  $N > 4$ ,  $bab \equiv \alpha a^3 + \beta a^2b + \gamma ba^2 \pmod{R^4}$   
при  $N = 4$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in F$ ;

(3) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	...
$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$a^4b$	...
	$ba$	$bab$			

определяющие соотношения:  $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$ ,  
 либо  $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$ ,  $ba^2 \equiv \alpha a^3 + \beta a^2b \pmod{R^4}$ ,  
 либо  $aba \equiv \gamma a^3 \pmod{R^4}$ ,  $ba^2 \equiv \delta a^3 \pmod{R^4}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ ;

(4) базис-таблица:

$a$	$a^2$	$a^2b$	$ba^2b$
$b$	$ab$	$ba^2$	
	$ba$	$bab$	

определяющие соотношения:  $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$ ,  $a^3 \equiv aba \equiv 0 \pmod{R^4}$ .

Заметим, что алгебры (3) и (4) из предложения 2 удовлетворяют стандартному тождеству степени 4, что следует из результатов работы [9] и это тождество минимально. Выясняется, что и остальные алгебры из предложений 1, 2 удовлетворяют вышеуказанной гипотезе. Именно, имеет место следующий факт.

*Теорема 2.* Пусть  $R$  –  $n$ -мерная 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем  $F$  с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$  с двумя или тремя определяющими соотношениями. Тогда алгебра  $R$  удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .

## Библиографический список

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). – Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных  $n$ -мерными алгебрами. – Тульский политехнический институт, Тула (1980), Деп. в ВИНТИ, № 1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. – 1986. – № 9. – С. 68-72.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов, Новосибирск, август 1989. – С. 43.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. – 1991. – т. 30, выпуск 5. – С. 540-556.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 = 2$  // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 13. – С. 1052-1066.

7. Петров Е.П. Структура, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры  $R$  с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$  // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – № 14. – С. 1153-1187.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры  $R$  с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$  // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – № 15. – С. 1048-1064.

9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре  $R$  над произвольным полем с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$  // Сибирские электронные математические известия. 2019. – № 16. – С. 1981-2002.

10. Петров Е.П. О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 = 3$  // Международная конференция «Мальцевские чтения», 19–23 августа 2019 г., тезисы докладов, Новосибирск. – С. 169-170.

11. Петров Е.П. Об особенностях строения 2-порожденной нильпотентной алгебры  $R$  над полем с ограничениями на  $\dim R^3/R^4$  // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: «Математики – Алтайскому краю», 28-29 июня 2021 г., сборник трудов, Барнаул. – С. 30-32.

12. Петров Е.П. О строении конечномерных нильпотентных алгебр с условием  $\dim R^2/R^3 = \dim R^3/R^4 = 3$  // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: «Математики – Алтайскому краю», 7 июня 2023 г., сборник трудов, Барнаул. – С. 29-33.

## О минимальном тождестве в 3-алгебрах.

Е.П. Петров

АлтГУ, г. Барнаул

В статье показано, что всякая  $n$ -мерная 3-алгебра над произвольным полем,  $n < 55$ , удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .

**Ключевые слова:** нильпотентная алгебра, многообразие, тождество.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех  $n$ -мерных ассоциативных алгебрах над полем ( $n$  – фиксированное число).

Многими авторами в те годы изучался этот вопрос (Пихтильков С.А., Мальцев Ю.Н., Гусева И.Л., Петров Е.П.) и, в частности, Мальцевым Ю.Н. [2] был поставлен вопрос:

(\*) *Какова степень минимального тождества в многообразии, порожденным всеми  $n$ -мерными нильпотентными алгебрами?*

В 1991 г. автором [3] была сформулирована гипотеза:

(\*\*) *Произвольная  $n$ -мерная нильпотентная алгебра над полем удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(k)} = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .*

Выяснилось, что эта гипотеза справедлива для алгебр малой размерности (менее 17) и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример  $n$ -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени. Также было доказано, что произвольная  $n$ -мерная нильпотентная алгебра  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 \leq 2$  удовлетворяет данной гипотезе. В последующих работах автора [4], [5] продолжились исследования с целью нахождения степени минимального тождества в многообразии, порожденным всеми  $n$ -мерными нильпотентными алгебрами.

Обратимся теперь к классу так называемых 2-алгебр, введенных Ю.М. Рябухиным и Р.С. Флоря в [6]. Под 2-алгеброй понимается

локально нильпотентная алгебра, порожденная такими элементами  $x$ , что квадрат соответствующего главного идеала  $(x)$  равен нулю.

Примерами таких алгебр являются хорошо известные алгебра Грассмана и алгебра верхне-треугольных матриц с нулями на главной диагонали.

Если рассматривать отдельно  $n$ -мерные 2-алгебры ( $n$  -- фиксировано), то имеет место следующий факт (анонсирован автором на Международной (55-ой Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург) в феврале текущего года).

*Теорема 1.* Пусть  $M$  – многообразие, порожденное всеми  $n$ -мерными 2-алгебрами. Тогда идеал тождеств  $T(M) = \{x_1 x_2 \dots x_k\}^T$ , где  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ .

Таким образом, выясняется, что вышеуказанная гипотеза остается верной и для класса 2-алгебр.

Рассмотрим далее по аналогии с 2-алгебрами более широкий класс 3-алгебр, включающий в себя 2-алгебры, то есть класс локально нильпотентных алгебр, порожденных такими элементами  $x$ , что третья степень соответствующего главного идеала  $(x)$  равна нулю. Обнаружилось, что для малых размерностей 3-алгебр (менее 45) вышеуказанная гипотеза остается также верной (тезисы направлены автором на Международную научную конференцию «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», (г. Казань) в апреле текущего года). На данный момент имеет место следующий факт.

*Теорема 2.* Пусть  $R$  –  $n$ -мерная 3-алгебра над произвольным полем,  $n < 55$ . Тогда алгебра  $R$  удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  степени  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor$ . Причем эта оценка является точной.

## Библиографический список

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). – Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. – 1986. – № 9. – С. 68-72.

3. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. – 1991. – т. 30, выпуск 5. – С. 540-556.

4. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 = 2$  // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 13. – С. 1052-1066.

5. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре  $R$  над произвольным полем с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$  // Сибирские электронные математические известия. 2019. – № 16. – С. 1981-2002.

6. Рябухин Ю.М., Флоря Р.С. 2-алгебры и тождества в них // Мат. исслед. (Кишинев). – 1984. – № 76. – С. 107-132.

## О классах Леви, порождённых квазимногообразиями нильпотентных групп

С.А. Шахова

АлтГУ, г. Барнаул

Классом Леви  $L(M)$  называется класс всех групп  $G$ , в которых нормальное замыкание  $(a)^G$  каждого элемента  $a$  из  $G$  принадлежит классу групп  $M$ .

Пусть  $p$  – простое число,  $s$  – натуральное число,  $p \neq 2$ ;  $s \geq 2$ , и  $s > 2$  при  $p = 3$ . В работе описан класс Леви  $L(q(H_{p^s}, Z))$ , где  $H_{p^s}$  – свободная ранга два группа в многообразии нильпотентных ступени не выше двух и экспоненты  $p^s$  групп,  $Z$  – бесконечная циклическая группа,  $q(H_{p^s}, Z)$  – квазимногообразие, порождённое группами  $H_{p^s}, Z$ .

**Ключевые слова:** *Квазимногообразие, нильпотентная группа, класс Леви.*

Обозначим через  $L(M)$  – класс всех групп  $G$ , в которых нормальное замыкание  $(a)^G$  каждого элемента  $a$  из  $G$  принадлежит классу групп  $M$ . Класс  $L(M)$  называется классом Леви, порождённым классом групп  $M$ . А.И. Будкин доказал в [1], что если  $M$  – квазимногообразие групп, то  $L(M)$  – также квазимногообразие групп.

Пусть  $p$  – простое число, а  $s$  – натуральное число,  $p \neq 2$ ;  $s \geq 2$ , и  $s > 2$  при  $p = 3$ .

Будем использовать следующие обозначения:

$N_k$  – многообразии нильпотентных ступени  $\leq k$  групп;

$N^{p^s}$  – квазимногообразии, которое задаётся в  $N_2$  формулами:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1), \\ & (\forall x)(\forall y)(x^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y] = 1), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^p = [y, z] \rightarrow [y, z] = 1), \\ & (\forall x)(x^{p^{s+1}} = 1 \rightarrow x^{p^s} = 1), \\ & (\forall x)(x^q = 1 \rightarrow x = 1), \end{aligned}$$

где  $q$  пробегает множество простых чисел отличных от  $p$ ;

$M^{p^s}$  – квазимногообразии, которое задаётся в  $N_3$  формулами:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), \\ & (\forall x)(\forall y)([x, y]^{p^{s-1}} = 1 \rightarrow [x, y, x] = 1), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, z]^p = [x, y, x] \rightarrow [x, y, x] = 1), \end{aligned}$$

$$(\forall x)(x^{p^{s+1}} = 1 \rightarrow x^{p^s} = 1),$$

$$(\forall x)(x^q = 1 \rightarrow x = 1),$$

где  $q$  пробегает множество простых чисел, отличных от  $p$ ,  
а при  $p = 3$  ещё и формулой

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^{3^{s-1}}[x, z]^p = [x, y, x] \rightarrow [x, y, x] = 1);$$

$qS$  – квазимногообразие, порождённое классом групп  $S$ ;

$Z$  – циклическая группа бесконечного порядка.

Рассмотрим группу, имеющую следующее представление в  $N_2$ :

$$H_{p^s} = \langle x, y; x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1 \rangle.$$

В работе [2] были изучены классы Леви  $L(K)$  неабелевых квазимногообразий  $K$  групп экспоненты  $p^s$ ,  $K \subseteq N^{p^s}$ . В настоящей работе получен следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $p$  – простое число,  $s$  – натуральное число,  $p \neq 2$ ;  $s \geq 2$ , и  $s > 2$  при  $p = 3$ . Если квазимногообразие  $K$  удовлетворяет условию  $q(H_{p^s}, Z) \subseteq K \subseteq N^{p^s}$ , то  $L(K) = M^{p^s}$ .

## Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – № 2 (40). – С. 266–270.
2. Лодейщикова В.В., Шахова С.А. Классы Леви квазимногообразий нильпотентных групп экспоненты  $p^s$  // Алгебра и логика. – 2022. – № 1 (61). – С. 72–92.

## СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 517.938

### Неединственность циклов и спрятанные аттракторы в фазовых портретах трёхмерных динамических систем

*В.П. Голубятников*

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск*

Методами качественной теории дифференциальных уравнений исследуются геометрические и комбинаторные свойства фазовых портретов ряда трёхмерных кусочно-линейных динамических систем, моделирующих функционирование кольцевых генных сетей, которые регулируются многоступенчатыми связями. Установлены условия неединственности циклов в таких моделях генных сетей, описаны спрятанные аттракторы этих динамических систем.

**Ключевые слова:** *Нелинейные динамические системы, математическое моделирование, фазовый портрет, нелокальные колебания.*

Рассматриваются кусочно-линейные динамические системы размерности три

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1, \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2, \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3, \quad (1)$$

моделирующие функционирование простейшего молекулярного репрессилатора ([1]). Неотрицательные функции  $x_j(t)$  обозначают концентрации компонент генной сети, монотонно убывающая функция  $L$  описывает отрицательные связи между этими компонентами ([2]).

Следует [3], рассмотрим случаи, когда эта связь осуществляется двухступенчатым образом (здесь и далее  $c > \varepsilon > 0, j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} L(w) &= 2c \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad L(w) = c \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon; \\ L(w) &= 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w; \end{aligned} \quad (2)$$

а также, когда график этой функции  $L$  имеет три ступеньки:

$$\begin{aligned} L(w) &= 2c \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad L(w) = c + \varepsilon \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c; \\ L(w) &= c - \varepsilon \text{ при } c \leq w < c + \varepsilon; \quad L(w) = 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w. \end{aligned} \quad (3)$$

Наряду с динамической системой (1), которая в обоих случаях (2) и (3) обладает симметрией относительно циклической перестановки переменных  $\sigma: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ , мы рассматриваем также и фазовый портрет несимметричной динамической системы

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma(x_2) - x_3, \quad (4)$$

которая описывает функционирование кольцевой геной сети, изучавшейся в [1], см. также [4]. Здесь убывающая функция  $L$  та же, что и выше, а монотонно возрастающая двухступенчатая функция  $\Gamma$  соответствует положительной регуляторной связи в геной сети и определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \Gamma(w) &= 0 \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad \Gamma(w) = c \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon; \\ \Gamma(w) &= 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w. \end{aligned} \quad (5)$$

Так же, как и в [4,5], проверяется, что траектории всех точек области  $Q := \{0 \leq x_1 \leq 2c; 0 \leq x_2 \leq 2c; 0 \leq x_3 \leq 2c\}$  не выходят из неё с ростом  $t$  для всех трёх динамических систем (1)&(2), (1)&(3), (4)&(5).

В случае систем (1)&(2) и (4)&(5) разобьём куб  $Q$  шестью плоскостями  $x_j = c - \varepsilon$ ,  $x_j = c + \varepsilon$  на 27 блоков и занумеруем эти блоки трёхсимвольными мульти-индексами  $\{s_1 s_2 s_3\}$ :

$$\begin{aligned} \text{если для всех точек блока } 0 \leq x_j < c - \varepsilon, \text{ то полагаем } s_j &= 0; \\ \text{если для всех точек блока } c - \varepsilon \leq x_j < c + \varepsilon, \text{ то } s_j &= 1; \\ \text{если для всех точек блока } c + \varepsilon \leq x_j, \text{ то полагаем } s_j &= 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Такие построения проводятся для всех трёх рассматриваемых систем, поскольку в каждом блоке разбиения траектории всех точек прямолинейны, и их поведение нетрудно контролировать.

**Лемма 1.** Каждая из систем (1)&(2) и (4)&(5) имеет единственную стационарную точку  $S_0$ ; эта точка экспоненциально устойчива, лежит в блоке  $\{111\}$ , и её координаты имеют вид  $x_1 = x_2 = x_3 = c$ .

Обозначим через  $W_1 \subset Q$  объединение 12 блоков, перечисленных в кольцевой диаграмме

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \{220\} \rightarrow \{210\} \rightarrow \{200\} \rightarrow \{201\} \rightarrow \{202\} \rightarrow \{102\} \rightarrow \{002\} \rightarrow \\ \rightarrow \{012\} \rightarrow \{022\} \rightarrow \{021\} \rightarrow \{020\} \rightarrow \{120\} \rightarrow \{220\} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (7)$$

**Теорема 1.** Если  $c > 3\varepsilon$ , то область  $W_1$  содержит цикл  $C_1$  системы (1)&(2). Этот цикл переходит из блока в блок, согласно стрелкам диаграммы (7) и симметричен относительно перестановки  $\sigma$ . Циклов, асимметричных относительно  $\sigma$ , эта система не имеет.

Обозначим через  $W_2 \subset Q$  объединение 12 блоков, перечисленных в кольцевой диаграмме

$$\dots \rightarrow \{000\} \rightarrow \{100\} \rightarrow \{200\} \rightarrow \{210\} \rightarrow \{220\} \rightarrow \{221\} \rightarrow \{222\} \rightarrow \{122\} \rightarrow \{022\} \rightarrow \{012\} \rightarrow \{002\} \rightarrow \{001\} \rightarrow \{000\} \rightarrow \dots \quad (8)$$

**Теорема 2.** Если  $c \geq 4\varepsilon$ , то область  $W_2$  содержит цикл  $C_2$  системы (4)&(5). Этот цикл переходит из блока в блок, согласно стрелкам диаграммы (8).

Аналогичные результаты можно получить и для системы (1)&(3) с трёхступенчатой функцией  $L$ :

Разобьём инвариантный куб  $Q$  девятью плоскостями  $x_j = c - \varepsilon$ ,  $x_j = c$ ,  $x_j = c + \varepsilon$  на 64 блока и занумеруем блоки четырёхбуквенными мультииндексами  $\{r_1 r_2 r_3\}$ ,  $r_j = 0, 1, 2, 3$ , аналогичными (6):

если для всех точек блока  $0 \leq x_j < c - \varepsilon$ , то полагаем  $r_j = 0$ ;

если для всех точек блока  $c - \varepsilon \leq x_j < c$ , то  $r_j = 1$ ;

если для всех точек блока  $c \leq x_j < c + \varepsilon$ , то  $r_j = 2$ ;

если для всех точек блока  $c + \varepsilon \leq x_j$ , то полагаем  $r_j = 3$ .

Обозначим через  $W_3 \subset Q$  объединение 18 блоков, перечисленных в кольцевой диаграмме

$$\dots \rightarrow \{330\} \rightarrow \{320\} \rightarrow \{310\} \rightarrow \{300\} \rightarrow \{301\} \rightarrow \{302\} \rightarrow \{303\} \rightarrow \{203\} \rightarrow \{103\} \rightarrow \{003\} \rightarrow \{013\} \rightarrow \{023\} \rightarrow \{033\} \rightarrow \{032\} \rightarrow \{031\} \rightarrow \{030\} \rightarrow \{130\} \rightarrow \{230\} \rightarrow \{330\} \rightarrow \dots \quad (9)$$

и через  $W_4 \subset Q$  – объединение 6 блоков, перечисленных в кольцевой диаграмме

$$\rightarrow \{112\} \rightarrow \{122\} \rightarrow \{121\} \rightarrow \{221\} \rightarrow \{211\} \rightarrow \{212\} \rightarrow \{122\} \rightarrow \dots \quad (10)$$

**Теорема 3.** Область  $W_4$  содержит цикл  $C_4$  системы (1)&(3). Этот цикл переходит из блока в блок, согласно стрелкам диаграммы (10).

Если  $c \geq 4\varepsilon$ , то область  $W_3$  содержит цикл  $C_3$  системы (1)&(3). Этот цикл переходит из блока в блок, согласно стрелкам диаграммы (9).

Циклы  $C_3$  и  $C_4$  симметричны относительно циклических перестановок переменных  $\sigma$ .

Ранее неединственность циклов у подобных динамических систем наблюдалась только в многомерных случаях, при  $\dim \geq 5$ , см. [2,6]. При более сильных предположениях  $c \geq 10\varepsilon$  Теорема 3 была установлена в [7]. Полученные теоремы допускают обобщения на случаи «многоступенчатых» функций  $L$  и  $\Gamma$ .

Для системы (1)&(2) точка  $S_0$  является «спрятанным аттрактором», см. [8], она притягивает траектории всех точек блока  $\{111\}$ , но в условиях теоремы 1 вне области притяжения этой точки существует периодическая траектория  $C_1$ . Циклы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  представляют собой примеры нелокальных колебаний, см. [9].

Проведенные вычислительные эксперименты иллюстрируют полученные теоретические результаты.

Работа выполнена в рамках Государственного Задания Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, FWNF-2022-0009.

### Библиографический список

1. Glass L., Pasternack J.C. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // *Journ. of Mathematical Biology.* – 1978. – V. 6. – P. 207–223.

2. Golubyatnikov V.P., Gradov V.S. Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks // *Siberian Advances in Mathematics.* – 2021. – V. 31, № 1. – P. 1–12.

3. Tchuraev R.N., Ratner V.A. A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression // In: *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation.* Ed. K.Bellman. Berlin: Verlag. – 1983. – P. 64–80.

4. Golubyatnikov V.P., Gaidov Yu.A., Kleshchev A.G., Volokitin E.P. Modeling of asymmetric gene networks functioning with different type of regulation // *Biophysics.* – 2006 – V. 51, Suppl. 1. – P. 61–65.

5. Голубятников В.П., Иванов В.В. Единственность и устойчивость цикла в трёхмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // *Сибирский Журнал Чистой и Прикладной Математики.* – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 19–28.

6. Акиншин А.А. Бифуркация Андронова-Хопфа для некоторых нелинейных уравнений с запаздыванием // *Сиб. Журнал Индустриальной Математики.* – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 3–15.

7. Голубятников В.П. О неединственности циклов в трёхмерных моделях кольцевых генных сетей // *Челябинский Физико-Математический Журнал.* – 2024. – Т. 9, № 1. – С. 23–34.

8. Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems // *Physical Letters A.* – 2015. – V. 379, № 40-41. – P. 2591–2596.

9. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.: Наука, 1964. – 367 с.

**Условия разрешимости системы с нулевыми  
правыми частями**

*М.В. Донцова*

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород*

В статье определены условия разрешимости системы с нулевыми правыми частями.

**Ключевые слова:** условия, система, задача Коши.

В данной работе определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (au(t, x) + bv(t, x) + h_1)\partial_x u(t, x) = 0, \\ \partial_t v(t, x) + (cu(t, x) + gv(t, x) + h_2)\partial_x v(t, x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,  $a, b, c, g, h_1, h_2$  – известные положительные константы, с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), v(0, x) = \varphi_2(x) \quad (2)$$

в области  $\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, \infty), T > 0\}$ .

Общим итогом исследования является следующая теорема:

**Теорема.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$  и выполняются условия:

$$1) a > 0, b > 0, c > 0, g > 0, h_1 > 0, h_2 > 0,$$

$$2) \varphi_1'(x) \geq 0, \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R.$$

Тогда для любого  $T > 0$  задача Коши (1),(2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$ .

**Библиографический список**

1. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 2. – С. 115-124.

2. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных

дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. – 2001. – Т.379, №1. – С. 16–21.

3. Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19, № 4. – С. 23-32.

**Об однородных солитонах Риччи трехмерных локально  
однородных (псевдо)римановых пространств с  
полусимметрической связностью**

*П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова  
АлтГУ, г. Барнаул*

В работе исследованы однородные солитоны Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью, дана их полная классификация.

**Ключевые слова:** *однородный солитон Риччи, трехмерное локально однородное пространство, полусимметрическая связность.*

Солитоны Риччи являются естественным обобщением метрик Эйнштейна и представляют собой решение потока Риччи. В общем случае они исследовались многими математиками, что нашло отражение в обзорах Х.-Д.Цао, Р.М.Аройо – Р.Лафуэнте [1, 2].

Полусимметрические связности (или связности с векторным кручением) были введены Э.Картаном [3] и содержат связности Леви-Чивиты. Изучение многообразий и их свойств относительно указанных связностей проводилось К.Яно [4], И.Агриколой [5] и другими математиками.

Настоящая работа продолжает исследования однородных солитонов Риччи, метрик Эйнштейна и потоков Риччи на локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью [6 – 20].

В результате проведенных исследований получена серия теорем о строении метрик Эйнштейна, инвариантных солитонов Риччи и потоков Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с полусимметрической связностью. Решена гипотеза Л.Цербо в случае полусимметрических связностей, а также в случае лоренцевых метрик со связностью Леви-Чивиты.

**Гипотеза Л.Цербо.** *На группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты не существует нетривиальных инвариантных солитонов Риччи.*

Приведем часть из полученных результатов.

**Теорема А.** *Если трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство допускает такую метрическую связность с инвариантным векторным кручением, что выполняется*

уравнение Эйнштейна, то оно либо является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивиты, либо является конформно плоским.

**Определение.** Если риманово многообразие  $(M, g)$  со связностью Леви-Чивиты есть многообразие Эйнштейна, или изометрично прямому произведению многообразия Эйнштейна и евклидова пространства, то его метрика  $g$  называется тривиальным солитоном Риччи.

**Теорема В.** Пусть  $(M, g, \nabla)$  — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой  $g$  и полусимметрической связностью  $\nabla$ , отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

**Теорема С.** Пусть  $(G, g)$  трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой  $g$  и связностью Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

**Замечание.** Как показывают теоремы В и С, гипотеза Л.Цербо неверна в условиях теорем В и С.

Кроме того, авторами получена полная классификация инвариантных солитонов Риччи в случае трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространств. Оказалось, что все нетривиальные солитоны Риччи содержатся в случае групп Ли. Приведем завершающую классификацию теорему [9].

**Теорема Д.** Пусть  $(M = G/H, g, \nabla)$  — трехмерное (псевдо)риманово локально однородное пространство с полусимметрической связностью  $\nabla$ , отличной от связности Леви-Чивиты и нетривиальной группой изотропии. Тогда любой однородный солитон Риччи на  $M$  является тривиальным.

## Библиографический список

1. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. V. 11. P. 1-38.
2. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // Int. Math. Res. Notices. 2014.
3. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee (deuxieme partie)// Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. № 42. P.17–88.

4. Yano K. On semi-symmetric metric connection // *Revue Roumaine de Math. Pure et Appliquees*. 1970. № 15. P. 1579–1586.
5. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // *Differential Geometry and its Applications*. 2016. V. 46.
6. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Three-dimensional nonunimodular Lie groups with a Riemannian metric of an invariant Ricci soliton and a semisymmetric metric connection // *Russian Mathematics*. 2022. V. 66.
7. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // *Сибирские электронные математические известия*. 2023. Т. 80. № 1. С.48–61.
8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*. 2023. Т.222. С. 19-29.
9. Балащенко В.В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об однородных солитонах Риччи на локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью // *Известия Алтайского государственного университета*. 2024. №1 (135). С. 76 – 81.
10. Klepikov P. N., Rodionov E. D., Khromova O. P. Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion // *Journal of Mathematical Sciences: Springer Publishing House*. 2023. V. 276. No. 6.
11. Павлова А.А., Хромова О.П. О метриках Эйнштейна трехмерных групп Ли с полусимметрической связностью // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. Изд-во ВИНТИ РАН. 2023. Т. 222. С. 64–68.
12. Клепиков П.Н. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена-Вейля // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. Изд-во ВИНТИ РАН. 2023. Т. 223. С. 50–65.
13. Клепиков П.Н., Куркина М.В., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об одном уравнении в теории солитонов Риччи с полусимметрической связностью // *Известия Алтайского государственного университета*. Изд-во: Алтайский государственный университет. 2023. № 4 (132). С. 64–67.

14. Хромова О.П., Балащенко В.В. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. 2023. № 1 (129). С. 141–144.

15. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью // Известия вузов. Математика. 2022. №5. С. 80-85.

16. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением// Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28. № 4. С. 30i–47.

17. Балащенко В.В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О гипотезе Цербо на группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия Алтайского государственного университета. 2022. №1(123). С. 79–82.

18. Павлова А.А., Хромова О.П., Родионов Е.Д., Вылегжанин Д.В. О симметрическом уравнении Эйнштейна трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью // Известия Алтайского государственного университета. 2022. №4(126). С. 140–143.

19. Павлова А.А., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О кососимметрическом тензоре Риччи метрических групп Ли с полусимметрической связностью // Тезисы докладов международной конференции по геометрическому анализу, посвящённой памяти академика Ю.Г.Решетняка, 23–29 октября 2022 / Новосиб. гос. ун-т. 2022. – Новосибирск: ИПЦ НГУ С.97–99.

20. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об инвариантных солитонах Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // Материалы Международной конференции «Лобачевские чтения». 2022. – Казань: Изд-во КФУТ. 62. С. 62-63.

## Модель диаграммы Бляшке на примере тел вращения

*Д. И. Оглезнев, И. В. Пономарев*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию характеристик множеств конусов и множеств цилиндров. С учетом изопериметрических неравенств, связывающих характеристики выпуклых тел, построены диаграммы Бляшке для множеств конусов и множеств цилиндров.

**Ключевые слова:** *диаграмма Бляшке, тела вращения, выпуклый анализ.*

Образ 3-мерного евклидова пространства  $R^3$  на плоскости  $R^2$  известен как диаграмма Бляшке. Часть границы этой диаграммы определяется из известных геометрических неравенств, но неравенства, которые замыкают границу, остаются неизвестными. Эту гипотезу не удастся доказать или опровергнуть. Также является неизвестным геометрическое неравенство, которому удовлетворяют эти выпуклые тела.

Пусть  $k$  – пространство компактных выпуклых тел, принадлежащих 3-мерному пространству.  $K$  – некоторое выпуклое тело, принадлежащее  $k$ , тогда обозначим через  $V(K) = V$ ,  $S(K) = S$ ,  $M(K) = M$  – объем, площадь поверхности и интеграл средней кривизны соответственно. Связь между инвариантами  $V(P)$ ,  $S(P)$  и  $M(P)$  установлена из неравенств Минковского [1]. В. Бляшке предложил [2] каждому  $K$  из  $k$  сопоставить точку  $(x, y)$  на плоскости, где  $(x, y)$  определил следующим образом

$$x = \frac{4\pi S}{M^2}, y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}. \quad (1)$$

Построена диаграмма Бляшке множества конусов и цилиндров с использованием математического пакета MatLab. Характеристики, необходимые для отображения множества конусов, можно вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{\pi R^2 H}{3}, \\ S(P) &= \pi R^2 + \pi R \sqrt{H^2 + R^2}, \\ M(P) &= \pi^2 R + \pi H - \pi R \operatorname{arctg} \left( \frac{H}{R} \right). \end{aligned}$$

Каждой  $P$  из множества конусов сопоставим точку  $(x, y)$  на плоскости, где  $(x, y)$  определяется следующим образом

$$x = \frac{4\pi(\pi R^2 + \pi R \sqrt{H^2 + R^2})}{(\pi^2 R + \pi H - \pi R \arctg(\frac{H}{R}))^2}, \quad y = \frac{16\pi^3 R^2 H}{(\pi^2 R + \pi H - \pi R \arctg(\frac{H}{R}))^3}. \quad (2)$$

На рисунке 1 представлено изображение диаграммы Бляшке множества конусов радиуса  $R = 3$ . Максимуму в точке  $A$  соответствует конус, для которого угол наклона образующей  $\alpha_1 = 59.61^\circ$ . Следует отметить, что для максимума на диаграмме Бляшке угол сохраняется при изменении значения радиуса. Пунктирной линии 1 соответствуют конусы, у которых угол наклона образующей  $\alpha \in [0; \alpha_1)$ . Сплошной линии 2 соответствуют цилиндры, у которых угол наклона образующей  $\alpha \in (\alpha_1; \frac{\pi}{2}]$ . Пограничная парабола на рисунке 1 обозначена  $G$ . Некоторую оценку этой границы можно получить, используя неравенство Грёмера (H.Gremer) [5]

$$V \geq \frac{\pi S}{24M} \left( S - \frac{2M^2}{\pi^3} \right).$$

В терминах  $x, y$  получаем

$$y \geq \frac{\pi}{8} x \left( x - \frac{8}{\pi^2} \right). \quad (3)$$

Пограничная парабола (3) на рисунке 1 обозначена  $G$  [5].

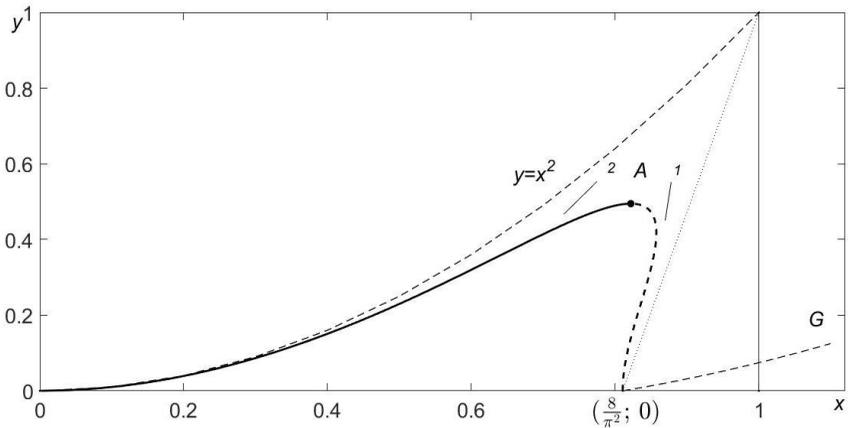


Рисунок 1 – Диаграмма Бляшке множества конусов, радиуса  $R = 3$ .

Характеристики, необходимые для отображения множества цилиндров, можно вычислить по следующим формулам

$$\begin{aligned} V(P) &= \pi R^2 H, \\ S(P) &= 2\pi R(H + R), \\ M(P) &= \pi(H + \pi R). \end{aligned}$$

Каждому  $P$  из множества цилиндров сопоставим точку  $(x, y)$  на плоскости, где  $(x, y)$  определяется следующим образом

$$x = \frac{8R(H+R)}{(H+\pi R)^2}, \quad y = \frac{48R^2H}{(H+\pi R)^3}. \quad (4)$$

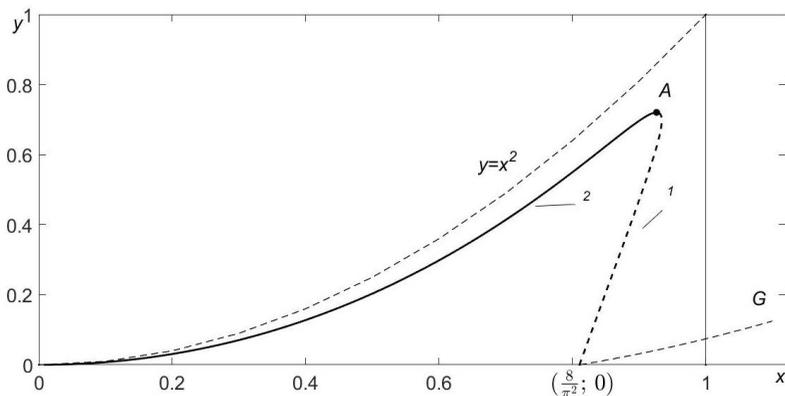


Рисунок 2 – Диаграмма Бляшке множества цилиндров, радиуса  $R = 3$ .

На рисунке 2 представлено изображение диаграммы Бляшке для множества цилиндров радиуса  $R = 3$ . Максимуму в точке  $A$  соответствует цилиндр, для которого угол наклона диагонали в осевом сечении  $\alpha_1 = 14.04^\circ$ . Следует отметить, что для максимума на диаграмме Бляшке угол сохраняется при изменении значения радиуса. Пунктирной линией 1 соответствуют цилиндры, у которых угол наклона диагонали в осевом сечении  $\alpha \in [0; \alpha_1)$ . Сплошной линией 2 соответствуют цилиндры, у которых угол наклона диагонали в осевом сечении  $\alpha \in (\alpha_1; \frac{\pi}{2}]$ . Пограничная парабола на рисунке 2 обозначена  $G$ .

В работе изложены известные определения выпуклого анализа и представлены изопериметрические неравенства, которые связывают такие характеристики выпуклых тел  $P$ , как объем  $V(P)$ , площадь поверхности  $S(P)$  и интеграл кривизны  $M(P)$ . Связь между инвариантами  $V(P)$ ,  $S(P)$  и  $M(P)$  установлена из неравенств Минковского. Основываясь на предложенном В. Бляшке отображении  $F$  множеств выпуклых тел на плоскости  $(x, y)$  и с учетом характеристик выпуклых тел, получены неравенства, позволяющие утверждать, что область, занимаемая диаграммой Бляшке, является ограниченным множеством. Гипотезу о неравенствах, заканчивающих границу этой диаграммы, не удалось доказать или опровергнуть. Вид переменных  $x, y$  на диаграмме Бляшке для множества конусов и множества цилиндров не зависит от радиуса  $R$  в основании конуса и радиуса  $R$  в основаниях цилиндра.

### Библиографический список

1. Бутовский М. М. Расчет интегралов поперечных мер Минковского, сумм Минковского и построение диаграммы Бляшке для выпуклых многогранников в Евклидовом пространстве  $R^3$  // Конструирование и оптимизация параллельных программ. – 2009. – С. 21-32.
2. Blaschke W. Eine Frage über konvexe Körper, Jahresber. – Deutsch, Math-Verein, 25(1916), p. 121-125.
3. Steiner J. Gesammelte Werke. – Cambridge Academ. – 2013, 584 p.
4. Blaschke W. Eine Frage über konvexe Körper, Jahresber. – Deutsch, Math-Verein, 25(1916), p. 121-125.
5. Васин Д. В. Диаграмма Бляшке множества выпуклых тел // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. –2002. –Вып.2. – С. 5-9.

**О конформно-киллинговых полях на многообразиях  
Каэна-Уоллаха**

*Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию конформно-киллинговых векторных полей на многообразиях Каэна-Уоллаха.

**Ключевые слова:** *конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, симметрические пространства, киллинговы векторные поля, многообразия Каэна-Уоллаха.*

Конформно киллинговы векторные поля играют важную роль при изучении группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. В лоренцевой геометрии и теоретической физике подробно изучаются лоренцевы симметрические пространств. Данные пространства классифицированы Каэном и Уоллахом, их свойства хорошо изучены в размерности 4 в связи с приложениями в физике. Векторные поля Киллинга и солитоны Риччи на обобщенных пространствах Каэна-Уоллаха изучались Д.Н.Оскорбиным, Е.Д.Родионовым и другими.

В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако, для различных значений константы Эйнштейна, роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля.

Известно, что при ненулевом тензоре Вейля конформный множитель в конформном аналоге уравнения Киллинга является постоянным. В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на многообразиях Каэна-Уоллаха в случае нулевого тензора Вейля, получен общий вид конформного множителя этого уравнения. Для каждого из случаев получен общий вид конформно-киллингова поля.

**Библиографический список**

1. Cahen, M., Wallach, N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. 1970. Т.76(3). С. 585-591.

2. Cahen, M., Kerbrat, Y. Champs de Veteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symetriques // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1978. Т. 57(2). С. 99-132.
3. Cahen, M., Kerbrat, Y. Transformations Conformes des Espaces Symetriques Pseudo- riemanniens // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1982. Т.132. С.275-289.Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.
4. Kath, I., Olbrich, M. Compact Quotients of Cahen-Wallach Spaces // Memoirs of the American Mathematical Society. 2019. Т.262. №.1264. С.84. DOI:10.1090/memo/1264

**Об исследовательских задачах на практикуме по  
математическому анализу**

*Е.А. Плотникова<sup>1</sup>, А.Н. Саженов<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,  
г. Новосибирск; <sup>2</sup>Алтайский государственный  
университет, г. Барнаул*

В работе рассматриваются задачи для учебно-исследовательской работы со студентами младших курсов математических направлений. Приводятся примеры задач по математическому анализу, отличающихся от стандартных типично учебных задач, с указанием раздела предмета, в котором стоит к ним обратиться.

**Ключевые слова:** *учебно-исследовательская работа студентов, последовательности, числовые ряды, функциональные ряды, сходимость.*

Успешное вхождение студентов в научно-исследовательскую работу требует определённой подготовленности к этому виду деятельности. Такую подготовку студентов на младших курсах призвана осуществлять учебно-исследовательская работа студентов (УИРС). Она проводится параллельно с изучением студентами основных математических дисциплин, в том числе математического анализа. И в процессе работы по освоению дисциплины студентам, проявляющим интерес к предмету, полезно предложить индивидуальные исследовательские задания про изучаемой теме, но выходящие за рамки традиционных учебных задач. Одним из источников возникновения таких заданий является олимпиадная тематика студенческих математических соревнований.

На математических соревнованиях студентов младших курсов решаются разноплановые задачи высокого уровня сложности, которые требуют от их участников достаточно широкого математического кругозора и позволяют демонстрировать востребованность полученных знаний и изученных методов исследования [1-4].

Остановимся здесь на нескольких задачах математического анализа, решение которых доступно студентам младших курсов, но требует достаточно творческого подхода исследователя.

Для решения первой из задач необходимы знания по теории числовых последовательностей и рядов.

**Задача 1.** Последовательность положительных чисел  $\{a_n\}$  убывает. Докажите, что, если для любых  $n$  выполнено неравенство  $\frac{a_1}{1} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_9}{3} + \dots + \frac{a_{n^2}}{n} < 1$ , то  $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} < 2$ . Причём, эта оценка не улучшаема.

*Решение.* Пусть  $n$  – произвольное,  $m^2 \geq n$ , тогда

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} < \\ & < \left( \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} \right) + \left( \frac{a_4}{4} + \dots + \frac{a_8}{8} \right) + \left( \frac{a_9}{9} + \dots + \frac{a_{15}}{15} \right) + \left( \frac{a_{m^2}}{m^2} + \dots + \frac{a_{m^2+2m}}{m^2+2m} \right) < \\ & < a_1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + a_4 \left( \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} \right) + a_9 \left( \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} \right) + a_{m^2} \left( \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^2+2m} \right) \end{aligned}$$

Поскольку  $\left( \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^2+m-1} \right) + \left( \frac{1}{m^2+m} + \dots + \frac{1}{m^2+2m} \right)$  можно оценить так: в первой скобке  $m$  слагаемых, а наибольшее слагаемое  $1/m^2$ ; во второй скобке  $m+1$  слагаемое, а наибольшее слагаемое  $1/(m^2+m)$ . Значит, неравенство можно продолжить

$$< \frac{m}{m^2} + \frac{m+1}{m^2+m} = 2.$$

Таким образом, получена оценка

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} < 2.$$

Эта оценка не улучшаема. То есть если  $c < 2$ , то найдётся убывающая последовательность положительных чисел  $\{a_n\}$ , такая, что

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_9}{3} + \dots + \frac{a_{n^2}}{n} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} > c$$

для некоторого  $n$ .

Рассмотрим ряды вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , где  $p > 1$ , обозначим сумму этого

ряда как  $S_p$ . Справедлива оценка  $\frac{1}{p-1} < S_p < \frac{p}{p-1}$ . Она, в свою

очередь следует из неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

Теперь положим  $\frac{a_{n^2}}{n} = \frac{b}{n^p}$ . Тогда получаем

$$a_{n^2} = \frac{b}{n^{p-1}}, \quad a_n = \frac{b}{n^{\frac{p-1}{2}}}, \quad \frac{a_n}{n} = \frac{b}{n^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Взяв  $b = 1/S_p$ , отметим, что

$$b = \frac{1}{S_p} > \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = \frac{p-1}{p} \quad S_{\frac{p+1}{2}} > \frac{1}{\frac{p+1}{2}-1} = \frac{2}{p-1}$$

Следовательно,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n^2}}{n} = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}} > \frac{p-1}{p} \cdot \frac{2}{p-1} = \frac{2}{p}.$$

Можно было выбрать  $p$  сколь угодно близким к 1 и получить требуемую оценку.

Для решения следующей задачи необходимы знания по теории функциональных рядов, их сходимости и дифференцированию.

**Задача 2.** Найдите сумму

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n},$$

где переменная  $x$  удовлетворяет условию  $|x| < \pi$ .

*Решение.* Если  $x = 0$ , то  $S = 0$ . Пусть далее  $x \neq 0$ .

$$\text{Во-первых, } S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \sum_{n=1}^k \left( -\ln \cos \frac{x}{2^n} \right)' = - \left( \sum_{n=1}^k \ln \cos \frac{x}{2^n} \right)',$$

далее,

$$\sum_{n=1}^k \ln \cos \frac{x}{2^n} = \ln \left( \prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{2^n} \right) = \ln \frac{2^k \sin \frac{x}{2^k} \left( \prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{2^n} \right)}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} = \ln \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}},$$

$$S_k = - \left( \ln \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \right)' = \frac{1}{2^k} \frac{\cos \frac{x}{2^k}}{\sin \frac{x}{2^k}} - \operatorname{ctg} x \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{Отметим, что } \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

**Замечание.** Решение задачи 2 изложено лаконично так сказать в парадном итоговом виде. Процесс самого решения и обоснования переходов требует дополнительных объяснений. Культура таких рассуждений, собственно, и воспитывается в процессе освоения математической дисциплины.

## Библиографический список

1. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.

2. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. - Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – № 3. – С. 34-37.

3. Саженков А.Н., Оскорбин Д.Н., Саженкова Т.В. Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ. – 2019.

4. Саженов А.Н., Плотникова Е.А. О топологических задачах на прямой //МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием, Барнаул, 2022 г. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2022. – С. 36–40.

# СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.95

## Численное решение модельной задачи о движении сыпучей среды

*И.Г. Ахмерова, А.В. Устюжанова, А.С. Правдивцев  
АлтГУ, г. Барнаул*

В статье представлено численное исследование математической модели нестационарного одномерного движения сыпучей среды.

**Ключевые слова:** *разрешимость, плотность, гранулярная температура, сыпучая среда.*

Рассматривается одномерное изотермическое движение сыпучей среды. Законы сохранения массы, импульса и энергии имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2)$$

Здесь  $u(x, t)$  - скорость;  $\rho(x, t)$  - плотность;  $T(x, t)$  - гранулярная температура, определяемая колебаниями средней скорости частиц, т.е.  $\frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} m (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)$ , где  $k_B$  - постоянная Больцмана;  $m$  - масса частицы;  $p(\rho, T)$  - давление, удовлетворяет уравнению состояния Ван-дер-Ваальса[2];  $\mu(\rho, T)$  - сдвиговая вязкость;  $\lambda(\rho, T)$  - объемная вязкость;  $I(\rho, T)$  - диссипативный член, возникающий из-за неупругих столкновений частиц;  $\kappa(\rho, T)$  - коэффициент теплопроводности.

В приложениях используются следующие зависимости[2],[3],[4]:

$$p(\rho, T) = \rho T \frac{\rho_c + \rho}{\rho_c - \rho}, \quad \kappa(\rho, T) = \frac{\rho(\alpha l + d)^2}{l} \sqrt{\frac{T}{m}},$$

$$\mu(\rho, T) = m Pr \kappa, \quad \lambda(\rho, T) = -\frac{2}{3} \mu(\rho, T),$$

где  $\rho_c = \frac{2}{d^2 \sqrt{3}}$ ,  $l = \frac{(\rho_c - \rho)}{\sqrt{8} \rho d (\rho_c - a \rho)}$ ,  $a = 1 - \sqrt{3/8}$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\mu(\rho, T) = m Pr \kappa$ , ( $Pr$  - число Прандтля). Система (1), (3) дополняется начально-краевыми условиями:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0. \quad (3)$$

Вопросы разрешимости задач для близких по структуре моделей рассматривались: [5]-[9]. Наиболее распространенные численные методы для подобных задач представлены в работах [10]-[12].

После обезразмеривания уравнения (1), (2) и перехода к массовым лагранжевым координатам, проводится конечно-разностная аппроксимация поставленной задачи. Алгоритм реализации численных расчетов следующий. На первом этапе вычисляются узловые значения скорости на  $(n+1)$ -м временном слое, используя значения искомым функций, найденные на предыдущем временном слое. Для этого разностные уравнения приводятся к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается методом прогонки. На втором этапе численных расчетов определяются узловые значения плотности на  $(n+1)$ -м временном слое по явной разностной схеме. Значения плотности в граничных точках при  $i = 1$  и  $i = N_x$  предлагается получать с помощью экстраполяции по двум ближайшим узлам.

Численные расчеты проведены в случае постановки задачи в безразмерном виде. Ось  $Ox$  направлена вертикально и совпадает с направлением силы тяжести. Начальные значения плотности и скорости заданы  $\tilde{u}^0 = 0$ ,  $\tilde{\rho}^0 = 0.9$ ,  $G = 1/10$ . Область изменения переменной  $x$  – промежуток от 0 (верхняя граница) до  $M = \tilde{\rho}^0 \tilde{L}$  (нижняя граница), где  $\tilde{L} = 1$ .

На рисунках 1–2 представлены профили плотности и скорости в разные моменты времени, где ось  $Ox$  понимается в эйлеровых переменных. Расчеты показывают, что плотность в нижней части области начинает увеличиваться, в то время как в верхней – становится меньше.

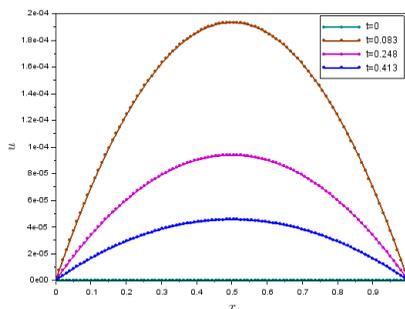
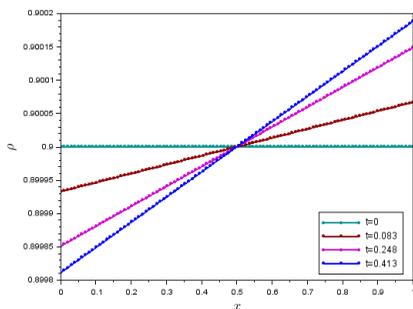


Рисунок 1 – Профили плотности в

Рисунок 2 – Профили скорости в

разные моменты времени

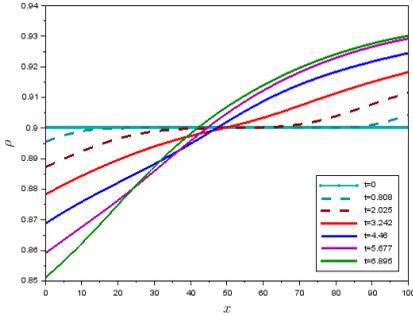


Рисунок 3 – Профили плотности в разные моменты времени,  $\tilde{L} = 100$

разные моменты времени

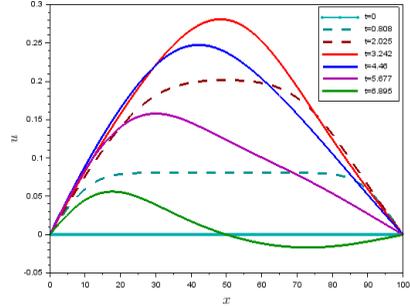


Рисунок 4 – Профили скорости в разные моменты времени,  $\tilde{L} = 100$

## Библиографический список

1. Peter Eshuis et al. Buoyancy driven convection in vertically shaken granular matter: experiment, numerics, and theory. – Granular Matter. – 2013. – 15:893 – 911.
2. Grossman, E.L., Zhou, T., Ben-Naim, E.: Towards granular hydrodynamics in two-dimensions. – Phys. Rev. – E 55. – 4200. – 1997
3. Eshuis, P., van der Weele, K., van der Meer, D., Lohse, D.: Granular leidenfrost effect: experiment and theory of floating particleclusters. – Phys. Rev. – Lett. 95. – 258001. – 2005
4. Meerson, B., Pöschel, T., Bromberg, Y.: Close-packed floating clusters: granular hydrodynamics beyond the freezing point? – Phys. Rev. – Lett. 91. – 024301. – 2003
5. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 1999. – №114. – С. 64-70.
6. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – 2000. – №116. – С. 73-80.
7. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87(№2). – P230-243.

8. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // *Mathematical Notes*. – 2014. – Vol. 96(№2). – P8-21.

9. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей // *Ред. Сиб. мат. журн. Сиб. отд. АН РФ*. – Новосибирск. – 2004. – Деп. ВИНТИ. – №37. – 34с.

10. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск. – 1983.

11. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики/ А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука. 1992. – 424 с.

12. Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении уравнений Навье–Стокса/ В.М. Ковеня, А.Ю. Слюняев // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2009. – №4. – С. 700–714.

13. Ковеня В.М., Разностная схема предиктор-корректор для численного решения уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа/ В.М. Ковеня, М.П. Кузьмин, Р.С. Полторацкий // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*. – 2011. – Т. 11, вып. 4. – С. 32–48.

## Математическое моделирование аутоиммунного заболевания

Д.В. Гончарова, Р.А. Вириц, М.А. Токарева  
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается кинетическая модель, описывающая развитие аутоиммунных заболеваний. Предлагаемая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, которая учитывает биологическую активность взаимодействующих популяций, а также основные характеристики аутоиммунных заболеваний. Проведено численное и аналитическое исследование задачи.

**Ключевые слова:** кинетическое моделирование, аутоиммунные заболевания, численное решение, популяции.

Рассматривается математическая модель развития аутоиммунных состояний, в которой происходит конкуренция между четырьмя популяциями клеток: популяция клеток-мишеней; популяция поврежденных клеток; популяция иммунных клеток; популяция вирусных частиц, вызывающих мимикрию. Состояния неструктурированных популяций  $i = 1$  и  $i = 2$  характеризуются в момент времени  $t$  их концентрациями

$$n_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Состояния структурированных популяций  $i = 3$  и  $i = 4$  описываются плотностями вероятности

$$f_i(t, u), \quad i = 3, 4.$$

По значениям плотностей вероятности можно определить концентрации структурированных популяций следующим образом:

$$n_i = \int_0^1 f_i(t, u) du.$$

Таким образом, математическая модель развития аутоиммунных состояний описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = S_1(t) + n_1(t) \left( p_{11} - \frac{p_{11}}{T_{Max}} n_1(t) \right) - d_{11} n_1(t) - d_{13} n_1(t) - d_{13} n_1(t) \int_0^1 u f_3(t, u) du,$$

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = d_{13} n_1(t) \int_0^1 u f_3(t, u) du - d_{22} n_2(t),$$

$$\frac{\partial f_3(t,u)}{\partial t} = (1-u) \left( p_{32}n_2(t) + p_{34} \int_0^1 u f_4(t,u) du \right) - d_{33}f_3(t,u),$$

$$\frac{\partial f_4(t,u)}{\partial t} = p_4 f_4(t,u) - d_{44}f_4(t,u) - d_{43}n_3(t)f_4(t,u).$$

Здесь  $S1(t)$  – скорость выработки здоровых клеток (клеток-мишеней) из источников внутри организма;  $p11$  – параметр, характеризующий скорость пролиферации клеток-мишеней;  $TMax$  – параметр, относящийся к концентрации клеток-мишеней (данный параметр является ограничителем распространения здоровых клеток);  $d11$  – параметр, характеризующий естественную гибель здоровых клеток;  $d13$  – параметр, описывающий скорость повреждения здоровых клеток, атакованных иммунными клетками;  $d22$  – параметр, характеризующий естественную гибель поврежденных клеток;  $p32$  – скорость выработки иммунных клеток, обусловленная наличием аутоантигенов;  $p34$  – скорость выработки иммунных клеток из-за присутствия вирусов;  $d33$  – скорость естественной гибели иммунных клеток;  $p4$  – скорость выработки вирусов;  $d43$  – скорость уничтожения вирусов в результате иммунного ответа;  $d44$  – скорость естественной гибели вирусов.

Рассматриваемая модель является обобщением предыдущих моделей [2,3,4], описывающих развитие аутоиммунных состояний. Эти модели учитывают популяции здоровых (мишеней) клеток, поврежденных клеток, иммунологических клеток и вирусных частиц. Модель [2] описывается только с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому состояния активации популяций игнорируются. Модели [2,4] включают состояние активности иммунных клеток. Однако эти модели изучают роль различных параметров модели. В представленную модель дополнительно вводится активность вирусных частиц для изучения дополнительных аспектов роли патогенности вирусных инфекций в аутоиммунных процессах.

Представленная в работе система обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений решается численно с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка и метода трапеций для вычисления интегралов. При задании начальных условий предполагается, что существует определенное количество клеток-мишеней, небольшое количество поврежденных клеток и небольшое количество иммунных клеток с одинаково распределенными состояниями активности и вирусов с высокими

состояниями активности:  $n_1(0) = 100, n_2(0) = 0.5,$   
 $f_3(0, u) = 0.1, \forall u \in [0, 1], f_4(0, u) = 0, \forall u \in [0, 1]$

Численное моделирование проведено при следующих значениях параметров:

$$S_1(t) = 10, \forall t \geq 0, T_{Max} = 100000, p_1 = 0.5, d_{11} = 0.2, d_{22} = 1.1$$

$$p_{32} = 0.001, p_{34} = 0.5, d_{33} = 0.1, p_4 = 10, d_{43} = 4, d_{44} = 4, d_{13} = 0.01$$

Итоговые результаты численного моделирования приведены на рисунках 1-4.

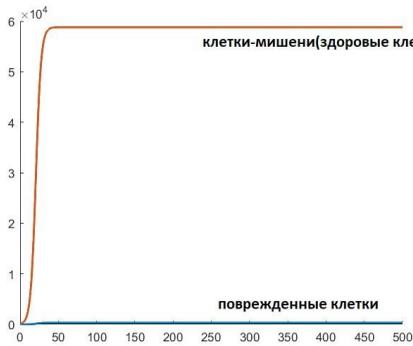


Рисунок 1 – Концентрации здоровых и поврежденных клеток.

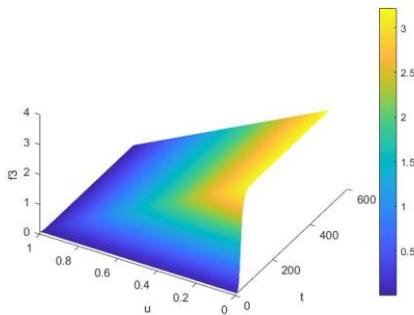


Рисунок 2 – Плотность вероятности распределения иммунных клеток ( $p_{32} = 0.001, p_{34} = 0.5$ ).

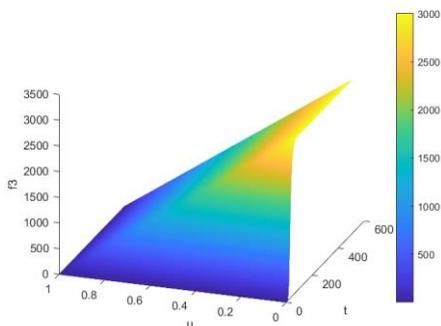


Рисунок 3 – Плотность вероятности распределения иммунных клеток  
( $p_{32} = 0.8, p_{34} = 0$ )

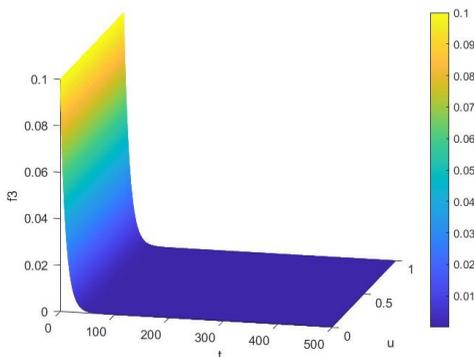


Рисунок 4 – Плотность вероятности распределения иммунных клеток  
( $p_{32} = 0, p_{34} = 5$ )

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта "Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики" (2024-26) (гос. задание FZMW-2024-0003)

### Библиографический список

1. M. Kolev, N. Netov , I. Nikolova, I. Naskinova, V. Kuneva, Marian Milev, On a Mathematical Model of a General Autoimmune Disease // Axioms. – 2023. – №12. – С. 1021.

2. I. Nikolova, A. Markovska, M. Kolev, A computational study of autoimmune disease model // Asian-Eur. J. Math. – 2020. – №13. – C. 2050169.

3. M. Kolev, Mathematical Analysis of an Autoimmune Diseases Model // Kinetic Approach. Mathematics. – 2019. – №7. – C. 1024.

4. M. Kolev, I. Nikolova, A mathematical model of some viral-induced autoimmune diseases // Math. Appl. – 2018. – №46. – C. 97–108.

## Расчет физических характеристик тающего снежно-ледового покрова с учетом теплового потока

Ю. В. Губер, А. А. Папин, А. Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

На основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача о движении воды и воздуха в тающем снеге. Построено автомодельное решение типа «бегущей» волны.

**Ключевые слова:** многофазная фильтрация, пористая среда, тающий снег, фазовый переход, насыщенность, автомодельное решение.

**Постановка задачи.** Тающий снег рассматривается как трехфазная среда, состоящая из воды ( $i = 1$ ), воздуха ( $i = 2$ ) и льда ( $i = 3$ ). Для описания процесса используются уравнение сохранения массы для каждой фазы, система уравнений двухфазной фильтрации Маскета — Леверетта для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом) [1-4]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0; \quad (1)$$

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta),$$

$$\sum_{i=1}^2 s_i = 1; \quad (2)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \vec{v}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) + v \frac{\partial \rho_i^0 \alpha_i}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь  $t$  — время;  $\vec{u}_i$  — скорость  $i$ -й фазы;  $\rho_i$  — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью  $\rho_i^0$  и объемной концентрацией  $\alpha_i$  соотношением  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ,  $I_{ji}$  — интенсивность перехода массы из  $j$ -й в  $i$ -ю составляющую в единице объема в единицу времени;  $\vec{v}_i = \phi s_i \vec{u}_i$  — скорости фильтрации воды и воздуха;  $\phi$  — пористость снега;  $s_1, s_2$  — насыщенности воды и воздуха ( $\alpha_1 = \phi s_1, \alpha_2 = \phi s_2, \alpha_3 = 1 - \phi$ );  $K_0$  — тензор фильтрации;  $k_{0i}$  — относительные фазовые проницаемости;  $\mu_i$  — динамическая вязкость;

$p_i$  — давления фаз;  $p_c$  — капиллярное давление;  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения;  $\theta$  — температура среды,  $c_i = const > 0$  — теплоемкость  $i$ -й фазы при постоянном объеме;  $v = const > 0$  — удельная теплота плавления льда;  $\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2$  — теплопроводность снега;  $\rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i$ ;  $a_c = const > 0$ ;  $b_c = const > 0$  [1]. Система (1)– (3) дополняется гипотезами  $u_3 = 0$ ,  $I_{12} = 0$ ,  $I_{23} = 0$ ,  $I_{31} = I_{31}(\theta)$ ,  $\rho_i^0 = \rho_i^0(\theta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Простое решение.** Введем конечные значения температуры  $\theta^-$ ,  $\theta_1$  и  $\theta^+$  (температура плавления льда). Пусть  $0 < \theta^- < \theta_1 < \theta^+$ . Считаем, что для всех  $\theta \in (0, \infty)$  имеют место соотношения  $\alpha_3(\theta) = 0$  при  $\theta \geq \theta^+$ ,  $\alpha_3(\theta) = 1 - \phi^- - \phi_1(\theta - \theta_1)$  при  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta^+$ ,  $\alpha_3(\theta) = 1 - \phi^-$  при  $\theta \leq \theta_1$ . Здесь  $\phi^- = \phi(\theta^-) \in (0, 1)$ ,  $\phi_1 = (1 - \phi^-)/(\theta^+ - \theta_1)$  — заданные параметры. Кроме того, предполагается, что пористая среда однородна ( $K_0 = const > 0$ );  $\rho_i^0 = const > 0$ , в системе координат  $x y z$  вектор  $g = (0, 0, -g)$ , входящие в систему (1) – (3) функции зависят от  $z, t$ . Исключая в (1)  $I_{31}$ , получаем систему уравнений ( $i = 1, 2$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi s_1 \rho_1^0 + \rho_3^0 (1 - \phi)) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_1^0 v_1) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi s_2 \rho_2^0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_2^0 v_2) = 0, \quad (5)$$

$$v_i = -K_0 \frac{k_{oi}}{\mu_i} \left( \frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i^0 g \right), \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 = 1, \quad (6)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i v_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - v \rho_3^0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (7)$$

Для системы (4) - (7) рассмотрим следующую задачу: снег занимает область  $(-\infty, ct)$ ,  $t > 0$ . При  $z = -\infty$  вода отсутствует ( $s_1 = 0$ ,  $v_1 = 0$ ), воздух неподвижен ( $v_2 = 0$ ) и задана температура  $\theta = \theta^-$  (ниже температуры плавления льда); при  $z = ct$  известны скорости воды ( $v_1 = v_1^+$ ), воздуха ( $v_2 = v_2^+$ ), давление воздуха ( $p_2 = p^+$ ) и задано граничное условие  $\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\alpha(\theta - \theta^0) + Q$  ( $\alpha$  — коэффициент теплообмена,  $\theta^0$  — температура атмосферного воздуха,  $Q$  — заданный поток тепла). Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной  $\xi = z - ct$  ( $c$  — неизвестная постоянная) из (4) - (7) получаем ( $i = 1, 2$ )

$$-c \frac{d}{d\xi} (\phi s_1 \rho_1^0 + \rho_3^0 (1 - \phi)) + \frac{d}{d\xi} (\rho_1^0 v_1) = 0, \quad (8)$$

$$-c \frac{d}{d\xi} (\phi s_2 \rho_2^0) + \frac{d}{d\xi} (\rho_2^0 v_2) = 0, \quad (9)$$

$$v_i = -K_o \frac{k_{oi}}{\mu_i} \left( \frac{dp_i}{d\xi} - \rho_i^0 g \right), \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 = 1, \quad (10)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i (v_i - c \alpha_i) \right) \frac{d\theta}{d\xi} - c v \rho_3^0 \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} \right), \quad (11)$$

$$s_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta|_{\xi \rightarrow -\infty} = \theta^-, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad v_i|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad (12)$$

$$p_2(0) = p^+, \quad \left( \lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} + \alpha(\theta - \theta^0) - Q \right) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad v_i(0) = v_i^+. \quad (13)$$

Искомыми являются функции  $s_1(\xi)$ ,  $v_i(\xi)$ ,  $p_i(\xi)$  и постоянная  $c$ . Из (8) и (9) следует, что

$$\rho_1^0 v_1 - c(\phi s_1 \rho_1^0 + (1 - \phi) \rho_3^0) = A_1 = const, \quad (14)$$

$$\rho_2^0 v_2 - c\phi s_2 \rho_2^0 = A_2 = const. \quad (15)$$

Рассматривая (14), (15) при условиях (13), для неизвестных параметров  $c$ ,  $s^+ = s_1(0)$  ( $s_1 \equiv s$ ,  $s_2 \equiv 1 - s$ ),  $\theta(0)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} v_1^+ &= c \left( \phi(\theta(0)) s^+ + \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} (\phi^- - \phi(\theta(0))) \right), \\ v_2^+ &= c (\phi(\theta(0)) (1 - s^+) - \phi^-), \\ \left( \lambda_c \frac{d\theta}{d\xi} + \alpha(\theta - \theta^0) - Q \right) \Big|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned}$$

Решения этой системы должны удовлетворять условиям  $c < 0$ ,  $s^+ \in [0, 1]$ ,  $\theta(0) > \theta^-$ . После нахождения параметра  $\theta(0)$  задача сводится к системе для  $s(\xi)$  и  $\theta(\xi)$ , которая исследована в работе [3].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003).

## Библиографический список

[1] Кучмент Л.С. Формирование речного стока. Физико-математические модели. / Л.С. Кучмент, В.Н. Демидов, Ю.Г. Мотовилов. М., 1983.

[2] Papin A.A., Tokareva M.A. Problems of Heat and Mass Transfer in the Snow–Ice Cover // Polar Mechanics 2018. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 193. P. 1–8.

[3] Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. №. 4. С. 13-23.

[4] Папин А.А., Сибин А.Н. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 65, № 1. С. 109-118.

**Автомодельное решение задачи фильтрации  
жидкости в вязкой пористой среде**

*А.А. Изотов, А.А. Папин  
АлтГУ, г. Барнаул*

В работе рассматривается автомодельное решение начально-краевой задачи фильтрации жидкости в вязкой пористой среде.

**Ключевые слова:** *фильтрация, разрешимость, вязкость.*

**Постановка задачи.** В работе рассматривается трёхмерная математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. Данный процесс описывается следующей системой уравнений, записанных в автомодельных переменных  $\xi = \frac{1}{3}(x + z + y - ct)$ :

$$\frac{d}{d\xi} \left( \varphi \left( u_f - \frac{c}{3} \right) \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \varphi) \left( u_s - \frac{c}{3} \right) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi (u_f - u_s) = - \frac{\varphi^n}{\varepsilon} \frac{dp_f}{d\xi}, \quad (3)$$

$$\frac{du_s}{d\xi} = - \frac{\varphi^m}{\gamma} (p_{tot} - p_f) - \varphi^b \lambda \left( u_s - \frac{c}{3} \right) \left( \frac{d(p_{tot} - p_f)}{d\xi} \right), \quad (4)$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = 2\gamma \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \varphi) \frac{du_s}{d\xi} \right). \quad (5)$$

В системе (1) - (5) проведено обезразмеривание переменных, причём  $\gamma = \frac{\eta}{p_1 t_1}$ ,  $\varepsilon = \frac{3v_1 \mu}{k\alpha}$ ,  $\lambda = \beta_\varphi p_1$  - безразмерные переменные.

Система рассматривается при  $\xi > 0$  и дополняется граничными условиями :

$$u_s(0) = u_s^0, u_f(0) = u_f^0, \varphi(0) = \varphi^0, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = \varphi^+, \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_s(\xi) = u^+, \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_f(\xi) = u^+ \quad (6)$$

где  $u_s^0, u_f^0, \varphi^0, \varphi^+$  - заданные постоянные, удовлетворяющие условиям  $\varphi^0 \neq \varphi^+, u_s^0 \neq u_f^0$ .

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:  $g = 0, \varphi^0 > \varphi^+, (\varphi^0, \varphi^+) \in (0, 1)$ , Тогда существует единственное классическое автомодельное решение  $(\varphi(\xi), v_i(\xi), p_i(\xi)), i = s, f$  задачи (1)–(6).

Следуя [1] приходим к системе уравнений для неизвестных постоянных  $A_1, A_2, u^+, c$  :

$$u_f^0 = \frac{c}{3} + \frac{A_1}{\varphi^0}, u_s^0 = \frac{c}{3} + \frac{A_2}{1 - \varphi^0}, u^+ = \frac{c}{3} + \frac{A_1}{\varphi^+}, u^+ = \frac{c}{3} + \frac{A_2}{1 - \varphi^+}.$$

Решение последней дается формулами:

$$A_2 = \frac{(1 - \varphi^+)(1 - \varphi^0)\varphi^0(u_f^0 - u_s^0)}{\varphi^+ - \varphi^0}, A_1 = \frac{\varphi^+}{1 - \varphi^+} A_2, \\ c = \frac{3(1 - \varphi^0)u_s^0 + 3\varphi^0(1 - \varphi^+)}{\varphi^+ - \varphi^0}, u^+ = \varphi^0 u_f^0 + (1 - \varphi^0)u_s^0.$$

В рассматриваемом случае система (1) - (5) сводится к следующему уравнению третьего порядка для функции  $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\varphi^{b-m}}{1-\varphi} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{1-\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \right) + \frac{1}{\lambda A_2} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{1-\varphi} \left( \frac{1}{2\varphi^m(1-\varphi)} + 1 \right) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \\ \frac{\varepsilon}{2\gamma} \frac{d}{d\xi} \left( \varphi^{b-m-n} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) \right) + \frac{\varepsilon}{2\gamma\lambda A_2} \varphi^{-n} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) = 0. \quad (*)$$

В случае, когда твёрдая фаза обладает преимущественно вязкими свойствами относительно упругих, ( $\beta_\varphi \rightarrow 0$ ) уравнение (\*) принимает вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\gamma^2 + \varphi^m(1-\varphi)}{\varphi^m(1-\varphi)^2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \gamma\varepsilon\varphi^{-n} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) = 0. \quad (**)$$

Положим  $s = \frac{\varphi}{1-\varphi}$ . Уравнение (\*\*) приводится к виду для  $s$  примет вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \left( \left( \frac{1+s}{s} \right)^m + \frac{1}{\gamma^2} (1+s) \right) \frac{ds}{d\xi} \right) - \frac{\varepsilon}{\gamma} \left( \frac{1+s}{s} \right)^n \left( s - \frac{A_1}{A_2} \right) = 0.$$

Уравнения для функции  $s$  дополняются соответствующими условиями:  
 $s(0) = s^0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} s(\xi) = s^+.$

Положим

$$u(s(\xi)) = \int_{s^+}^{s(\xi)} a(\tau) d\tau, a(s(\xi)) = \left( \frac{1+s}{s} \right)^m + \frac{1}{\gamma^2} (1+s).$$

Тогда  $u$  удовлетворяет задаче

$$u'' - d(u)u = 0, u(0) = \int_{s^+}^{s(\xi)} a(\tau) d\tau \equiv u_0, u(\infty) = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$d(u) = \frac{\varepsilon}{\gamma u} \left( \frac{1+s}{s} \right)^n \left( s - \frac{A_1}{A_2} \right).$$

В дальнейшем считаем  $s^+ < s^0$ . На отрезке  $[0, n]$  рассмотрим вспомогательную задачу для  $v(\xi) = \int_{s^+}^{s(\xi)} a(\tau) d\tau$ :

$$v'' - d(v)v = 0, v(0) = u_0, v(n) = 0. \quad (8)$$

В силу принципа максимума [1, с. 106] удовлетворяет неравенствам  $u_0 \geq v(\xi) \geq 0$  для всех  $\xi \in [0, n]$ . Поэтому  $d(v)$  является строго положительной и ограниченной. Представим уравнение (8) в виде:

$$\psi' = vd(v) \geq 0, \psi = v \quad (9)$$

выводим, что монотонно возрастающая функция  $\psi(\xi)$  является неположительной. Поэтому  $v'(\xi) \leq 0$  для всех  $\xi \in [0, n]$ .

Уравнение (8) представим в виде  $(v')' - vd(v) = 0$  и проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до текущего значения  $\xi$ :

$$v'(\xi) - v'(0) = \int_0^\xi \tau d(\tau) d\tau \equiv \varphi(\xi) \geq 0.$$

Имеем  $|v'(0)| - \varphi(\xi) \leq -v'(\xi)$ . Интегрируя по  $\xi$  от 0 до  $n$ , получим  $|v'(0)| \leq \frac{1}{n} (\int_0^n \varphi(\tau) d\tau + v_0) \equiv N < \infty$ . Поскольку  $\psi(0) \leq \psi(\xi) \leq \psi(n)$ , то имеем  $v'(0) \leq v'(\xi), |v'(\xi)| \leq |v'(0)|$ . Отсюда следует, что для  $\xi \in [0, n]$ :

$$|v'(\xi)| \leq |v'(0)| \leq N. \quad (10)$$

Пусть  $y \equiv |v'(\xi)|$ . Уравнение (6) представим в виде  $y' - d(v)y = 0$ . В частности, имеем неравенство  $y' \leq 0$ . Отсюда следует, что

$$|v'(\xi)| \leq N \exp(-\alpha^* \xi). \quad (11)$$

Представим решение задачи (7) в виде

$$v(\xi) = v_0 - \int_0^\xi (|v'(0)| - \varphi(\tau)) d\tau \equiv T(v). \quad (12)$$

Доказательство теоремы. В пространстве непрерывных функций  $C[0, n]$  рассмотрим замкнутое, ограниченное, выпуклое множество  $M = \{v(\xi) | 0 \leq v(\xi) \leq u_0, \xi \in [0, n]\}$ . Оператор  $T$  определен на множестве  $M$ , и в силу принципа максимума имеет место вложение  $T(M) \subset M$ .

Далее доказательство следует [1, с. 109] и опирается на теорему Шаудера [4].

Решение задачи (7) на бесконечном интервале получим как предел последовательности  $\{v_n(\xi)\}$  решений задачи (8) при  $n \rightarrow \infty$ , используя независимые от  $n$  оценки (10)–(11). В силу единственности решений задач (8) ограниченная последовательность  $\{v_n(\xi)\}$  монотонно возрастает и, следовательно, сходится к некоторой функции  $u(\xi)$ . Осуществляя предельные переходы в равенствах (12), записанных для  $\{u_n(\xi)\}$ , получим аналогичное равенство для предельной функции. Последнее означает, что  $u(\xi)$  является классическим решением задачи (7). Асимптотическое поведение решения определяется неравенством (11).

Таким образом, теорема доказана.

Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003).

### **Библиографический список**

1. Токарева М.А., Папин А.А. Алтайский государственный университет. - Барнаул : Изд-во Алт. ун-та. - Ч. 2: Пороупругие среды, вопросы разрешимости. - 2021. - 190 с. - ISBN 978-5-7904-2587-5.
2. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. М. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.

**Численное исследование математической модели  
биотеплопереноса в живых тканях**

*В.С. Касмынин, Р.А. Вири, М.А. Токарева  
АлтГУ, г. Барнаул*

В работе приведены результаты численного исследования математической модели биотеплопереноса в живых тканях, рассмотрено влияние компонент перфузии и тепловой диффузии.

**Ключевые слова:** *уравнение теплопереноса, модифицированное уравнение Пенса.*

За последнее столетие было разработано множество математических моделей сложного теплового взаимодействия сосудистой системы и тканей. Последнее является предметом интереса многих физиологов, медиков и инженеров.

Первое количественное соотношение, описывающее теплоперенос в тканях человека и включающее влияние кровотока на температуру ткани на континуальной основе, было представлено Гарри Пенсом, исследователем из Колледжа врачей и хирургов Колумбийского университета. Общий вид уравнения биотеплового баланса Пенса имеет вид [1]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + w_b c_b (T_a - T) + q_m, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $c$  и  $k$  - плотность ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ), удельная теплоемкость ( $\text{Дж}/\text{кг} \cdot \text{К}$ ), и теплопроводность тканей ( $\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К}$ ), соответственно;  $w_b$  - массовый расход крови на единицу объема ткани ( $\text{кг}/\text{с} \cdot \text{м}^3$ );  $c_b$  - удельная теплоемкость крови;  $q_m$  - метаболическое тепловыделение на единицу объема ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ );  $T_a$  - температура артериальной крови ( $\text{К}$ );  $T$  - локальная температура ткани.

Математическая модель теплопередачи в тканях, использованная для оценки профилей температуры тканей была основана на одномерном уравнении биотеплового баланса, описывающем теплопередачу в тканях [1], и модифицированном для учета температурно-зависимости изменчивости перфузии тканей [3], [4].

Уравнение, описывающее локальную температуру  $T(x, t)$ , имеет вид [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[ \omega_0 + \omega_1 \frac{T - T_a}{T_a} \right] (T_a - T), \quad (2)$$

где  $T_{out}$  - температура окружающей среды,  $h$  - коэффициент теплопередачи,  $T$  - локальная температура ткани,  $t$  - время,  $x$  - расстояние от нагретой поверхности,  $T_a$  - входная температура артериальной крови,  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  - тепловая диффузия,  $\omega_0$  - температурно-независимая компонента перфузии,  $\omega_1$  - температурно-зависимая (вазодилатация и ангиогенез) компонента перфузии. Температура  $T_a$  артериальной крови на входе принимается постоянной. В стационарном случае уравнение (2) выглядит следующим образом:

$$\left( \frac{d^2 T}{dx^2} \right) = \frac{\omega_1}{\alpha T_a} T^2 + \frac{\omega_0 - 2\omega_1}{\alpha} T + \frac{T_a(\omega_1 - \omega_0)}{\alpha}. \quad (3)$$

Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)^2 = 4 \frac{\omega_1}{6\alpha T_a} T^3 + 6 \frac{(\omega_0 - 2\omega_1)}{6\alpha} T^2 + 4 \frac{(\omega_1 - \omega_0) T_a}{2\alpha}. \quad (4)$$

Уравнение (4) решается численно с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка. Рассмотрим влияние компонент перфузии и тепловой диффузии. Графики на рисунке 1 показывают, что температура отклика уменьшается с увеличением коэффициента тепловой диффузии  $\alpha$ . На рисунке 2 представлено влияние температурно-независимой компоненты перфузии  $\omega_0$ , откуда мы можем сделать вывод, что влиянием этой компоненты, на температурный отклик можно пренебречь. Из графиков на рисунке 3 следует, что температурный отклик увеличивается с ростом зависящей от температуры компоненты перфузии  $\omega_1$

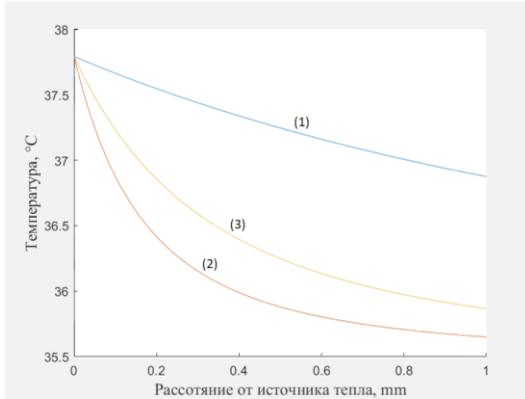


Рисунок 1 - Влияние тепловой диффузии  $\alpha$ . Профиль температуры вдоль расстояния  $x$  (в мм) от источника тепла при  $T_a = T_0 = 37.63^\circ\text{C}$ ,  $\omega_0 = 4.7619 \times 10^{-4}\text{c}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 6.449 \times 10^{-3}\text{c}^{-1}$ ,  
 (1):  $\alpha = 1.2631 \times 10^{-2}\text{Вт/Дж}\cdot\text{м}^2$ , (2):  $\alpha = 1.2631 \times 10^{-4}\text{Вт/Дж}\cdot\text{м}^2$ ,  
 (3):  $\alpha = 4.7619 \times 10^{-4}\text{Вт/Дж}\cdot\text{м}^2$ .

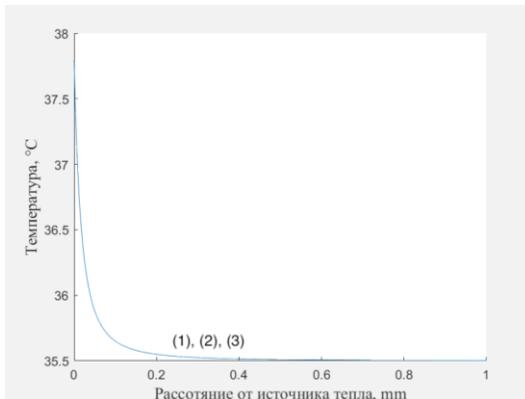


Рисунок 2 - Влияние температурно-независимой компоненты перфузии  $\omega_0$ . Профиль температуры вдоль расстояния  $x$  (в мм) от источника тепла при  $T_a = T_0 = 37.63^\circ\text{C}$ ,  $\omega_1 = 6.449 \times 10^{-3}\text{c}^{-1}$ ,  
 (1):  $\omega_0 = 4.7619 \times 10^{-4}\text{c}^{-1}$ , (2):  $\omega_0 = 4.7619 \times 10^{-3}\text{c}^{-1}$ ,  
 (3):  $\omega_0 = 4.7619 \times 10^{-2}\text{c}^{-1}$ .

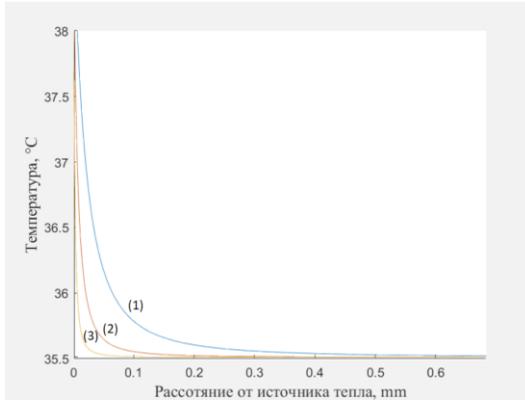


Рисунок 3 - Влияние температурно-зависимой компоненты перфузии  $\omega_1$ . Профиль температуры вдоль расстояния  $x$  (в мм) от источника тепла при  $T_a = T_0 = 37.63^\circ\text{C}$ ,  $\omega_0 = 4.7619 \times 10^{-4}\text{c}^{-1}$ ,  
 (1):  $\omega_1 = 4.7619 \times 10^{-4}\text{c}^{-1}$ , (2):  $\omega_1 = 4.7619 \times 10^{-3}\text{c}^{-1}$ ,  
 (3):  $\omega_1 = 4.7619 \times 10^{-2}\text{c}^{-1}$ .

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00381)

### Библиографический список

1. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial temperatures in the resting human forearm // *Journal of Applied Physiology*. – 1948. – №1. – p. 93-122
2. Lakhssassi A. and Kengne E. Modified Pennes' equation modelling bio- heat transfer in living tissues: Analytical and numerical analysis // *Natural Science*. – 2010. – p. 1375-1385.
3. Seese T.M., Harasak H., Saidel G.M. and Davies C.R. Characterization of tissue morphology, angio- genesis, and temperature in the adaptive response of muscle tissue to chronic heating // *Journal of Technical Methods and Pathology*. – 1998. – № 78. – p. 1553-1562.
4. Kengne E. and Liu W.M. Exact solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation for a nonlinear transmission line // *Physical Review*, – 2006. – №73. – p. 1-8.

## Одномерная фильтрация жидкости в поропругой среде с неоднородными граничными условиями

*А.Р. Латышев, А.А. Папин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе доказана разрешимость начально-краевой задачи фильтрации жидкости в вязкой пористой среде с проницаемыми границами.

**Ключевые слова:** *фильтрация, разрешимость, поропругость.*

**Постановка задачи.** В работе рассматривается одномерная математическая модель фильтрации жидкости в поропругой среде с проницаемыми границами, исходя из предположений о том, что среда обладает преимущественно вязкими свойствами, данный процесс может быть описан следующим уравнением для пористости  $\varphi$  ([1], [2]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varphi}{1-\varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\varphi) \left( (1-\varphi) \frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_f + \rho_{tot}) \right) \right) \quad (1),$$

которое решается в области  $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = (0, 1)$ , при краевых и начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} & \left( k(\varphi) \left( (1-\varphi) \frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_f + \rho_{tot}) \right) \right) \Big|_{x=0} = -q_0^0, \\ & \left( k(\varphi) \left( (1-\varphi) \frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_f + \rho_{tot}) \right) \right) \Big|_{x=1} = -q_1^1, \\ & \varphi|_{t=0} = \varphi^0(x) \end{aligned} \right\} (2),$$

где функция  $G(\varphi)$  определяется равенством  $\frac{dG}{d\varphi} = \frac{\xi}{1-\varphi}$ ,  $\rho_{tot} = (1-\varphi)\rho_s + \varphi\rho_f$  - общая плотность,  $\rho_f, \rho_s$  - постоянные плотности жидкой и твердой фаз соответственно,  $g$  - плотность массовых сил,  $k(\varphi)$  - коэффициент фильтрации,  $\xi(\varphi)$  - коэффициент объемной вязкости (заданные).

**Определение.** Решением задачи (1) - (2) называется функция  $\varphi: (\varphi, \varphi_t) \in C(Q_T) \cap C^2(\Omega)$ ,  $0 < \varphi < 1$ , удовлетворяющая уравнению (1), начальному и краевым условиям (2).

**Теорема.** Пусть данные задачи (1) - (2) подчиняются следующим условиям: 1) Функции  $k(\varphi)$ ,  $a_1(\varphi)$  и их производные до второго порядка непрерывны для  $\varphi \in (0, 1)$  и удовлетворяют условиям:

$(k_0)^{-1}\varphi^{q_1}(1-\varphi)^{q_2} \leq k(\varphi) \leq k_0\varphi^{q_3}(1-\varphi)^{q_4}$ ,  $a_1(\varphi) = a_0(\varphi)\varphi^{\alpha_1}(1-\varphi)^{\alpha_2-1}$ ,  $0 < R_1 \leq a_0(\varphi) \leq R_2 < \infty$ , где  $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1, 2$  - положительные постоянные,  $q_1, q_2, q_3, q_4$  - фиксированные вещественные числа; 2) Функция  $g(x)$ , начальная функция  $\varphi^0(x)$  и граничные функции  $q_D^0, q_D^1$  удовлетворяют следующим условиям гладкости и неравенствам:  $g \in C^1(\overline{Q_T}) \cap C^1(\Omega)$ ,  $\varphi^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $(q_D^0, q_D^1) \in C(0, T)$ ,  $0 < m_0 \leq \varphi_0(x) \leq M_0 < 1$ ,  $|g(x, t)| \leq g_0 < \infty$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ , где  $m_0, M_0, g_0$  - известные положительные постоянные. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение  $t_0$  такое, что  $(\varphi, \varphi_t) \in C(Q_T) \cap C^2(\Omega)$ , а также,  $0 < \varphi(x, t) < 1$  в  $\overline{Q_{t_0}}$ .

**Доказательство:** положим  $z = \frac{dG}{dt}$  и перепишем систему (1)-(2):

$$z = \frac{dG}{dt}, \quad G|_{t=0} = G^0(x), \quad \frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(G) \frac{\partial z}{\partial x} - b(G) \right) = 0 \quad (3)$$

$$\left( a(G) \frac{\partial z}{\partial x} - b(G) \right) |_{x=0} = -q_D^0, \quad \left( a(G) \frac{\partial z}{\partial x} - b(G) \right) |_{x=1} = -q_D^1 \quad (4)$$

Здесь  $d(G)$ ,  $a(G)$ ,  $b(G)$  - легко восстанавливаются. Поскольку  $\varphi$  и  $G^0(x)$  - ограничены, то из (4), при выполнении неравенства

$\max_{(x,t) \in Q_t} |z(x, t)| \leq c_0$ , имеем, что найдется такое значение  $t_0$ , что для

всех  $t \leq t_0$ , справедливы оценки вида:

$$\left. \begin{aligned} G_1(m_0) = G(m_0) - c_0 t_0 \leq G(x, t) \leq G(M_0) + c_0 t_0 = G_2(M_0) \\ 0 < G^{-1}(G_1(m_0)) \leq \varphi(x, t) \leq G^{-1}(G_2(M_0)) < 1 \end{aligned} \right\} (5)$$

Существование и единственность решения задачи следует из теоремы Гильберта [3] после замены переменных. Переменная  $t$  играет роль параметра. Тем самым  $(z, z_x, z_{xx}) \in C(Q_{t_0})$ . После нахождения  $z(x, t)$  можно найти из (3) новое значение  $G(x, t)$ , удовлетворяющее (5). Для доказательства разрешимости задачи (3) - (4) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть  $z^i, G^i$  - решение задачи:

$$\left. \frac{\partial G^i}{\partial t} = z^{i+1}, G^{i+1}(x, 0) = G^0(x) \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( a(G^i) \frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i) \right) |_{x=0} = -q_D^0 \\ \left( a(G^i) \frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i) \right) |_{x=1} = -q_D^1 \end{aligned} \right\} (7), \text{ где } i = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем, что  $z^i(x, t)$  и  $G^i(x, t)$  фундаментальны в  $C(Q_{t_0})$ . Получим равномерные по  $i$  оценки. При  $i = 0$ : коэффициенты  $d, a, b$  - являются ограниченными константами, умножим (6) при на  $z^1$ , проинтегрируем

по  $x \in [0,1]$ , оценим  $\max_{(x,t) \in Q_t} |z^1|, I_B = (z^1 q_D)|_0^1$ , используя неравенство

Коши и Гельдера, тогда получим:

$$\int_0^1 ((z^1)^2 + (z_x^1)^2) dx \leq c_1(m_0, M_0, q), \text{ где } \varepsilon =$$

$$\min_x \left( \frac{1}{2 \max_x d(G^0)}, \frac{1}{2 \max_x \frac{1}{a(G^0)}} \right), q = \max_t \left( \max_t |q_D^1|, \max_t |q_D^0| \right).$$

Таким образом:  $\max_{(x,t) \in Q_t} |z^1(x,t)| \leq \sqrt{3c_1}$  и  $|G^1(x,t) - G^0(x)| \leq \sqrt{3c_1}t$ . Берём  $c_0 = \sqrt{3c_1}$ , тогда приходим к неравенству для  $G$  и  $\varphi$ :  $G_1(m_0) \leq G^1(x,t) \leq G_2(M_0)$ ,  $0 < m_1 \leq \varphi \leq M_1 < 1$ . Коэффициенты  $d$ ,  $a$ ,  $b$  ограничены. Подставляя  $G^1$  в (7), получаем аналогичные результаты. Чтобы  $t_0^1$  не менялась, нужно в (5) на первом шаге взять  $m_1$  и  $M_1$ . Повторяя процесс, получим,  $\max_{(x,t) \in Q_t} |z^i(x,t)| \leq c_0(m_1, M_1, q)$ , следовательно, в (5) выбирается одно и то же  $t_0$ .

Положим  $y^{i+1} = z^{i+1} - z^i, w^{i+1} = G^{i+1} - G^i$ . Из (6) - (7) выводим:

$$\left. \frac{\partial w^{i+1}}{\partial t} = y^{i+1}, w^{i+1}|_{t=0} = 0 \right\} (8)$$

$$\left. \frac{y^{i+1}}{a(G^i)} + A_1 w^i - \frac{\partial}{\partial x} (a y_x^{i+1} + A_2 w^i) = 0, \right\} (9)$$

$$(a y_x^{i+1} + A_2 w^i)|_{x=0,1} = 0$$

Здесь  $A_1, A_2$  - легко восстанавливаются и являются ограниченными. Умножаем (9) на  $y^i$ , интегрируем по  $x \in [0,1]$  и выводим:

$$\int_0^1 (|y^{i+1}|^2 + |y_x^{i+1}|^2) dx \leq c_6 \int_0^1 |w^i|^2 dx \leq c_6 \max_x |w^i|^2 \int_0^1 dx \quad (10)$$

Из (10) следует, что  $\max_x |w^{i+1}| \leq \int_0^t \max_x |y^{i+1}| d\tau$ . Таким образом, для функции  $V^i(t) = \max_x |y^i(x,t)|^2$  получим  $V^{i+1}(t) \leq c_6 \int_0^t V^i(\tau) d\tau$ .

Следовательно [4],  $V^i(t) \leq \frac{(c_6 T)^i V_0}{i!} \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ . После этого легко устанавливается, что последовательности  $z^i, G^i, z_x^i, z_{xx}^i, G_t^i$  являются фундаментальными. Переходя в (8), (9) к пределу при  $i \rightarrow \infty$  получим, что функции удовлетворяют задаче (3)-(4). Теорема доказана.

**Разностная схема:** Пусть  $\omega$  - равномерная сетка по  $x$  с шагом  $h$ , т.е.  $\omega = \{x_i = ih | i = 0, 1, 2, \dots, N\}, h = \frac{1}{N}$ . Приведем задачу ((3)-(4)) к виду (индекс 0 и 1 обозначают значения функций при  $x=0, x=1$  соответственно):

$$(a(x)z_x)_x - \bar{d}(x)z = -f(x), a_0 z_x(0) = -g_0, a_1 z_x(1) = -g_1 \quad (11)$$

$$\text{Здесь } g_0 = q_D^0 - b_0, g_1 = q_D^1 - b_1, f(x) = -b_x, \bar{d} = \frac{1}{a}.$$

Пусть  $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h, x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0.5h$ , тогда обозначим искомую функцию через  $y_i$ , положим  $k(x_i) = a\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$ ,  $q(x_i) = d(x_i), \psi(x_i) = f(x_i)$ , аппроксимируем задачу (11) на равномерной сетке  $\omega$  следующей задачей ([5]):  $\frac{1}{h} \left[ k_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - k_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - q_i y_i = -\psi_i, x \in \omega$  (13)

Здесь  $\psi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx$ ,  $k_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{a(x)} \right)^{-1}$ ,  $q_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \bar{d}(x) dx$ .

Условия переписутся следующим образом:  $-k_1 y_{x,0} + \frac{h}{2} q_0 y_0 = g_0 + \frac{h}{2} \psi_0$ ,  $k_N y_{x,N} + \frac{h}{2} q_N y_N = g_1 + \frac{h}{2} \psi_N$  (14), где  $q_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \bar{d}(x) dx$ ,  $q_N = \frac{2}{h} \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \bar{d}(x) dx$ ,  $\psi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x) dx$ ,  $\psi_N = \frac{2}{h} \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} f(x) dx$ . Заменяем  $u(x) = y(x) - z(x)$ , где  $z(x)$  - решение задачи (11), а  $y(x)$  - решение задачи (13), (14). Следуя [5], можно показать, что  $\|z\|_1 = O(h^2)$ , где  $\|\cdot\|_1$  - разностный аналог нормы пространства Соболева ([5]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003).

## Библиографический список

1. Papin A. A. Filtration of Liquid in a Non-isothermal Viscous Porous Medium / A. A. Papin, M. A. Tokareva, R. A. Virts // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2020. – Vol. 13, No. 6. – P. 763-773. – DOI 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773. – EDN XZUXLT.
2. Токарева М. А. Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде / М. А. Токарева, А. А. Папин // Сибирский журнал промышленной математики. – 2019. – Т. 22, № 2(78). – С. 81-93. – DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.208. – EDN ВВUAPK.
3. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – Москва, 1981.

4. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.

5. Самарский А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений. – Москва, 1976.

## Усреднение термоупругого композита в случае переменных коэффициентов

Э.И. Леонова

ИГиЛ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск

В работе рассматривается задача гомогенизации термоупругого композита, который прошит тонкими нитями. Постановка задачи содержит два малых параметра –  $\delta$  и  $\varepsilon$ , отвечающих за ширину нити и расстояние между соседними нитями, соответственно. При устремлении данных параметров к нулю, в итоге выводится усредненная задача, в которой нет необходимости учитывать вклад упругих нитей. Так же в работе проведены численные расчеты для функций перемещения и температуры.

**Ключевые слова:** композитный материал, тонкое включение, гомогенизация, численный эксперимент.

### 1. Постановка задачи. Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ .

Композит состоит из термоупругой связующей матрицы, прошитой тонкими армирующими нитями [1]. Целью статьи является получение усредненной задачи. Чтобы получить её, разделим работу на четыре задачи: с толстым включением (задача А), с тонким включением (задача В), с несколькими включениями (задача  $B_\varepsilon$ ) и усредненная задача (задача Н). Схема решения представлена на рисунке 1.

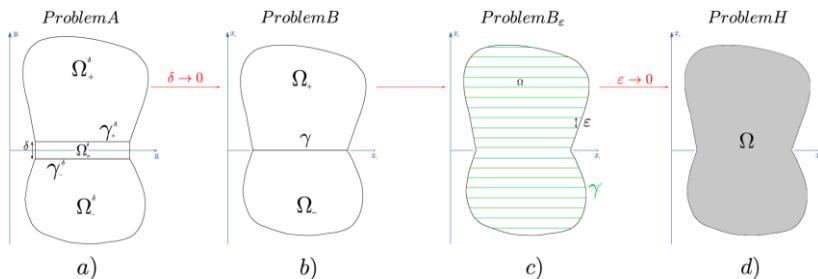


Рисунок 1 – Этапы решения задачи

Рассмотрим произвольную область композитного материала  $\Omega^\delta \subset \mathbb{R}^2$ , в которой  $\Omega_+^\delta \cup \Omega_-^\delta$  является связующей матрицей, а  $\Omega_m^\delta$  – прямоугольное включение с шириной  $\delta$ . Границы  $\gamma_+^\delta$  и  $\gamma_-^\delta$  обозначают

верхние и нижние стороны включения, а  $\Gamma^\delta = \partial\Omega^\delta \cap (\Omega_+^\delta \cup \Omega_-^\delta)$  – внешняя граница связующей матрицы.

Сформулируем задачу с одним толстым включением (рисунок 1 а)).

**Задача А.** Найти распределения смещения  $u = u(\mathbf{y})$  и температуры  $\theta = \theta(\mathbf{y})$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям равновесия и баланса тепла

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}(a_\delta(\nabla_{\mathbf{y}}u - \beta_\delta\theta\mathbf{I})) &= f_\delta \text{ в } \Omega^\delta, \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\lambda_\delta\nabla_{\mathbf{y}}\theta) &= g_\delta \text{ в } \Omega^\delta, \\ u = 0, \theta = 0 &\text{ на } \Gamma_+^\delta \cup \Gamma_-^\delta, \\ a_\delta(\nabla_{\mathbf{y}}u - \beta_\delta\theta\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}^\delta &= 0 \text{ на } \partial\Omega^\delta \setminus (\Gamma_+^\delta \cup \Gamma_-^\delta), \\ (\lambda_\delta\nabla_{\mathbf{y}}\theta) \cdot \mathbf{n}^\delta &= 0 \text{ на } \partial\Omega^\delta \setminus (\Gamma_+^\delta \cup \Gamma_-^\delta). \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $a_\delta(\mathbf{y})$  – модуль упругости,  $\beta_\delta(\mathbf{y})$  – коэффициент теплового расширения,  $\mathbf{1} = (1,1)^T$  – вектор-столбец,  $f_\delta(\mathbf{y})$  – распределённая массовая сила,  $\lambda_\delta(\mathbf{y})$  – коэффициент теплопроводности,  $g_\delta(\mathbf{y})$  – внешние распределённые источники тепла,  $\mathbf{n}^\delta$  – вектор единичной внешней нормали.

В задаче был осуществлен предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$  с помощью методов асимптотического анализа [2,3]. В результате получена модель, в которой область и коэффициенты не зависят от  $\delta$ , т. е. задача с одним тонким включением (рисунок 1 б)).

**Задача В.** Найти распределения смещения  $u = u(\mathbf{x})$  и температуры  $\theta = \theta(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(a(\nabla_{\mathbf{x}}u - \beta\theta\mathbf{I})) &= f(\mathbf{x}) \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\lambda\nabla_{\mathbf{x}}\theta) &= g(\mathbf{x}) \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \\ u = 0, \theta = 0 &\text{ на } \Gamma = \partial\Omega, \\ h + [a(\nabla_{\mathbf{x}}u - \beta\theta\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] &= -\partial_{x_1}(a_{in}(\partial_{x_1}u - \beta_{in}\theta)) \text{ при } x_1 \in \gamma, \\ w + [(\lambda\nabla_{\mathbf{x}}\theta) \cdot \mathbf{n}] &= -\partial_{x_1}(\lambda_{in}\partial_{x_1}\theta) \text{ при } x_1 \in \gamma, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n} = (0,1)$ , [...] – скачок на  $\gamma$ ,  $h(y_1)$  – объемная сила, приложенная к  $\gamma$ ,  $w(y_1)$  – распределенный источник тепла на  $\gamma$ .

**2. Процедура гомогенизации. Предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .**

Теперь обобщим задачу В на случай нескольких тонких включений. Введем параметр  $\varepsilon$  – расстояние между двумя соседними нитями. Стоит обратить внимание, что в отличии от [1], здесь коэффициенты  $a(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ ,  $\beta(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ ,  $f(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ ,  $\lambda(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ ,  $g(\mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon})$  являются переменными величинами, а не постоянными. Тогда задача будет иметь вид, представленный ниже (рисунок 1 с)).

**Задача В<sub>ε</sub>.** Найти пару функций  $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ , которая удовлетворяет следующим уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x \left\{ a \left( \mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \left( \nabla_x u^\varepsilon - \beta \left( \mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \theta^\varepsilon \mathbf{I} \right) \right\} &= f \left( \mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \text{ в } \Omega \setminus \gamma^\varepsilon, \\ -\operatorname{div}_x \left\{ \lambda \left( \mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \nabla_x \theta^\varepsilon \right\} &= g \left( \mathbf{x}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \text{ в } \Omega \setminus \gamma^\varepsilon, \\ u^\varepsilon &= 0, \theta^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma = \partial\Omega, \\ \varepsilon^p h + [a(\nabla_x u^\varepsilon - \beta \theta^\varepsilon \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] &= -\varepsilon^p \partial_{x_1} (a_{in}(\partial_{x_1} u^\varepsilon - \beta_{in} \theta^\varepsilon)) \text{ на } \gamma^\varepsilon, \\ \varepsilon^p w + [(\lambda \nabla_x \theta^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}] &= -\varepsilon^p \partial_{x_1} (\lambda_{in} \partial_{x_1} \theta^\varepsilon) \text{ на } \gamma^\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n} = (0, 1)$  и  $[...]$  – скачок на  $\gamma^\varepsilon$ .

Для процедуры гомогенизации применялись методы двухмасштабной сходимости, предложенные в работе [4]. Выяснилось, что семейство решений  $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$  сходится к решению  $(u^*, \theta^*)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате получена следующая усредненная модель, (рисунок 1 d)).

**Задача Н.** Найти предельные эффективные распределения смещений  $u^* = u^*(\mathbf{x})$  и температур  $\theta^* = \theta^*(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x \left( \mathbf{A}(\mathbf{x}) (\nabla_x u^*(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x}) \theta^*(\mathbf{x})) \right) &= \hat{f}(\mathbf{x}) + h(x_1), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ -\operatorname{div}_x \left( \mathbf{L}(\mathbf{x}) \nabla_x \theta^*(\mathbf{x}) \right) &= \hat{g}(\mathbf{x}) + w(x_1), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \theta^*|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u^*|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Здесь,  $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\hat{a} + a_{in}, (\hat{a}^{-1})^{-1})$  – это матрица эффективных модулей упругости,  $\mathbf{L} = \operatorname{diag}(\hat{\lambda} + \lambda_{in}, (\hat{\lambda}^{-1})^{-1})$  – матрица эффективных коэффициентов теплопроводности и  $b = \left( \frac{\hat{a}\hat{\beta} + a_{in}\beta_{in}}{\hat{a} + a_{in}}, \hat{\beta} \right)^T$  – вектор эффективных коэффициентов линейного теплового расширения.

**3. Численные расчеты.** В главе даны численные результаты для искомых функций смещения и температуры. Цель экспериментов – показать, что семейство решений задачи А сходится к решению задачи В при  $\delta \rightarrow 0$ , и семейство решений задачи В<sub>ε</sub> сходится к решению задачи Н при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В качестве вычислительной области для простоты возьмем прямоугольник. Сравнения результатов задач в виде отношения  $L_2$ -норм представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сходимость решений задач

$\delta$	$E_{L^2}(\theta)$	$E_{L^2}(u)$	$\varepsilon$	$\tilde{E}_{L^2}(\theta)$	$\tilde{E}_{L^2}(u)$
5e-2	0.8886	0.1449	2e-1	0.057	0.04
5e-3	0.0091	0.0152	4e-2	0.0025	0.0021
5e-4	0.0009	0.0015	2e-2	0.0006	0.0005

Результаты расчетов представлены на рисунке 2.

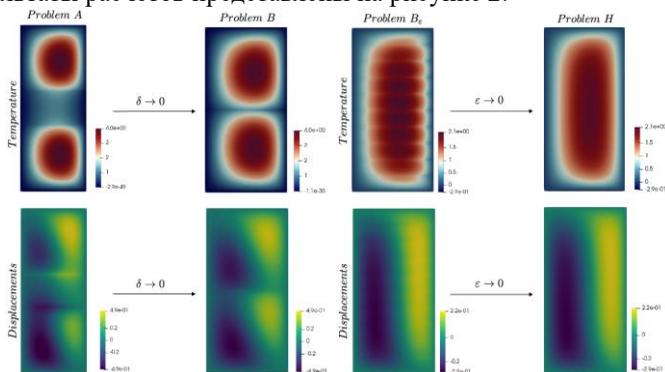


Рисунок 2 – Графики температуры и смещения для 4-х задач

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта "Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики" (2024-26) (гос. задание FZMW-2024-0003)*

## Библиографический список

1. Sazhenkov S.A., Fankina I.V., Furtsev A.I., Gilev P.V., Gorynin A.G., Gorynina O.G., Karnav V.M., Leonova E.I. Multiscale analysis of a model problem of a thermoelastic body with thin inclusions // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2021, – Vol. 18. – № 1. – P. 282-318.
2. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates // Int. J. Solids Struct. – 2020. – Vol. 202. – P. 562-574.
3. Rudoy E.M. Asymptotic modelling of bonding plates by a soft thin adhesive layer // Sib. Electron. Mat. Izv. – 2020. – Vol. 17. – P. 615-625.
4. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995) – Singapore, World Scientific Pub., 1996. – P. 15-25.

### Фазовый переход вода-лед в тающем снеге

Т.А. Пекарская<sup>1</sup>, А.Н. Сибин<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>ИГиЛ СО РАН, Новосибирск; <sup>3</sup>НГУ, Новосибирск

Статья посвящена исследованию фазового перехода вода–лед в верхних слоях снежного покрова и определению толщины снежного покрова при интенсивном протаивании.

**Ключевые слова:** фазовый переход, пористая среда, математическое моделирование, метод прогонки, снег.

Следуя работам [1 – 5] будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из воды ( $i = 1$ ), воздуха ( $i = 2$ ) и льда ( $i = 3$ ), составляющего твердый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \bar{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0; \quad (1)$$

$$\phi s_i (\bar{u}_i - \bar{u}_3) = -K_0 \frac{\bar{k}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \bar{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (2)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i c_i \bar{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) - L_i I_{23} - \nu I_{33}. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{u}_i$  – скорость  $i$ -й фазы;  $\rho_i$  – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью  $\rho_i^0$  и объемной концентрацией  $\alpha_i$  соотношением  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$  (условие  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$  является следствием определения  $\rho_i$ );  $I_{ji}$  – интенсивность перехода массы из  $j$ -й в  $i$ -ю составляющую в единице объема в единицу времени;  $\phi$  – пористость снега;  $s_1, s_2$  – насыщенности воды и воздуха ( $\alpha_1 = \phi s_1, \alpha_2 = \phi s_2, \alpha_3 = 1 - \phi, s_1 + s_2 = 1$ );  $K_0(\phi)$  – тензор проницаемости пористой

среды;  $\bar{k}_{0i}$  – фазовые проницаемости, обладающие свойствами  $\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \bar{k}_{0i} \Big|_{s_i=0} = 0$ ;  $\mu_i = const > 0$  – динамические вязкости;  $p_i$  – давления фаз;  $p_c$  – капиллярное давление,  $\vec{g}$  – вектор ускорения силы тяжести;  $\theta$  – температура среды ( $\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$ ),  $c_i = const > 0$  – удельная теплоемкость  $i$ -й фазы при постоянном объеме;  $\nu = const > 0$  – удельная теплота плавления льда;  $L_i = const > 0$  – удельная теплота сублимации льда;  $\lambda_c$  – теплопроводность снега ( $\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2, \rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i, a_c = const > 0, b_c = const > 0$ ).

Для фазового перехода используется зависимость

$$I_{31} = I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, \theta < \theta^-; \\ 0, \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2 (1 - \phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), \theta > \theta^+. \end{cases}$$

Здесь  $\theta^+$  – температура плавления льда,  $\theta^-$  – температура замерзания воды,  $\beta, \lambda_1, \lambda_2$  – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ( $[\beta] = 1/\text{K}, [\lambda_1] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K}), [\lambda_2] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ).

Система (1)–(3) дополняется гипотезами  $\vec{u}_3 = 0$  (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [6]),  $I_{12} = 0, I_{23} = 0$  (сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегаем),  $\rho_i^0 = const > 0, i = 1, 2, 3$ . Пусть  $s_1 \equiv s$  – водонасыщенность ( $1 - s = s_2$ ),  $\rho_3^0 < \rho_1^0, p_c = p_c(s)$ .

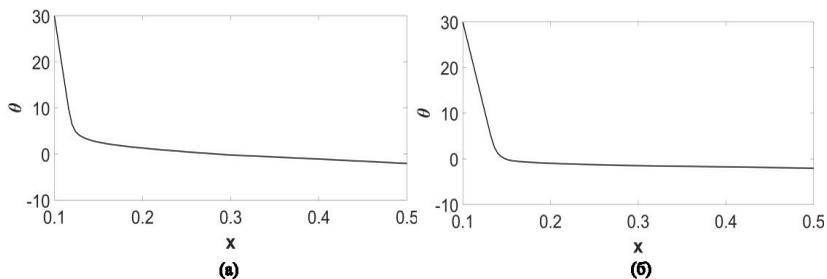


Рисунок 1 – Распределение температуры  $\theta$  вдоль оси  $x$ : при  $t=30$  мин (а), при  $t=80$  мин (б).

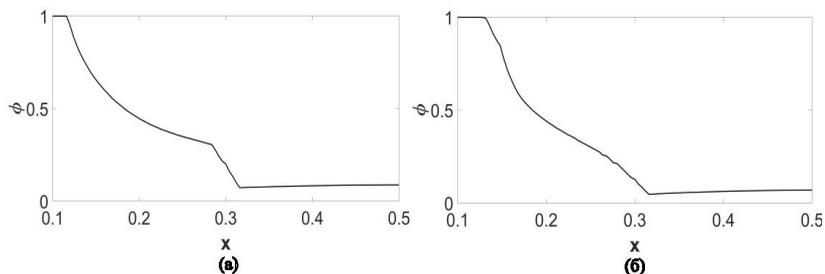


Рисунок 2 – Распределение пористости снега  $\varphi$  вдоль оси  $x$ : при  $t=30$  мин (а), при  $t=80$  мин (б).

На рисунке 1 приведено распределение температуры. Верхний слой снега интенсивно прогревается и пористость увеличивается в верхнем слое снега. На рисунке 2 показано распределение пористости  $\varphi$ . Заметим, что толщина снега уменьшается, так как пористость равна единице от  $x=0,1$  до  $x=0,14$  при  $t=80$  мин.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта "Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики" (2024-26) (гос. задание FZMW-2024-0003)

## Библиографический список

1. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // ПМТФ. – 2021. – Т 62, № 1. – С. 109 – 118.

2. Сибин А. Н., Папин А. А. Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге // ПМТФ. – 2024. – Т 65, № 1. – С. 58 – 69.
3. Wang Z., Zhang T., Shao M., et al. Investigation on snow-melting performance of asphalt mixtures incorporating with salt-storage aggregates // Construct. Build. Materials. 2017. V. 142. P. 187–198.
4. Alekseeva S. V., Sazhenkov S. A. Numerical analysis of a one-dimensional model of a meltingfreezing snowpack // J. Comput. Engng Math. 2021. V. 8, N 4. P. 17–27.
5. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. 2000. V.2000, N 31. P.47–57.
6. Кучмент Л. С. Формирование речного стока. Физико-математические модели / Л. С. Кучмент, В. Н. Демидов, Ю. Г. Мотовилов. М.: 1983.
7. Colbeck S.C. A theory of water percolation in snow // Journal Glaciol. 1972. V. 11. N. 63. P. 369–385.

**Влияние характеристик льда на распространение  
изгибно-гравитационных волн в ледовом покрове**

*Т.А. Сибирякова, К.А. Шишмарев,  
К.С. Серых, К.Е. Найденова  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию движения подводного тела в канале, покрытого неоднородным ледовым покровом. Его неоднородность заключается в учете таких эффектов, как пористость и переменная толщина. Движущееся подводное тело моделируется трехмерным диполем. Задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и разложения профиля колебаний льда поперек канала на нормальные моды колебаний упругой балки.

**Ключевые слова:** *ледовый покров, замороженный канал, пористая пластина, изменяющаяся толщина, диполь.*

В настоящее время активно исследуется вопрос о развитии волновых движений в жидкости при наличии тонкой упругой пластины, плавающей на ее поверхности. Хорошо изучены задачи, связанные с распространением изгибно-гравитационных волн в ледовых покровах, вызванных действием нестационарных внешних нагрузок на плавучую пластину. Для моделирования таких пластин обычно применяется модель Кирхгофа-Лява, учитывающая только их изгибную жесткость и инерцию. Прямолинейное движение внешней нагрузки в стационарном и нестационарном случаях было подробно изучено для таких моделей (см. [1, 2]). Еще одним важным классом задач является изучение взаимодействия льда с погруженными в жидкость телами. Воздействие погруженных тел на ледяной покров и его влияние на поток жидкости вблизи тела были рассмотрены в работах [3, 4]. При исследовании таких моделей важным параметром является толщина ледяного покрова. Во многих исследованиях рассматриваются случаи равномерного льда с постоянной толщиной, однако в естественных условиях ледовый покров неоднороден, поэтому важно исследовать модели с переменной толщиной льда [5, 6]. Также активно изучается класс задач с неоднородным ледовым покровом, где неоднородность связана с учетом пористости. Пористые структуры часто используются для поглощения энергии

гравитационных волн, например, в волнорезах. Обычно применяются одиночные или множественные пористые пластины - горизонтальные, вертикальные или наклонные. Основным преимуществом горизонтальных пластин является их слабое взаимодействие с горизонтальными потоками жидкости [7].

В настоящей работе исследуются колебания пористого ледового покрова под воздействием движущегося подводного тела в прямоугольном канале. Канал имеет ширину  $2b$  и глубину  $H$ , длина канала не ограничена. Лед моделируется как тонкая пористая пластина, примороженная к стенкам канала, а давление жидкости на границе лед-жидкость определяется линеаризованным интегралом Коши-Лагранжа. Жидкость может проникать через поверхность ледовой пластины, пропорционально давлению на её нижней поверхности, согласно закону Дарси. Модель учитывает гидростатическое давление в пористой структуре льда.

Движение подводного тела моделируется трехмерным диполем, помещенным под ледовый покров. Рассматривается движение диполя, размеры которого значительно меньше размеров канала ( $R \ll b$ ), вдоль центральной линии канала со скоростью  $U$  и с центром в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Для определения формы подводного объекта в канале вычисляется потенциал диполя  $\varphi^D(x, y, z, t)$  с использованием метода зеркальных отображений. Сначала строится потенциал  $\varphi^{D1}$  с учетом отражений от вертикальных стенок канала, удовлетворяющий граничным условиям  $y = \pm b$ . Затем строятся отражения потенциала  $\varphi^{D1}$  от плоскостей  $z = 0$  и  $z = -H$  для удовлетворения соответствующих граничных условий. Полученный потенциал соответствует движущемуся подводному объекту, моделирующего маленькую жесткую сферу.

Жидкость в канале рассматривается как несжимаемая и невязкая, а течение, вызванное отклонением ледового покрова из положения равновесия, считается потенциальным. Суммарный потенциал течения жидкости  $\varphi = \varphi^E + \varphi^D$  удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на стенках и дне канала, а также линеаризованному кинематическому условию на границе раздела лед-жидкость. Здесь  $\varphi^E$  - поправочный потенциал, обусловленный отклонением ледового покрова.

В работе рассматривается случай симметричного линейного изменения толщины ледового покрова поперек канала, при котором толщина льда остается неизменной вдоль канала. Наибольшее значение толщины льда достигается на стенках канала ( $h_1$ ), а наименьшее - вдоль его центральной линии ( $h_0$ ). Это изменение

толщины льда характеризуется основными параметрами: средним значением толщины ( $h_z$ ) и безразмерным коэффициентом наклона ( $\alpha$ ), который описывает линейное изменение толщины льда. Таким образом, функция  $h_i(y)$ , описывающая толщину льда, может быть записана следующим образом:

$$h_i(y) = h_0(1 + \alpha|y/b|), \quad h_i(\pm b) = h_1, \quad h_1 = 2h_z \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha}, \quad h_0 = \frac{h_1}{1 + \alpha}.$$

Решение задачи будем искать в безразмерных переменных  $x = \tilde{x}b, y = \tilde{y}b, z = \tilde{z}b, t = \tilde{t}b$ . Рассматривается случай, когда тело движется достаточно долго с постоянной скоростью, чтобы считать, что прогибы льда в движущейся системе приняли установившийся вид  $w(x, y, t) = w_{sc} \tilde{w}(X, \tilde{y}), \varphi^E(x, y, t) = \varphi_{sc}^E \tilde{\varphi}^E(X, \tilde{y}, \tilde{z}), \varphi^D(x, y, t) = \varphi_{sc}^D \tilde{\varphi}^D(X, \tilde{y}, \tilde{z}), X = \tilde{x} - \tilde{t}$ . Здесь  $w_{sc}, \varphi_{sc}^E, \varphi_{sc}^D$  соответствующие масштабы. В безразмерных переменных задача записывается в следующем виде

$$mh^2 h_*(y) Fr^2 w_{xx} + \beta [h_*^3(y) \Delta^2 w + 6h_*'(y) h_*^2(y) (w_{yyy} + w_{yxx}) + 6(h_*'(y))^2 h_*(y) (w_{yy} + \nu w_{xx})] + w = h Fr^2 \varphi_x^E + \varphi_x^D, \\ w = w_y = 0 \quad (y = \pm 1),$$

$$\Delta \varphi^E = 0, \quad \varphi_y^E = 0 \quad (y = \pm 1), \quad \varphi_z^E = 0 \quad (z = -h), \\ \varphi_z^E = -w_x + \delta (h Fr^2 \varphi_x^E + \varphi_x^D - w) \quad (z = 0),$$

$$\varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0) = -\frac{X}{2} [r^{-3}(y_0, z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^{-3}(y_0 + 4n, z_0) + \\ + r^{-3}((4n - 2) - y_0, z_0) + r^{-3}(y_0 - 4n, z_0) + \\ + r^{-3}(-(4n - 2) - y_0, z_0))],$$

$$\varphi^D(X, y, z) = \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0 + 2mh) + \\ + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, -z_0 - 2mh) + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, z_0 - 2mh) + \\ + \varphi^{D1}(X, y, y_0, z, -z_0 + (2m - 2)h)),$$

где  $\varphi_{sc}^E = U w_{sc}, w_{sc} = H Fr^2 a^3, h_*$  – безразмерная толщина ледового покрова и

$$m = \frac{h_z \rho_i}{H \rho_l}, \quad h = \frac{H}{b}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad \beta = \frac{D_*}{b^4 \rho_l g}, \quad a = \frac{R}{b}, \quad \delta = \frac{\sigma \rho_l g b}{U}.$$

Здесь  $w(x, y, t)$  – прогиб ледового покрова,  $m$  – отношение масс,  $h$  – соотношение сторон,  $Fr$  – число Фруда,  $\beta$  – безразмерная жесткость пластины,  $a$  – отношение радиуса диполя и ширины канала,  $\delta$  – безразмерный параметр пористости. Параметры, входящие в безразмерные коэффициенты:  $M = \rho_l h_0$  – масса льда на единицу

площади,  $\rho_i$  – плотность льда,  $p(x, y, 0, t)$  – гидродинамическое давление,  $D = D_* h_i^3(y)$  – изгибная жесткость,  $D_* = (E h_0^3) / 12(1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $K$  – коэффициент проницаемости,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Поведение прогибов льда зависит от безразмерных параметров задачи, особенно от коэффициента проницаемости  $K$  и значения безразмерного коэффициента наклона  $\alpha$ . Все размерные значения угла наклона  $\ll 1$ , поэтому линейная модель остается корректной. Задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и введения нормальных мод колебаний упругой балки. Основная цель данного исследования, придерживаясь линейной модели, состоит в определении прогибов льда и областей в ледовой пластине с максимальными деформациями.

Функции образов Фурье прогиба пластины  $w^F$  и образа Фурье потенциала течения жидкости  $(\varphi^E)^F$  находятся аналитически. Исходные функции получены в виде интегралов обратного преобразования Фурье, которые вычисляются численно методом трапеций. Были рассмотрены разные случаи комбинаций параметров пористости и угла наклона. Получено, что пористость льда и переменная толщина значительно влияют на распределение прогибов и деформаций в ледовом покрове в канале при движении подводного тела. Увеличение параметра пористости ледового покрова приводит к затуханию колебаний в отдалении от движущегося подводного тела. С увеличением угла наклона толщина ледового покрова уменьшается в центре канала, что приводит к значительному увеличению прогибов и деформаций вдоль центральной линии и уменьшению их у стенок канала.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01096, <https://rscf.ru/project/23-71-01096/>.*

## Библиографический список

1. Wigley W.C.S. Water Forces on Submerged Bodies in Motion. Transactions. Institute of Naval Architects, 1953, V. 95. P. 268-279.
2. Doctors L., Beck R. Convergence Properties of the Neumann-Kelvin Problem for a Submerged Body // J. Ship Res., 1987. V. 31, N. 4. P. 227-234.

3. Crook T. P. An Initial Assessment of Free Surface Effects on Submerged Bodies. MSc Mechanical Engineering, Naval Postgraduate College. 1994. USA

4. Nugroho, W.S.; Wang, K.; Hosking, R.J.; Milinazzo, F. Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, V. 381. P. 337–355.

5. Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова. Ленинград: Гидрометеоиздат; 1967, 215 с.

6. Stepanyants, Y.A., Sturova, I.V. Waves on a compressed floating ice caused by motion of a dipole in water. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, V. 907. P. A7.

7. Shishmarev, K., Zavyalova, K., Batyaev, E., Khabakhpasheva, T. Hydroelastic waves in a frozen channel with non-uniform thickness of ice. *Water*, 2022, V. 14. No. 3.

**Решение задачи о разрушении вязкоупругой  
полубесконечной ледовой пластины**

*Т.А. Сибирякова, К.Е. Найденова,  
К.А. Шимарев, П.В. Борисов  
АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается задача о колебаниях полубесконечной вязкоупругой пластины. Вязкость льда моделируется с использованием модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала. Колебания вызваны осцилляциями внешней нагрузки, расположенной на свободной поверхности вблизи края пластины. На другом краю свободной поверхности находится непроницаемая стенка. Для решения задачи используется подход, разделяющий ее на две подзадачи: нахождение потенциалов скорости течения жидкости под пластиной и под свободной поверхностью. Потенциал под пластиной определяется путем разложения на вертикальные моды. Для использования вертикальных мод необходимо вычислять волновые числа дисперсионного соотношения с учетом вязкости. Под свободной поверхностью потенциал определяется с помощью метода разделения переменных.

**Ключевые слова:** *ледовая пластина, гидроупругие волны, вязкость, вертикальные моды, внешняя нагрузка.*

В последние годы активно изучаются задачи волнового движения в жидкости с тонкой упругой пластиной, плавающей на ее поверхности. Особое внимание уделяется воздействию внешних нагрузок на ледовые покровы и распространению гравитационных волн в этой среде [1, 2]. Моделирование таких задач имеет широкие применения, особенно в исследованиях взаимодействия ледовых покровов с прибрежными сооружениями, такими как причалы, мостовые опоры, нефтяные платформы и другие. В последние годы были рассмотрены различные сценарии взаимодействия нагрузок с ледовыми покровами, включая их движение в каналах, у края ледового покрова, между двумя покровами и вдоль жидкой поверхности вдоль края льда [3, 4].

В данной статье исследуются колебания полубесконечной пластины, возникающие из-за осцилляций внешней нагрузки, размещенной на свободной поверхности рядом с пластиной.

Уникальностью работы является учет вертикальной стенки на противоположном краю свободной поверхности, а также учет вязкости ледовой пластины для угасания колебаний в данном контексте.

В данной задаче исследуется колебание вязкоупругой полубесконечной пластины, начиная с области  $x \geq L_0$ , под воздействием периодических осцилляций внешней нагрузки, находящейся на свободной поверхности рядом с пластиной. Свободная поверхность находится в области  $0 < x < L_0$ , причем на левой границе этой области находится непроницаемая стенка. Начальное положение свободной поверхности и пластины соответствует  $z = 0$ , а дно водоема находится на глубине  $z = -H$ . Внешняя нагрузка моделируется гладким локализованным пятном давления, расположенным на свободной поверхности и не соприкасающимся с пластиной. Амплитуда внешней нагрузки изменяется с заданной частотой  $\omega$ . В рамках задачи используется линейная теория гидроупругости. Ледовая пластина моделируется как тонкая упругая пластина с использованием модели Кирхгофа-Лява. Вязкость пластины учитывается через временной запаздывание с использованием модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала. Жидкость в рассматриваемом водоеме считается невязкой и несжимаемой. Течение, вызванное колебаниями внешней нагрузки и пластины, рассматривается как потенциальное. Ледовая пластина удовлетворяет условиям свободного края на границе свободная поверхность/пластина.

Рассматривается периодическое по времени решение задачи  $w(x, t) = \text{Re}[W(x)e^{-i\omega t}]$ ,  $\varphi(x, z, t) = \text{Re}[-i\omega\phi(x, z)e^{-i\omega t}]$ ,  $P(x, t) = \text{Re}[P_0P_1(x)e^{-i\omega t}]$ . Задача решается в безразмерных переменных, где за масштаб длины выбрано  $L_0$ , масштаб прогибов льда  $w_{sc}$  равен масштабу длины, масштаб потенциала скорости течения  $\phi_{sc} = L_0^2\omega$ . В безразмерных переменных система уравнений примет вид

$$-W + \gamma\phi = q P_1(x) \quad (0 < x < 1, z = 0), \quad (1)$$

$$-\delta\gamma W + \beta(1 - i\varepsilon)W_{xxxx} + W = \gamma\phi \quad (x \geq 1, z = 0), \quad (2)$$

$$W_{xx} = W_{xxx} = 0 \quad (x = 1), \quad (3)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (x > 0, -H < z < 0), \quad (4)$$

$$W = \phi_z \quad (x > 0, z = 0), \quad (5)$$

$$\phi_z = 0 \quad (z = -h), \quad \phi_x = 0 \quad (x = 0), \quad (6)$$

где  $w(x)$  – функция, описывающее вертикальное перемещение (прогибы льда) ледовой пластины ( $x \geq 1$ ),  $\phi(x, z)$  – потенциал скорости течения жидкости,  $P_1(x)$  – безразмерная функция, описывающая форму внешней нагрузки,  $\gamma = \omega^2 L_0 / g$  – безразмерная

частота,  $\beta = D/(\rho_l g L_0^4)$  – безразмерная жесткость,  $\delta = M/(L_0 \rho_l)$  – отношение масс,  $h = H/L_0$  – безразмерная глубина,  $\varepsilon = \tau \omega$  – безразмерное время запаздывания,  $q = P_0/(\rho_l g L_0)$ ,  $M$  – масса льда,  $D$  – изгибная жесткость,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\tau$  – время запаздывания. Решение задачи зависит от указанных безразмерных параметров и формы внешней нагрузки  $P_1(x)$ . Неизвестными функциями являются потенциал  $\phi$  и прогибы льда  $w$ .

Строить решение задачи (1) – (6) будем отдельно в областях I ( $0 < x < 1$ ) и II ( $x \geq 1$ ). Для решения задачи в области II применяется метод вертикальных мод [5]. В этом методе потенциал течения жидкости ищется в виде разложения на вертикальные моды, которые не ортогональны в классическом смысле, см. [5]. Для их определения необходимо вычислить волновые числа, которые являются собственными значениями мод. Они находятся из соответствующего дисперсионного соотношения и представляют собой два действительных значения  $\pm k_0$ , 2 комплексных корня с симметричной действительной частью  $k_{-1} = s_1 + id_1$ ,  $k_{-2} = -s_1 + id_1$ , а также счетное число чисто мнимых корней  $k_n = ik_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Решение для потенциала в области I имеет вид

$$\phi = \frac{A_0}{2} + \phi_1 + \phi_2,$$

где потенциалы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  удовлетворяют уравнению Лапласа в области течения и краевым условиям

$$\begin{aligned} \phi_{1,x} &= 0 \quad (x = 0), & \phi_{1,x} &= 0 \quad (x = 1), \\ \phi_{1,z} &= W \quad (z = 0, 0 < x < 1), & \phi_{1,z} &= 0 \quad (z = 0), \\ \phi_{2,x} &= 0 \quad (x = 0), & [\phi_{2,x}] &= 0 \quad (x = 1), \\ \phi_{2,z} &= 0 \quad (z = 0, 0 < x < 1), & \phi_{2,z} &= 0 \quad (z = 0), \end{aligned}$$

где условие с квадратными скобками означает непрерывность нормальной производной.

Полученные решения для потенциалов подставляются в уравнения (1) – (2) для соответствующих областей. Домножая переписанное уравнение (1) на  $\cos(\pi j x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  и интегрируя его по  $x$ , получаем систему из  $N + 1$  уравнений. Для уравнения (2) получаем систему из  $N$  уравнений после домножения его на  $\cos(\pi j z)$ ,  $j = 1, \dots, N$  и интегрирования по  $z$ . Дополнительно суммарный потенциал  $\phi(x, z)$  должен удовлетворять условию непрерывности на границе  $x = 1$ . Домножая соответствующее уравнение на  $\cos(\pi j z)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  и интегрируя результат по  $z$  получаем систему из  $N + 1$  уравнений. Таким образом, имеем систему  $3N + 2$  уравнений для поиска  $3N + 4$  неизвестных. Последние два уравнения получаем из краевых условий

для свободного края (3). Полученную систему переписываем в матричной форме и решаем соответствующим образом.

Таким образом предложен метод решения рассматриваемой задачи в периодической форме. Исходная задача разбивается на две подзадачи для поиска потенциала течения жидкости под пластиной и под свободной поверхностью. Задача сводится к решению матричной задачи, состоящей из  $3N + 4$  уравнений. Далее будет рассмотрен случай добавления отколовшейся пластины, имеющей конечную длину, что увеличивает количество уравнений в итоговой матричной задаче. Добавление последующих отколовшихся пластин увеличивает количество уравнений на  $2N + 6$ .

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01096, <https://rscf.ru/project/23-71-01096/>.*

### **Библиографический список**

1. Nugroho, W.S., Wang, K., Hosking, R.J., Milinazzo, F. Time-Dependent Response of a Floating Flexible Plate to an Impulsively Started Steadily Moving Load // Journal of Fluid Mechanics. 1999. Vol. 381. P. 337–355.
2. Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова. Гидрометеиздат: Ленинград, 1967. 215 с.
3. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24. № 2. С. 111-128. DOI:10.25743/ICT.2019.24.2.010
4. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского государственного университета. 2015. Т. 85. № 1-1. С. 126-131.
5. Korobkin A., Malenica S., Khabakhpasheva T. The Vertical Mode Method in the Problems of Flexural-Gravity Waves Diffracted by a Vertical Cylinder // Applied Ocean Research. 2019. Vol. 84. P. 111-121.

## Напряженно-деформированное состояние упругой области с эллиптическим отверстием

*А.В. Устюжанова, Г.В. Кравченко*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния упругой области в рамках плоской деформации вокруг эллиптического отверстия. Приведены результаты численных расчетов, полученные на основе метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** *напряженно-деформированное состояние, упругая область, метод конечных элементов.*

В результате природных явлений или при проведении строительных работ в массивах горных пород, грунтах, сыпучих средах могут появиться пустоты, приводящие к обрушениям. В связи с этим является актуальным исследование напряженно-деформированного состояния материала в окрестности отверстий [1-4].

Рассмотрим математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругого материала вблизи отверстия в рамках плоской деформации. Исследуемая плоская область имеет прямоугольную форму со сторонами, расположенными вдоль осей координат  $x_1$ ,  $x_2$ , и содержит эллиптическое отверстие. Требуется определить поля перемещений  $u_i$  ( $i=1, 2$ ) и напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ), которые при отсутствии массовых сил удовлетворяют уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0.$$

Вне отверстий поведение упругого материала описывается законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm}),$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости; по  $m$  проводится суммирование от 1 до 2. Компоненты тензора деформаций

$\varepsilon_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) записываются через перемещения  $u_i$  ( $i=1, 2$ ) с помощью соотношений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j=1, 2.$$

При реализации алгоритма численного решения поставленной задачи все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве характерного линейного размера выбирается горизонтальный размер прямоугольной области. Вертикальный размер области и полуоси эллиптического отверстия, отнесенные к горизонтальному размеру, равны соответственно  $H$  и  $a_1, a_2$ .

На внешней границе исследуемой области, то есть на сторонах прямоугольника, рассматриваются граничные условия для перемещений, обеспечивающие сжатие области:

$$\begin{aligned} u_1(0, x_2) &= \tilde{u}_1, \quad u_1(1, x_2) = -\tilde{u}_1, \\ u_2(x_1, 0) &= 0, \quad u_2(x_1, H) = -\tilde{u}_2, \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}_1 > 0$ ,  $\tilde{u}_2 > 0$ . Граница отверстия считается свободным от напряжений:

$$\sigma_n = 0, \quad \sigma_\tau = 0,$$

где  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  – нормальная и касательная составляющие векторов напряжений.

Численное решение построено на основе метода конечных элементов [5]. Расчетная область разбивается на треугольные конечные элементы. С учетом отверстия полученная сетка корректируется. На границах области задаются условия для перемещений. Применение метода конечных элементов к данной задаче сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений  $KU = F$ , где  $K$  – глобальная матрица жесткости,  $U$  – вектор искомых узловых перемещений, а вектор правых частей  $F$  строится на основе известных данных. После определения узловых перемещений вычисляются деформации и напряжения в каждом конечном элементе.

На рисунке 1 представлены изолинии максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

При расчетах параметры задачи были следующими:  $\nu = 0.3$ ,  $H = 0.95$ ,  $\tilde{u}_1 = 0.001$ ,  $\tilde{u}_2 = 0.01$ ,  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.07$ .

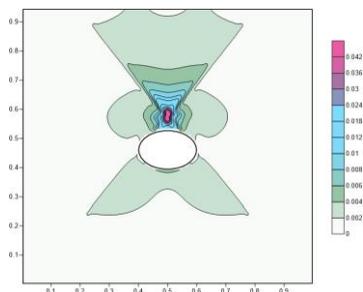


Рисунок 1 – Изолинии  $\tau_{\max}$

Построенный алгоритм численного решения позволяет получать результаты в зависимости от граничных условий, а также для разных форм отверстий и их взаимного расположения.

### Библиографический список

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 352 с.
2. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. – 2002. – № 2. – С. 18–26.
3. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. О математическом моделировании сдвиговых трещин вблизи отверстий // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2010. – №1/2 (65). – С. 20–23.
4. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В. Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии: препринт ИПМех РАН. – 2005. – № 778.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 393 с.

## СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА

УДК 519.8

### Агрегативные игры олигополии при линейных функциях спроса и издержек агентов

*Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена проблеме сходимости к равновесию динамики принятия коллективных решений в условиях неполного знания и ограниченной рациональности на рынке олигополии

**Ключевые слова:** *агрегативная игра, модель коллективного поведения, сходимость, равновесие.*

В теории игр под *агрегативной* понимается некооперативная игра с  $n$  игроками (рациональными агентами), если для каждого игрока  $i$  ( $i \in N = \{1, \dots, n\}$ ) его функция выигрыша (целевая функция агента) зависит от собственной стратегии  $s_i$  и совокупности стратегий всех игроков [1].

Игра фирм на рынке олигополии рассматривается как одна из важнейших проблем теории игр [2]. Классические модели олигополии относятся к агрегативным играм, поскольку целевые функции агентов имеют вид  $f_i(s) = s_i p(\sum_{j \in N} s_j) - \varphi_i(s_i)$ , а совокупность представляет сумму стратегий всех агентов  $\sum_{j \in N} s_j$  (здесь  $p$  и  $\varphi_i$ , соответственно, обратная функция спроса и функция затрат агента) [3–5].

Ввиду неполной информированности агентов, взаимообусловленности поведения агентов и конкурентной среды, решение игры олигополии (если оно существует), как правило, не может быть найдено как результат однократного выбора агентов, а представляет собой исход итерационного процесса принятия агентами своих стратегий [6–8].

В достаточно общем виде такой процесс в дискретном времени можно определить как адаптивные процедуры  $s_i^{t+1} = g_i(s_i^t, \sum_{j \in N} s_j^t, \gamma_i^{t+1})$ . Здесь  $t = 0, 1, 2, \dots$  и  $\gamma_i^{t+1}$ , соответственно, номер такта (периода времени) и параметр, выражающий

предпочтение  $i$ -го агента на множестве своих стратегий в  $(t+1)$ -м такте).

Настоящая работа посвящена решению игры олигополии. В исследованиях авторов этой проблемы приняты следующие основные предположения:

- обратная функция спроса  $p$  и функции затрат  $\varphi_i$  агентов линейны;

- каждый процесс  $g_i$  представляет собой *модель индикаторного коллективного поведения*  $s_i^{t+1} = s_i^t + \gamma_i^{t+1}(\hat{s}_i^t - s_i^t)$  (здесь:  $\hat{s}_i^t$  – положение цели  $i$ -го агента в  $t$ -м такте – это стратегия, которая обеспечивает  $i$ -му агенту максимальное значение его целевой функции в  $t$ -м такте;  $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$  – параметр, независимо выбираемый каждым агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая  $\gamma_i^{t+1} = 1$ , тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая  $\gamma_i^{t+1} = 0$ , или делать «неполный шаг», если  $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1)$  [10]. Решения игры (равновесия), как правило, являются и равновесиями моделей коллективного поведения [6, 7, 10];

- агенты рефлексируют (предсказывают выбор конкурентов) по Курно или Штакельбергу. Аналитическое выражение положения цели  $\hat{s}_i^t$  для каждого такого агента зависит от  $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} s_j$  (т. е. также от его собственной стратегии  $s_i$  и совокупности стратегий  $\sum_{j \in N} s_j$ , поскольку  $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} s_j = \sum_{j \in N} s_j - 2s_i$ ) [7].

В рамках этих предположений авторами получены условия существования равновесия, его единственности и сходимости к нему траекторий агентов. С учетом агрегативных свойств модели показано также, что проблема сходимости динамики коллективного поведения для каждого из агентов эквивалентна проблеме сходимости другой динамики для суммы стратегий агентов.

## Библиографический список

1. Selten R. Preispolitik der Mehrproduktenunternehmung in der statischen Theorie. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 198 p.
2. Гераськин М.И. Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 6. – С. 3–25.
3. Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D. Aggregative games and oligopoly theory: shortrun and long-run analysis // The RAND Journal of Economics. – 2020. – V. 51. – No. 2. – P. 470–495.
4. Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L. Expectational Stability in Aggregative Games // Journal of Evolutionary Economics. – 2021. – V. 31. No. 1. – P. 235–249.
5. Алгазин Г.И. Централизация и децентрализация в базовых игровых моделях организационных систем // Управление большими системами: сборник трудов. – 2012. – № 36. – С. 144–172.
6. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. – Leiden: CRC Press, 2014. – 298 p.
7. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке // Управление большими системами: сборник трудов. – 2016. – № 64. – С. 112–136.
7. Шведов А.С. Олигополия Курно: выбор стратегий при неопределенности и другие вопросы // Проблемы управления. – 2023. – № 5. – С. 23–39.
8. Цуриков В.И., Скаржинская Е.М. Сравнение равновесий Нэша и Штакельберга в модели коллективных действий // Теоретическая экономика. – 2024. – № 1 (109). – С. 75–86.
9. Алгазина Д.Г., Алгазин Г.И. Моделирование взаимосвязи прибыли франчайзера и развития франчайзинговой системы на конкурентном рынке // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – № 2-1 (70). – С. 261–264.
10. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977. – 248 с.

## Кластеризация как метод исследования опорного каркаса хозяйства сельских территорий Алтайского Края

*А.К. Волкова, Н.М. Почёмин  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию возможностей обеспечения устойчивого развития сельских территорий региона за счёт оптимизации пространственной структуры его хозяйственной деятельности. Авторами предложены каркасный подход для анализа структуры опорного каркаса хозяйства, геоинформационный метод и метод кластеризации для создания соответствующих ГИС-моделей.

**Ключевые слова:** *опорный каркас хозяйства, сельские территории, кластеризация предприятий.*

Развитие сельских территорий имеет важное значение для региональной экономики и является одним из гарантов обеспечения продовольственной безопасности. Почти половина (41,1 %) населения Алтайского края проживает в сельских поселениях [1], потому вопрос формирования пространственной структуры хозяйства сельских территорий является актуальным.

Под опорным каркасом хозяйства подразумевается пространственная линейно-узловая структура экономических элементов территории, связанных сетями транспортной и инженерной инфраструктуры [2, 3]. Основная единица каркаса сельских территорий – предприятие как территориально целостный, экономически самостоятельный объект с технологически завершённым производством [4].

Оценка степени развития хозяйства неразрывно связана с использованием математического аппарата и ГИС-технологий [5]. В отечественной социально-экономической географии уже проводились работы, связанные с оценкой хозяйственной деятельности [6] и исследованием развития элементов опорного каркаса сельских территорий [7], но для территории Алтайского края подобных расчётов не проводилось.

С математической точки зрения, выделение опорного каркаса, – это процесс кластеризации по ряду признаков и расстоянию. Эти два подхода реализованы средствами ГИС, в частности, специальными

модулями QGis – Cluster analysis и DoCluster на основании информации, представленной в базе данных «Предприятия сельского хозяйства Алтайского края» [8]. В соответствии с данными об основном роде деятельности объектов хозяйства [9], из 2081 действующих в регионе сельскохозяйственных предприятий 1681 связано с растениеводческой деятельностью.

При проведении кластеризации в качестве исходных данных использована выборка среди сельскохозяйственных предприятий по направлениям: выращивание технических культур, зерноводство, растениеводство прочее, смешанное сельское хозяйство и др. Для каждого из обработанных объектов представлена такая информация, как: название, фактический и юридический адрес, дата основания, уставной капитал, численность сотрудников, основной вид деятельности, класс предприятия, связанное предприятие, сведения о доходах и о расходах за 2019 г.

Предобработка информации проводилась через создание числового словаря видов деятельности и классов предприятий, так как нечисловые значения при кластеризации невозможно учесть иначе. Наиболее информативными пунктами выборки определены параметры, помогающие определить условную «успешность» предприятия: дата основания (чем дольше существует, тем стабильнее), численность сотрудников (претензия на роль градообразующего), класс предприятия (роль в производственной цепочке), доходы (основной показатель успешности). Расчёт доли чистой прибыли как частного от доходов и расходов не представляется возможным, поскольку не по всем предприятиям известны оба эти показателя. Для запуска алгоритма кластеризации неизвестные значения приравнивались к 0. Всего записей с информацией о связи с другими предприятиями 159, записей о доходах и расходах – 389, информации о численности сотрудников – 536.

После выбора исходных данных была произведена процедура кластеризации с использованием модуля Cluster analysis в QGis. Основная часть плагина выполняет кластеризацию выбранного векторного слоя предприятий и добавляет к нему метки кластеров. Алгоритмами кластеризации являются агломеративные иерархические или K-средние, используемые для больших наборов данных. При этом данные дополнительно не масштабировались с помощью стандартизации или нормализации для сохранения лёгкости интерпретируемости показателей.

Внутри кластера и между кластерными суммами квадратов построены диаграммы WCSS (Within-Cluster Sum of Squares) [10] и

BSS (Bayesian Information Criterion) [11], используемые для оценки качества кластеризации и определения оптимального количества кластеров. Затем была построена дендрограмма расстояния между кластерами, в результате визуального анализа которой по стандартизированной информации с географическими координатами предприятий и упомянутым показателям, было определено предпочтительное число классов [12]. Таким образом для кластеризации организаций по факторам «успешности» на основании метрик WSS и BSS создана выборка предприятий на 11 кластеров. По результатам иерархической модели, кластеры разбились на уникальные с приведением количества организаций к оптимальным (рисунок 1).

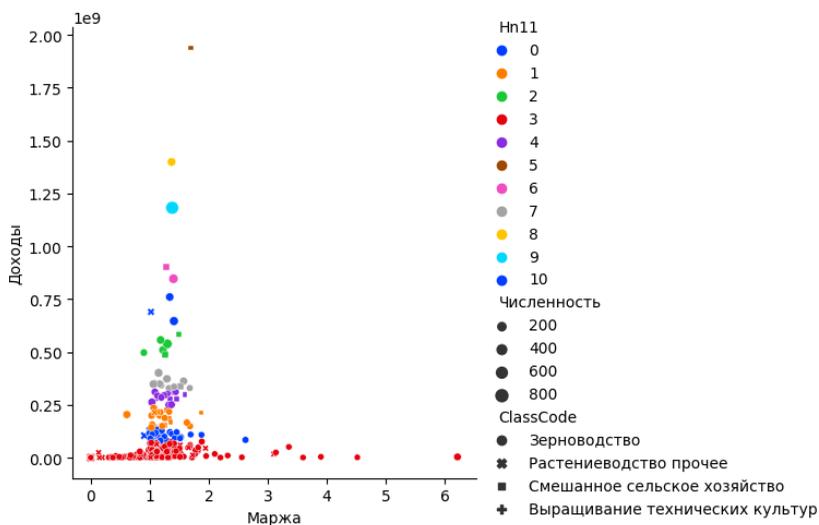


Рисунок 1 – Соотношение показателей в кластерах иерархической структуры

На основании имеющихся данных (те же вышеназванные показатели) был произведён блок операций в модуле ClusterPoints с помощью инструмента DoCluster на базе усовершенствованного алгоритма иерархической кластеризации полносвязной по методу Ланса-Уильямса [13].

При выбранных параметрах процентного расстояния между факторами в 15%, и проценте объединения и процентного вклада

полей в 50% получена агрогруппировка действующих предприятий сельских территорий Алтайского края по расстоянию между точками (рисунок 2).

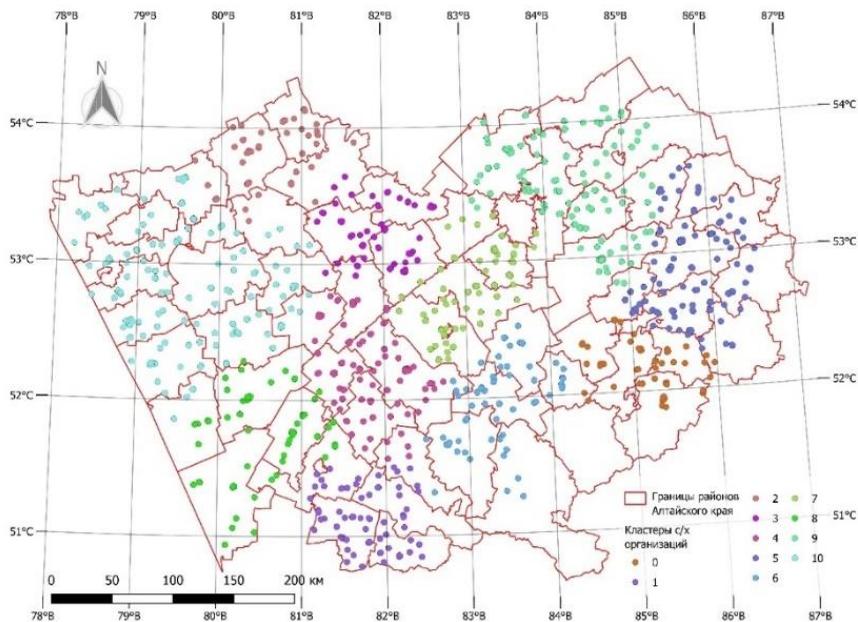


Рисунок 2 – Пространственная кластеризация предприятий иерархическим методом с использованием инструмента ClusterPoints

Дальнейшая работа по изучению сельскохозяйственных предприятий региона неразрывно связана с оцифровкой информации об агроклиматических показателях, типах растительности и состоянии почв, которые, в совокупности с уже имеющимися данными, могут быть использованы как дополнительные показатели продуктивности предприятий.

Результаты проведённой оценки степени развития хозяйства сельских территорий могут быть использованы при оптимизации способов и цепочек производства в сельских территориях, а также для разработки стратегий социально-экономического развития муниципальных образований и планов их реализации в Алтайском крае.

*Исследование выполнено в рамках реализации Программы развития университета на 2021-2030 годы в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030», проект «Разработка геоинформационного сервиса для поддержания устойчивой структуры землепользования»*

## **Библиографический список**

1. Управление Федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю и Республике Алтай [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://akstat.gks.ru/folder/32996> – Заглавие с экрана.
2. Лаппо, Г.М. Концепция опорного каркаса территориальной структуры народного хозяйства: развитие, теоретическое и практическое значение / Г.М. Лаппо // Известия АН СССР, сер. географическая. – 1983. – №5. – С. 16-28.
3. Проскуряков, В.И. Опорный каркас территориальной структуры обрабатывающей промышленности // Социально-экономическая география: понятия и термины. Словарь-справочник; под ред. А.П. Горкина. Смоленск: Ойкумена, 2013. – С. 167-168.
4. Алаев, Э.Б. Социально-экономическая география. Понятийно-терминологический словарь / Э.Б. Алаев. – М.: Мысль, 1983. – 290 с.
5. Пузаченко, Ю.Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях: учеб. пособие для студ. Вузов / Ю.Г. Пузаченко. М.: Издательский центр Академия, 2004. – 416 с.
6. Аврамчикова, Н.Т. Теоретические аспекты оценки качества экономического пространства / Н.Т. Аврамчикова // Региональная экономика: теория и практика. – 2002. – № 35. – С. 2-13.
7. Нефедова, Т.Г. Сельская Россия на перепутье: Географические очерки / Т.Г. Нефедова. – М.: Новое издательство, 2003. – 408 с.: ил.
8. Предприятия сельского хозяйства Алтайского края: свидетельство о государственной регистрации базы данных RU № 2022623015 от. 22.11.2022 / Е.П. Крупочкин, А.К. Волкова, А.Н. Дунец; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный университет».
9. Общероссийский классификатор видов экономической деятельности [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.regfile.ru/okved2.html> – Заглавие с экрана.
10. Тараторин Н.С., Прокудина Е.И. Быстрое автоматизированное определение субоптимальной кластеризации на основе метрики WCSS

и алгоритма UIK / Н.С. Тараторин, Е.И. Прокудина // Научный аспект. – 2023. – Т. 19. – № 6. – С. 2496-2506.

11. Яцкив И., Гусарова Л. Методы определения количества кластеров при классификации без обучения / И. Яцкив, Л. Гусарова // Transport and Telecommunication. – 2003. – Vol.4. – N 1. – С. 23-28.

12. Кластеризуем лучше, чем «метод локтя» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/companies/jetinfosystems/articles/467745>– Заглавие с экрана.

13. Lance G. N., Williams W. T. A General Theory of Classificatory Sorting Strategies: 1. Hierarchical Systems // The Computer Journal. – 1967. – Vol. 9. – No 1. – Is. 4, pp. 373–380.

**Разработка веб-приложения для сбора и обработки  
медицинских данных по патологиям, связанным с  
дисплазией соединительной ткани**

*Д.В. Корней, В.В. Журавлева  
АлтГУ, г. Барнаул*

За последнее десятилетие представления о дисплазии соединительной ткани (ДСТ) коренным образом изменились. Появляется всё больше исследований, посвящённых изучению особенностей ведения пациентов с ДСТ и их соматического здоровья [1]. Но недостаточное внимание уделяется диагностике и профилактике таких осложнений. В данной работе рассмотрена задача разработки веб-приложения, которое позволит сократить время и увеличить точность диагностики данных патологических состояний.

**Ключевые слова:** *дисплазия соединительной ткани, обработка данных, методы машинного обучения, классификация патологий, веб-приложение.*

Проблему классификации ДСТ долгое время дискриминировали, в связи с отсутствием единых методов диагностики. Отсутствие единой и всеобщей классификации ДСТ свидетельствует о различных взглядах исследователей на данную проблему в целом [2]. К настоящему времени предложено несколько методик диагностики ДСТ, но классификация ряда её форм остаётся сложной задачей. Многие симптомы и проявления могут быть схожи с другими заболеваниями, что затрудняет точную классификацию и диагностику [3].

В процессе исследования была использована база данных, основанная на наблюдениях из работы [4], в которой содержится необходимая информация о течении заболеваний и проводимых анализах.

Перед использованием методов машинного обучения применяются разнообразные методы предобработки, включающие в себя очистку данных от ошибок и выбросов, заполнение пропущенных значений, нормализацию и стандартизацию данных. Это позволяет повысить качество и достоверность данных, выявить некоторые закономерности в их структуре, а также подготовить их для дальнейшего анализа [5].

Среди методов машинного обучения, применяемых в анализе медицинских данных, можно выделить: логистическую регрессию, линейный дискриминантный анализ, дерево решений, случайный лес и метод К ближайших соседей, а также методы глубокого обучения, такие как нейронные сети [6]. В веб-приложении эти методы используются для диагностики патологий связанных с ДСТ, что делает возможным создание персонализированных подходов к лечению конкретного пациента.

Для дальнейшего удобного использования данных была написана структурированная база данных, согласованная с требованиями к приложению. Она учитывает стандарты безопасности и предоставляет быстрый доступ к данным. Веб-приложение использует базу данных для хранения информации о пользователях, пациентах, результатах исследований и других данных. Благодаря ей врачи могут эффективно вести учет пациентов, историю их болезней, назначать лечение и вести дальнейший мониторинг. Кроме того, она позволяет анализировать данные, определять распространённость патологий, улучшать классификацию и оптимизировать остальные рабочие процессы.

Следующим шагом стало создание веб-приложения, которое должно помочь в диагностике патологий связанных с ДСТ. К нему были сформированы следующие обязательные требования к функционалу, рекомендованные в работе [7]:

1. регистрация новых пользователей или ввод данных существующих пользователей;
2. реализация доступа к базе данных;
3. возможность добавления данных из внешних источников;
4. визуализация данных и этапов диагностики;
5. возможность вывода результата для его дальнейшего анализа и использования.

Приложение представлено в виде онлайн-сервиса, что позволяет работу с ним на любом устройстве, имеющем доступ к сети Интернет.

Информационный блок	Панель администратора	Личный кабинет	База данных	Анализ данных
Функционал приложения	Регистрация новых пользователей	Личная информация пользователя	Данные зарегистрированных пользователей	Получение данных из внешних источников
Новости	Редактирование данных	Доступ к базе данных	Архив пациентов	Диагностика патологических состояний
Список изменений	Доступ к элементам приложения	Необходимые инструменты для работы	Результаты клинических наблюдений	Интерпретация полученных результатов

Рисунок 1 - Структура веб-приложения

В приложении предусмотрены такие программные модули, как:

1. Информационный блок: хранит общую информацию о функционале приложения и о внесённых изменениях.

2. Модуль безопасности данных: гарантирует достоверность и целостность информации, защищая её конфиденциальность, осуществляет контроль доступа к данным.

3. Панель администратора: предоставляет доступ к закрытым элементам веб-приложения и управляет уровнем привилегий пользователей.

4. Личный кабинет: предоставляет пользователю доступ к инструментам необходимым для работы в веб-приложении.

5. Модуль базы данных: предоставляет доступ к ранее созданной базе данных, а именно добавление, изменение и удаление данных в ней.

6. Модуль анализ данных: производит диагностику патологических состояний, по имеющимся данным, для каждого пациента, находящегося в базе данных.

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод о том, что разработанное веб-приложение позволит извлекать и накапливать информацию из огромного массива данных, и в дальнейшем использовать её для классификации патологий. На основе полученных данных доктора смогут принимать решение о ходе дальнейшего лечения для каждого пациента в индивидуальном порядке.

## Библиографический список

1. Гнусаев С.Ф., Кадурина Т.И., Николаева Е.А. Педиатрические аспекты дисплазии соединительной ткани. Перспективы и достижения. Москва – Тверь – Санкт-Петербург, 2013. [Электронный ресурс]. URL: [http://repo.tvergma.ru/192/1/sbornik\\_ped\\_displaz\\_soed\\_tissues.pdf](http://repo.tvergma.ru/192/1/sbornik_ped_displaz_soed_tissues.pdf) (дата обращения 05.03.2024).
2. Нечаева Г.И., Яковлев В.М., Конев В.П. и др. Дисплазия соединительной ткани: основные клинические синдромы, формулировка диагноза, лечение // Лечащий врач. – № 2. – 2008.
3. Аббакумова Л.Н. Клинические формы дисплазии соединительной ткани у детей. – СПб: Санкт-Петербургская государственная педиатрическая медицинская академия, 2009. – 52 с.
4. Метальников А.И., Осипов А.А. и др. Дисплазия соединительной ткани у детей в аспекте опыта врача–ортопеда амбулаторно–поликлинического звена. Детская хирургия, 2019. [Электронный ресурс]. URL: <https://doi.org/10.18821/1560-9510-2019-23-5-281-284> (дата обращения 19.02.2024).
5. Кадурина Т.И., Аббакумова Л.Н. Оценка степени тяжести недифференцированной дисплазии соединительной ткани у детей // Медицинский вестник Северного Кавказа.– №2 – 2008.. – С. 15–21.
6. Жерон О. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn, Keras и TensorFlow: концепции, инструменты и техника для создания интеллектуальных систем. – СПб: ООО «Диалектика», 2020. – С. 33–366.
7. Никсон Р. Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript, CSS и HTML5. – СПб: Питер, 2016. – 768 с.

**Исследование показателя численности населения  
регионов Республики Узбекистан**

*А.С. Маничева, А. Эшниезов, С.И. Суханов  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию показателя численности населения. Прогнозирование изменения этого демографического показателя может способствовать своевременным действиям официальных властей по регулированию и корректированию управленческих решений в социально-экономической сфере.

**Ключевые слова:** *демография, Узбекистан, линейная регрессия.*

Республика Узбекистан занимает лидирующие строки рейтинга рождаемости в странах СНГ, что косвенно указывает на растущую нагрузку на социальные структуры. Результаты исследования и прогнозирования демографических показателей в Узбекистане могут способствовать своевременным действиям официальных властей по регулированию и корректированию управленческих решений и при среднесрочном планировании социальной, экономической, образовательной, медицинской и другой инфраструктуры регионов и стране в целом [1]. Данная работа посвящена исследованию тенденций изменения демографических процессов в регионах Республики Узбекистан. Подобные исследования представлены в работах [2, 3].

На основе статистических данных за период 2000–2022 гг. рассмотрим тенденцию изменения показателя численности населения по четырнадцати регионам Республики Узбекистан: 14 регионов: Андижанская область, Бухарская область, Джизакская область, Кашкадарьинская область, Навойская область, Наманганская область, Самаркандская область, Сурхандарьинская область, Сырдарьинская область, Ташкентская область, Ферганская область, Хорезмская область, город Ташкент и Республика Каракалпакистан. Построим простую линейную модель регрессии для определения тенденции изменения показателя и оценим качество модели по коэффициенту детерминации  $R^2$ . Результаты моделирования (параметры  $a$  и  $b$ ) представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты построения линейных моделей по регионам Республики Узбекистан

Регион	$a$	$b$	$R^2$
Республика Каракалпакстан	20,74	-40019,07	97%
Андижанская обл.	50,55	-98991,55	99%
Бухарская обл.	26,67	-51952,39	99%
Джизакская обл.	21,79	-42645,25	98%
Кашкадарьинская обл.	58,16	-114220,44	99%
Навоийская обл.	11,66	-22575,27	96%
Наманганская обл.	47,55	-93257,57	99%
Самаркандская обл.	64,42	-126282,45	99%
Сурхандарьинская обл.	47,14	-92617,50	99%
Сырдарьинская обл.	10,99	-21351,72	97%
Ташкентская обл.	29,91	-57500,64	99%
Ферганская обл.	58,69	-114806,25	99%
Хорезмская обл.	28,03	-54769,22	100%
г. Ташкент	30,19	-58379,62	83%

Как видно из таблицы, по значению коэффициента детерминации  $R^2$  построенные модели являются достоверными. Согласно полученным при моделировании значениям параметра  $a$  во всех регионах Узбекистана наблюдается тенденция роста показателя численности населения. Из чего можно сделать вывод о возможном возрастании нагрузки на службы, связанные с обслуживанием населения. Данные выводы необходимо учитывать официальным властям при планировании демографической, социальной, образовательной и медицинской политики в регионах для корректировки нагрузки на соответствующие государственные структуры.

## Библиографический список

1. Узбекистан на пороге демографического дивиденда. Причины высокой рождаемости и её влияние на социальную сферу [Электронный ресурс] // Новости Узбекистана: газета nuz.uz : [сайт]. URL: <https://nuz.uz/obschestvo/1257676-uzbekistan-na-poroge-demograficheskogo-dividenda-prichiny-vysokoj-rozhdaemosti-i-eyo-vliyanie-na-soczialnuyu-sferu.html?ysclid=lny2dogwx5811835099>.

2. Набибуллаева Р.З. Динамика демографических процессов в республике Узбекистан // Большая Евразия: развитие, безопасность, сотрудничество. – 2019. – №2-2. – С. 966-970.

3. Турдиев Ш.М. Тенденции изменения динамики роста населения в Узбекистане // Биология и интегративная медицина. – 2017. – №2. – С. 5-9.

**База данных индикаторов социально-экономического  
развития регионов Большого Алтая  
в постсоветский период**

*Г.В. Полосин, Е.В. Понькина, И.Ю. Рябов, К.С. Рупасов  
АлтГУ, г. Барнаул*

В рамках научно-исследовательской работы «Алтайский вектор евразийской экономической интеграции: вызовы трансграничности, эффекты, стратегические задачи и приоритеты для Алтайского края» (FZMW-2023-0015) была поставлена задача разработать базу данных показателей развития трансграничных регионов России, Казахстана, Монголии и Китая за период 1990-2021 гг. Для решения поставленной задачи были использованы статистические данные из официальных источников. База данных содержит 68 показателей социально-экономического развития регионов Большого Алтая, сгруппированных в 10 структурных блоков. Временное разрешение данных – 1 год. Данные были предварительно проанализированы на предмет наличия выбросов и несогласованностей. На основе эконометрических методов выполнена обработка по восстановлению краткосрочных пропусков во временных рядах данных. Сформированная база данных представляет уникальный набор социально-экономических и климатических индикаторов для трансграничной территории исследования, позволяющая решать задачи моделирования и анализа динамики сельскохозяйственного производства в постсоветский период.

**Ключевые слова:** *база данных, трансграничный регион, социально-экономические данные, климатические данные, Большой Алтай.*

Сбор, предварительный анализ и разработка базы данных являются одними из важнейших задач, формирующими базу для сценарного моделирования, прогнозирования и анализа динамики развития региональных социально-экономических систем на различных уровнях управления. Предоставленные данные должны представлять достаточно согласованный и полный массив, наиболее адекватно отражающий динамику исследуемых процессов. Традиционно, такие массивы данных формируются из официальных источников. К таким источникам можно отнести данные, предоставляемые национальными органами государственной статистики, периодические издания и

ежегодные статистические сборники. К сожалению, официальные статистические данные часто характеризуются несогласованностью или даже противоречивостью значений из публикаций различных периодов. Статистические органы в сборниках более поздних лет проводят коррекцию показателей по результатам переписи населения, поэтому порой возникают «ступеньки» или выбросы во временных рядах, подлежащие анализу и коррекции, выявлению причин образования сдвигов. Сдвиги в данных также могут быть обусловлены изменением административного деления территории или принадлежности к различным категориям. Кроме того, одной из проблем является наличие пропусков в данных, что ограничивает возможности их использования для моделирования социально-экономической динамики.

Важным дополнением социально-экономических являются климатические данные. Наборы климатических данных весьма разнообразны и могут включать как данные по метеорологическим станциям, так и готовые предобработанные пространственные продукты различного временного и пространственного разрешения. К таким продуктам, например, относятся данные проекта CMIP (WorldClim.org) или ISIMIP. Преимуществом таких наборов данных является их точность, коррекция выбросов, возможность оценки статистик пространственной вариабельности в границах заданных регионов.

Систематизация, структурирование данных, их предварительный анализ и обработка с последующим сводом в единую базу представляют важный этап научного исследования.

Целью работы является разработка база данных индикаторов динамики социально-экономического развития трансграничных регионов Большого Алтая за период 1990-2021 гг.

В качестве источников формирования базы данных использованы официальные публикации и базы данных национальных органов статистики [1-4], включая периодические издания [5], региональные статистические ежегодники [6, 7], пространственные данные проекта WorldClim (WorldClim.org) разрешения 0,25 сек./пиксель, агрегированные на уровень рассматриваемых регионов.

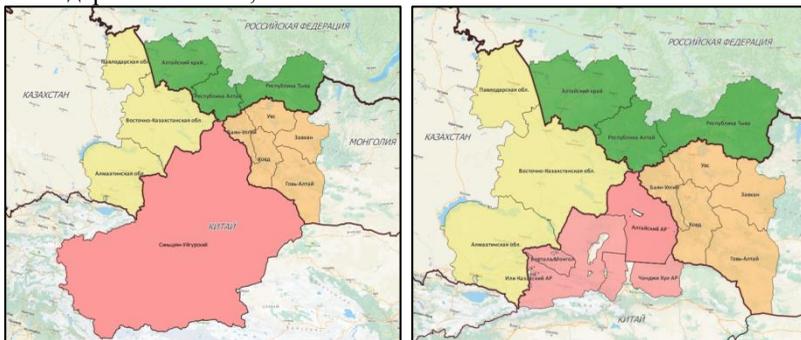
Исследуемая территория Большого Алтая представлена шестнадцатью регионами в четырёх странах:

*Россия* (3 региона) – Алтайский край, Республика Алтай, Республика Тыва;

*Монголия* (5 аймаков) – Баян-Улгий, Говь-Алтай, Завхан, Увс, Ховд;

*Китай* (5 регионов) – Синьцзянь-Уйгурский автономный район, Чанци-Хуэйский автономный округ, Или-Казахский автономный

округ, округ Алтай (находится в подчинении Или-Казахского автономного округа), Боро-Тала-Монгольский автономный округ;  
*Казахстан* (3 региона) – Восточно-Казахстанская область, Павлодарская область, Алматинская область.



а) Большой Алтай – 1

б) Большой Алтай – 2



в) Большой Алтай – 3

Рисунок 1. Уровни трансграничного региона «Большой Алтай»

*Источник:* Составлено авторами с использованием продуктов Open Street Map и Yandex карты.

Учитывая неоднозначность идентификации территориальных границ трансграничного региона «Большой Алтай», данные обобщены на три уровня в зависимости от охвата территории (рисунок 1):

*Большой Алтай 1* (GA1) – представляет макрорегион Большой Алтай, включающий в себе основные и сопредельные трансграничные регионы Горного Алтая, включая территорию Синьцзянь-Уйгурского Автономного района (рисунок 1 а).

*Большой Алтай 2* (GA2) – регионы трансграничного экономического сотрудничества (рисунок 1 б).

*Большой Алтай 3* (GA3) – горные регионы, концентрирующиеся вокруг Алтайских гор. На данном уровне представлены все исследуемые регионы России, Восточно-Казахстанская область Республики Казахстан, аймаки Увс, Баян-Улгий и Ховд Монголии и округ Алтай Синьцзянь-Уйгурского автономного района (рисунок 1 в).

Важно анализировать и сопоставлять тренды социально-экономического развития на уровне региона и трансграничных образований, так с индикаторами развития на национальном уровне. Поэтому помимо обобщения данных на различных уровнях Большого Алтая, выполнен сбор данных на национальном уровне для каждой страны.

База данных включает 68 показателей, сгруппированных в 10 структурных блоков: базовые индикаторы – 1 показатель; демография – 6 показателей; социальное благополучие населения – 5 показателей; социальная инфраструктура – 3 показателя; сельскохозяйственное землепользование – 16 показателей; продуктивность сельхозугодий и животных – 4 показателя; производство продукции сельского хозяйства – 8 показателей; региональная экономика – 3 показателя; индексы цен – 7 показателей; климат – 15 показателей.

Диаграмма типа сущность-связь, описывающая реляционную структуру базы данных представлена на рисунке 2.

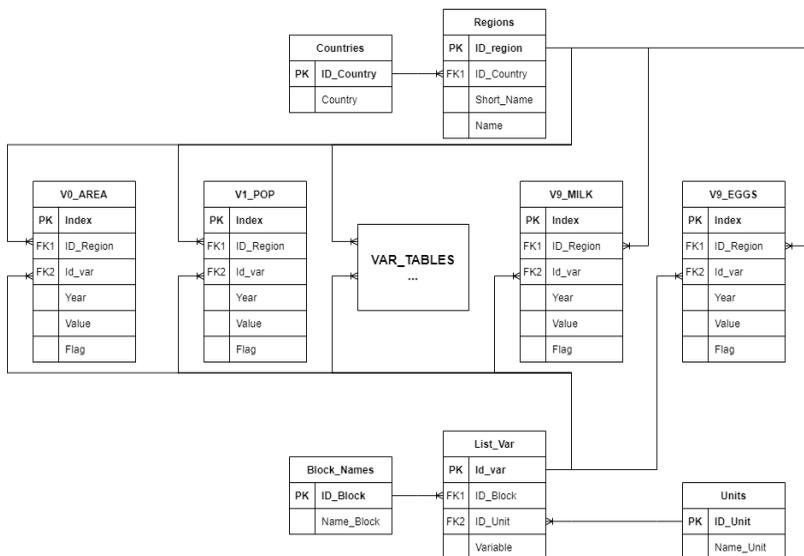


Рисунок 2. Схема базы данных

*Источник:* Составлено авторами.

База данных представлена в виде книги Microsoft Excel с набором интерактивных таблиц, содержащим структурированные массивы данных, включающие статистики изменения индикаторов по десятилетиям и в целом за период.

Каждый показатель был проанализирован на предмет наличия выбросов, неадекватных флуктуаций, наличия ступенек. Выбросы в данных проанализированы и скорректированы методами сглаживания. Краткосрочные пропуски (не более 5 лет) в данных были восстановлены методом линейной интерполяции, некоторые показатели в виду их отсутствия (преимущественно в районах Монголии) за ряд лет были оценены на основе эконометрических методов с использованием идентифицированных регрессионных зависимостей за определенный период времени с оценкой точности. Следует отметить, что современные процедуры обработки данных, практикуемые, например, FAO (FAOSTAT), также опираются на методы восстановления пропусков в данных по трендам или на основе эконометрических зависимостей между показателями. Данные имеют маркировку о наличии коррекции (1/0), где 1 – данные без коррекции, 0 – данные были с коррективаны или восстановлены

в виду наличия пропусков. Использование такой маркировки, позволяет фильтровать датасет в зависимости от решаемых задач.

Разработанная база данных представляет уникальный массив данных и может быть использована для решения задач анализа динамики землепользования на различных этапах развития социально-экономических систем в постсоветский период, анализа роли климатических факторов в развитии региональных экономик Большого Алтая, моделирования последствий климатических изменений на аграрное производство, оценки степени интеграции региональных экономик в области сельскохозяйственного производства и др.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке НИР «Алтайский вектор евразийской экономической интеграции: вызовы трансграничности, эффекты, стратегические задачи и приоритеты для Алтайского края» (FZMW-2023-0015).

### Библиографический список

1. ЕМИСС. Государственная статистика. – URL: <https://www.fedstat.ru/indicators/> (дата обращения: 10.05.2024).
2. Росстат. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/statistic> (дата обращения: 10.05.2024).
3. Бюро национальной статистики агентства по стратегическому планированию и реформам Республики Казахстан. – URL: <https://stat.gov.kz/> (дата обращения: 10.05.2024).
4. Mongolian statistical information service. – URL: <https://www2.1212.mn/> (дата обращения: 10.05.2024).
5. National Bureau of Statistics of China. – URL: <https://data.stats.gov.cn/english/easyquery.htm?cn=C01> (дата обращения: 10.05.2024).
6. Yearbook of Mongolia. 1991-2022. Mongolian statistical information service. – URL: <https://www2.1212.mn/BookLibrary.aspx?category=007> (дата обращения: 10.05.2024).
7. Xinjiang Statistical Yearbooks. 1990-2022. National Bureau of Statistics of China. – URL: <https://www.stats.gov.cn/english/Statisticaldata/yearbook/> (дата обращения: 10.05.2024).

## Прототипирование рекламно-информационного сайта для магазина ароматических свечей VAREZHKA

А.А. Уколова<sup>1</sup>, Ю.Г. Алгазина<sup>2</sup>, А.С. Беспалов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup> Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

В данной статье показан процесс разработки интерфейса рекламно-информационного сайта магазина ароматических свечей VAREZHKA на основе прототипирования и построения макета с учетом современных тенденций и требований UX/UI дизайна. Выявлены основные проблемы реализации продукции магазином, поставлены задачи по их решению, обозначены требования к дизайну сайта, разработан прототип и макет сайта.

**Ключевые слова:** *разработка сайта, прототип сайта, информационные системы, веб-дизайн, малый бизнес.*

В эпоху цифровизации экономических процессов значительный интерес представляет применение информационных технологий на предприятиях малого бизнеса.

Количество предприятий малого бизнеса в стране повышается, но они редко имеют качественный собственный сайт, несмотря на то, что интернет-торговля в стране развивается с каждым годом. Чтобы быть конкурентоспособными на рынке, владельцам малого бизнеса необходимо осваивать интернет-платформы и отвечать на цифровые запросы своей аудитории.

Обращение к проекту по разработке сайта для магазина ароматических свечей было произведено для того, чтобы решить проблему такую проблему данного предприятия малого бизнеса как необходимость адаптации к требованиям цифровой экономики. Актуальность работы обусловлена необходимостью увеличения продаж через персональный сайт.

Веб-сайт влияет на значимость компании и позволяет ей не только доносить для ознакомления широкому кругу лиц сведения о компании и услугах одновременно, но и делать это в максимально информативной и понятной форме, что положительно влияет на

привлечение новых клиентов, возникновение обратной связи с ними и повышение узнаваемости компании.

В связи с этим цель настоящей работы – разработать рекламно-информационный сайт для магазина ароматических свечей VAREZHKA с учетом современных тенденций и требований UX/UI дизайна.

Исходя из цели работы были поставлены и решены следующие задачи: 1. Определить основные технологии разработки рекламно-информационных сайтов. 2. Выделить тенденции разработки сайтов для предприятий малого бизнеса. 3. Привести характеристику разработки дизайнерских решений для малого бизнеса с учетом спроса на рынке. 4. Сформировать требования и задачи создания сайта магазина ароматических свечей. 5. Разработать дизайн интерфейса сайта для магазина ароматических свечей.

Объектом данной работы является магазин ароматических свечей VAREZHKA.

Предмет данной работы – разработка рекламно-информационного сайта для магазина ароматических свечей VAREZHKA.

В данной работе были использованы такие методы, как: предпроектный метод (исследование рынка, определение целевой аудитории, формирование технического задания на разработку); метод сравнения; метод прототипирования; анкетирование.

Объект автоматизации (магазин свечей ручной работы “VAREZHKA”) не имеет собственного сайта, товары и информация о деятельности представлены в соцсетях. Предложение магазина на своем рынке уникально за счет полностью ручной работы и производством свечей из бутылок с пыльниками из макулатуры. Магазин предоставляет большой выбор свечей с различными ароматами и различных объемов, которые в дополнение можно использовать как массажные свечи, а также, помимо этого, вазы из бутылок, стаканы для декоративных целей и холодных напитков, диффузоры и ароматизаторы для машин.

Проведенный анализ деятельности магазина ароматических свечей VAREZHKA позволил обозначить проблемы, которые будут решены путем создания такого дизайн-продукта как сайт, а также реализовать следующие преимущества [4]: доступность, распространенность, автоматизация, внимание к бизнесу, информативность.

Требования к дизайну сайта по продаже свечей ручной работы включают в себя:

1. Приятная визуальная составляющая – дизайн не должен быть пустым или перегруженным, должна отсутствовать неактуальная информация [2].

2. Сайт должен быть интуитивно понятным – важно, чтобы клиент мог с легкостью ориентироваться по сайту, быстро находить нужную ему информацию и без проблем оформить заказ [4].

3. Все изображения на сайте должны быть качественные, сделанные специально для данного сайта, должна соблюдаться единая стилистика и цветовая гамма изображений [3].

4. Обязательно наличие адаптивного дизайна для того, чтобы клиенты могли совершать покупки с любого устройства.

5. Читательность – использование четкого и не слишком маленького по размеру шрифта, разделение текста на абзацы.

6. Видимость статуса системы – дизайн должен информировать пользователя о том, что происходит – например, при наведении на кнопку «Заказать свечу» она меняет свой цвет, при отправлении формы всплывает окно, уведомляющее о том, что форма успешно отправлена.

7. Пользовательский контроль и свобода – например, возможность закрыть всплывающее окно, вернуться на страницу назад.

8. По всему сайту должна присутствовать согласованность внутри одного интерфейса – например, везде один цвет кнопок.

После анализа деятельности компании, ее целевой аудитории, выявления потребностей и задач был создан прототип сайта с помощью платформы Figma (рис. 1.) Прототип был создан также для всех страниц сайта и модальных окон для видения того, каким будет интерфейс [1; 5].



Рисунок 1 – Прототип сайта магазина ароматических свечей VAREZHKA

На основе прототипа был разработан макет сайта (рис. 2).

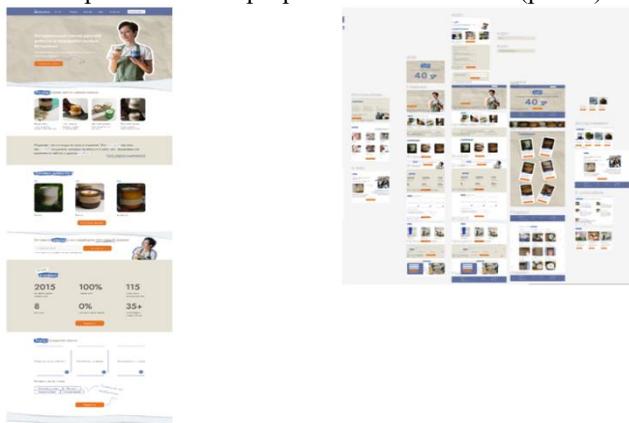


Рисунок 2 – Макет сайта магазина ароматических свечей VAREZHKA

Таким образом, на основе проведенного анализа деятельности организации и последующего прототипирования сайта разработан интерфейс рекламно-информационного сайта для магазина ароматических свечей «VAREZHKA».

## Библиографический список

1. Ганижева Н.Ж. «UX-дизайн» // Теоретические и практические основы научного прогресса в современном обществе. – 2023. – С. 48-50.
2. Дакетт Д. «HTML и CSS. Разработка и дизайн веб-сайтов». – Litres, 2022. – 478 с.
3. Мандел Т. «Разработка пользовательского интерфейса» – Litres, 2022. – 420 с.
4. Панфилов К.С. «Создание веб-сайта от замысла до реализации». – Litres, 2022. – 439 с.
5. Шлаев Я.А. «UX/UI дизайн для создания идеального продукта. Полный и исчерпывающий гид». – Litres, 2022. – 102 с.

## СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

УДК 004.9

### Помехоустойчивое кодирование

*А.Н. Гамова, С.Д. Хуторный*

*Саратовский государственный университет им. Н.Г.  
Чернышевского*

Статья посвящена введению в помехоустойчивое кодирование. Приводятся разные типы кодов (ПХК) в зависимости от способа приема данных, структуры, корреляционных свойств, методов кодирования и декодирования. При другом подходе ПХК делятся на линейные (ЛК) и нелинейные (НЛ), образующие некую математическую структуру.

**Ключевые слова:** *корректирующий код, минимальное расстояние Хэмминга, алгоритмы кодирования (декодирования), матрица синдромов.*

### Основные понятия помехоустойчивого кодирования

Помехоустойчивость – это понятие, характеризующее возможности системы выполнять операции приема данных при наличии помех в линии передачи и различных искажений в аппаратных средствах.

*Корректирующий код* является кодом с избыточностью, в нём имеются лишние, неиспользуемые кодовые комбинации. *Корректирующая способность кода* определяется кратностью обнаруживаемых  $r$  и исправляемых  $s$  ошибок. *Расстояние Хэмминга*  $d_{ij}$  показывает степень различия между  $i$ -й и  $j$ -и кодовыми комбинациями. Для любых двух двоичных кодовых комбинаций расстояние Хэмминга равно числу несовпадающих в них разрядов. Математически расстояние Хэмминга вычисляется как число единиц в сумме по модулю два этих кодовых комбинаций, что представляет собой *вес кодовой комбинации* их суммы  $W$ . *Минимальное кодовое расстояние*  $d_{min}$  – это минимальное расстояние Хэмминга для заданного кода разрешенных кодовых комбинаций, характеризующую корректирующую способность кода. При введении избыточности в

первичный код  $U$ , содержащий  $t$  информационных символов  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , добавляются  $k$  избыточных символов  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

Структурная схема системы передачи дискретной информации, использующей избыточный код в качестве средства повышения помехоустойчивости, выглядит следующим образом (рисунок 1).

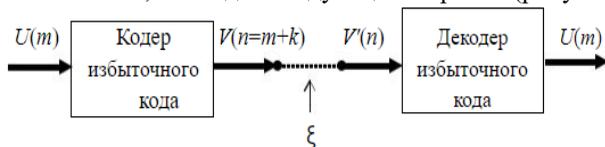


Рисунок 1 - Структурная схема системы передачи дискретной информации

Существуют также различные граничные оценки, которые связывают  $d_{min}$ ,  $n$  и  $k$ . Способность кода обеспечивать исправление ошибки зависит в первую очередь от способа приема данных.

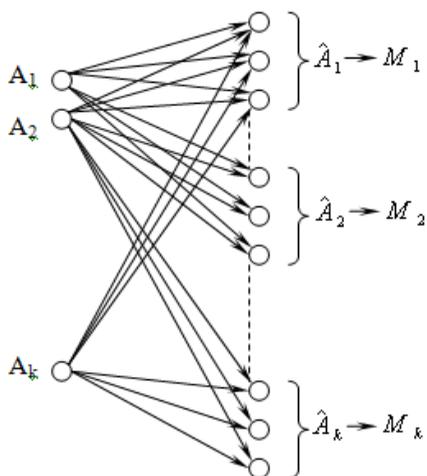


Рисунок 2 – Пример графа для исправления кода

Способность кода обеспечивать исправление ошибки зависит в первую очередь от способа приема данных.

К настоящему времени создано большое количество различных помехоустойчивых кодов, которые отличающихся основанием, расстоянием Хэмминга, степенью избыточности, общей структурой, функциональным предназначением, эффективностью,

корреляционными свойствами, различными алгоритмами кодирования или декодирования, а также формами частотных спектров. На рисунке 3 приведены примеры типов кодов, которые отличны по особенностям их общей структуры, и свойствам кода как сигнала.

Производные коды реализуются на основании создания исходного кода, к которому добавляются дополнительные символы, путем увеличения значения расстояния или уменьшения части символов без корректировки расстояния (укороченный код). В ряде случаев также возможно исключение некоторых символов (перфорированный код). Необходимость этого возникает из-за построения на основе имеющегося кода некоторого другого, являющегося менее мощным и более коротким с идентичным расстоянием.

Под корреляционными (КРК) понимают такие коды, которые обладают высокими корреляционными свойствами, являющиеся критичными для передачи сигналов и повышения уровня защищенности от различных типов помех. Их применяют для извлечения сигналов из различных шумов разной интенсивности, обеспечения работы асинхронно-адресных систем связи. КРК включают в свой состав пары противо положных сигналов с эффективной функцией автокорреляции, на базе применения метода внутриимпульсной модуляции. Дополнительно в их состав могут входить импульсно-интервальные коды, которые имеют постоянное для всех слов кода число импульсов на фиксированном интервале времени с неперекрывающимися значениями интервалов между всеми импульсами.

При другом подходе ПХК можно разделить на линейные (ЛК) и нелинейные (НЛ). ЛК образуют некоторое векторное пространство и обладают свойством: два ЛК слова можно сложить, применяя подходящее определение суммы, вследствие чего будет получено третье кодовое слово. Эта операция, фактически, является посимвольным сложением двух слов кода по модулю 2. К отличаются от НЛ замкнутостью кодового множества относительно используемого линейного оператора, которым может являться оператор сложения или умножения. Он может также быть представлен как вектор пространства, который состоит из различных кодовых слов. Практически все используемые схемы кодирования на практике основываются на ЛК. Двойные ЛК называют групповыми кодами, в связи с тем, что кодовые слова образуют некую математическую структуру, именуемую группой. Древовидные ЛК обычно являются сверхточными, т.к. операция кодирования рассматривается в виде дискретной свертки входной последовательности с откликом кодера.

Предположим что нужно сгенерировать код Хэмминга для 15-битового кодового слова  $x_1 \dots x_{15}$ . В приведённой ниже таблице в первой строке даны номера позиций в кодовом слове, во второй — условное обозначение битов, в третьей — значения битов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1

Таблица 2 – Номера позиции

Вставим в информационное слово контрольные биты  $r_0 \dots r_4$  таким образом, чтобы номера их позиций представляли собой целые степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16... Получим 20-разрядное слово с 15 информационными и 5 контрольными битами. Первоначально контрольные биты устанавливаем равными нулю. В таблице 3 контрольные биты выделены розовым цветом.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$r_0$	$r_1$	$x_1$	$r_2$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_3$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$r_4$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1

Таблица 3 – Расстановка контрольных бит

В общем случае количество контрольных бит в кодовом слове равно двоичному логарифму числа бит кодового слова (включая контрольные биты), округлённому в большую сторону до ближайшего целого. Например, информационное слово длиной 1 или 2 бита требует двух контрольных разрядов, 3- или 4-битовое информационное слово — трёх, 5...11-битовое — четырёх, 12...26-битовое — пяти и т.д.

Добавим к таблице 5 строк (по количеству контрольных битов), в которые поместим матрицу преобразования. Каждая строка будет соответствовать одному контрольному биту (нулевой контрольный бит — верхняя строка, четвёртый — нижняя), каждый столбец — одному биту кодируемого слова.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$r_0$	$r_1$	$x_1$	$r_2$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_3$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$r_4$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$r_0$
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$r_1$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	$r_2$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	$r_3$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	$r_4$

Таблица 4 – Вычисление контрольных бит

В каждом столбце матрицы преобразования поместим двоичный номер этого столбца, причём порядок следования битов будет обратный — младший бит расположим в верхней строке, старший — в нижней. Например, в третьем столбце матрицы будут стоять числа 11000, что соответствует двоичной записи числа три: 00011.

### Алгоритм кодирования

Рассмотрим сгенерированный код Хэмминга для 15-битовое кодовое слово  $x_1 \dots x_{15}$ . В правой части таблицы мы оставили пустым один столбец, в который поместим результаты вычислений контрольных битов. Вычисление контрольных битов производим следующим образом. Берём одну из строк матрицы преобразования (например,  $r_0$ ) и находим её скалярное произведение с кодовым словом, то есть перемножаем соответствующие биты обеих строк и находим сумму произведений. Если произведение получилось больше единицы, находим остаток от его деления на 2. Иными словами, мы подсчитываем сколько раз в кодовом слове и соответствующей строке матрицы в одинаковых позициях стоят единицы и берём это число по модулю 2.

Если описывать этот процесс в терминах матричной алгебры, то операция представляет собой перемножение матрицы преобразования на матрицу-столбец кодового слова, в результате чего получается матрица-столбец контрольных разрядов, которые нужно взять по модулю 2.

Полученные контрольные биты вставляем в кодовое слово вместо стоявших там ранее нулей. Кодирование по Хэммингу завершено. Полученное кодовое слово — 10110010001011110001.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
$r_0$	$r_1$	$x_1$	$r_2$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_3$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$r_4$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$		
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1		
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$r_0$	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$r_1$	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	$r_2$	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	$r_3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	$r_4$	1

Таблица 5 – Контрольных преобразований

### Алгоритм декодирования

Алгоритм декодирования по Хэммингу абсолютно идентичен алгоритму кодирования. Матрица преобразования соответствующей размерности умножается на матрицу-столбец кодового слова и каждый элемент полученной матрицы-столбца берётся по модулю 2. Полученная матрица-столбец получила название «матрица синдромов». Легко проверить, что кодовое слово, сформированное в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем разделе, всегда даёт нулевую матрицу синдромов.

Матрица синдромов становится ненулевой, если в результате ошибки (например, при передаче слова по линии связи с шумами) один из битов исходного слова изменил своё значение. Предположим для примера, что в кодовом слове, полученном в предыдущем разделе, шестой бит изменил своё значение с нуля на единицу (на рисунке обозначено красным цветом). Тогда получим следующую матрицу синдромов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
$r_0$	$r_1$	$x_1$	$r_2$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_3$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$r_4$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$		
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1		
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$s_0$	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$s_1$	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	$s_2$	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	$s_3$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	$s_4$	0

Таблица 6 – Матрица синдромов

Заметим, что при однократной ошибке матрица синдромов всегда представляет собой двоичную запись (младший разряд в верхней строке) номера позиции, в которой произошла ошибка. В приведённом примере матрица синдромов (01100) соответствует двоичному числу 00110 или десятичному 6, откуда следует, что ошибка произошла в шестом бите.



Рисунок 3 – Классификация помехоустойчивых кодов

### Библиографический список

1. Зюко, А.Г. Теория передачи сигналов / А.Г. Зюко, Д.Д. Козловский. – М: Радио и связь, 2011. – 368 с.
2. Халкин, Е.В. Кодирование в телекоммуникационных системах. Учебник для ВУЗов. / . – М.: Высшая школа, 2011 г. – 383с.
3. Цапенко, М.П. Измерительные информационные системы / М.П. Цапенко. - М.: Энергоатом издат, 2012. - 440с.
4. Касами, Т. Теория кодирования /Касами Т. – М.: Мир, 2008. – 679 с.

**Разработка пользовательского web-интерфейса для системы мониторинга и анализа информации с климатических датчиков и метеостанций**

*А.А. Колупаев, Н.Е. Сопов*

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*

В статье представлены результаты разработки пользовательского интерфейса для базы данных системы мониторинга и анализа информации с климатических датчиков и станций. Главная цель работы заключалась в создании понятного и удобного средства взаимодействия с базой данных.

**Ключевые слова:** *web-приложение, программное решение, frontend, React.*

На сегодняшний день идет активная разработка базы данных для ФГБУ “Государственный природный заповедник “Тигирекский”, которая позволит им упростить и ускорить процесс обработки больших объемов данных, получаемых с климатических датчиков и метеостанций. В связи с этим была поставлена задача по созданию для данной базы пользовательского интерфейса для простоты и удобства доступа к ней.

В ходе работы был проведен анализ различных вариантов решения поставленной задачи. Были рассмотрены варианты создания десктопного приложения или web-интерфейса. Был выбран второй вариант, так как он наиболее удобен и прост в использования, нет необходимости устанавливать дополнительное программное обеспечение на компьютеры сотрудников, которые занимаются анализом данных. Достаточно установленного браузера и доступа в интернет. По мимо этого, web-интерфейс решает проблемы мобильности и универсальности. Доступ к нему можно получить из любой точки мира, имея доступ в интернет, а также с любого устройства, вне зависимости от операционной системы, и низкими требованиями к техническим характеристикам.

Разрабатываемое решение предоставляет доступ к базе данных, создавая удобные инструменты для взаимодействия с ней. В планах на разработку:

1. Внесение и редактирование данных о датчиках и метеостанциях, а также их моделях. Их установка на карте в виде

интерактивных меток, отображающих местоположение, тип и статус.

2. Отслеживание состояния приборов по следующим параметрам: интервал замены батареи, интервал съема данных и срок эксплуатации.

3. Запись в базу данных измерений, полученных с датчиков и станций в виде файлов различных форматов, с возможностью их редактирования и проверки правильности распознавания системой и корректности.

4. Просмотр, редактирования и визуализация данных из базы с возможностью фильтрации по различным критериям. Их экспорт в виде Excel файлов и векторных графиков в различных форматах.

5. Планирование работы и выгрузка отчетов об уже проделанной работе.

Процесс разработки ведется в соответствии с пунктами плана. Акцент делается на понятность, удобность, функциональность и приятный внешний вид.

Для реализации поставленных задач была выбрана библиотека React [1]. Выбор был сделан на основе анализа доступных на данный момент инструментов для разработки web-интерфейсов. React на сегодняшний день самый популярный инструмент в сфере, достаточно простой и гибкий, благодаря чему он имеет низкий порог входа и высокую скорость разработки. Помимо вышперечисленных преимуществ, React обладает большим количеством сторонних библиотек, а его модульность позволяет создавать многократно используемые компоненты, что так же значительно упрощает работу с ним.

Проект является web-приложением, имеющим клиент-серверную архитектуру. Будет развернут с использованием технологии контейнеризации при помощи Docker [2].

## **Библиографический список**

1. React. [Электронный ресурс]. – URL: <https://react.dev/learn> (Дата обращения: 24.05.2024).
2. Docker. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.docker.com> (Дата обращения: 24.05.2024).

## Обработка естественного языка и построение графов текста

*А.М. Кузьмин*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Представлены современные методы обработки естественного языка, выделено несколько различий между представленными библиотеками обработки естественного языка на Python. Рассмотрены особенности построения концепт карт естественного языка, библиотеки для построения графов и методы извлечения триплетов, основанные на больших языковых моделях.

**Ключевые слова:** *Обработка естественного языка, NLP, языковые модели, концепт карты, графы.*

Человеческому глазу сложно быстро понять текст, поэтому были разработаны методы для упрощения визуального восприятия. Для этого были придуманы различные таблицы, диаграммы и разделение текста на предложения, абзацы и главы. Среди проблем восприятия можно выделить быстрый поиск сути в больших текстах. Концепт-карты помогают решить эту проблему определяя смысл текста и отслеживая цепочки отношений между объектами. Главная задача — найти триплеты (субъект, предикат и объект) и их отношения, что обеспечит информацию для построения карты.

Для повышения качества обработки текста перед извлечением триплетов следует выполнить токенизацию, лемматизацию и разделение на части речи.

После приведения имён (субъектов и объектов) к начальной форме возможно их объединение в группы.

Для первичной обработки текста можно использовать такие библиотеки как *Natasha*, *SpaCy*, *NLTK*. Для объединения в группы будет необходимо использовать отдельные методы на основе больших языковых моделей, в числе которых *Reverb*, *Zubrinic* и *Jeresb*. А построить граф поможет *PyVis*. У библиотеки *Natasha* есть функция анализа синтаксиса. Эти синтаксические цепочки можно оформить в виде графа, результаты этой попытки можно увидеть на изображении ниже, добавлю, что каждый цвет означает отдельное предложение.

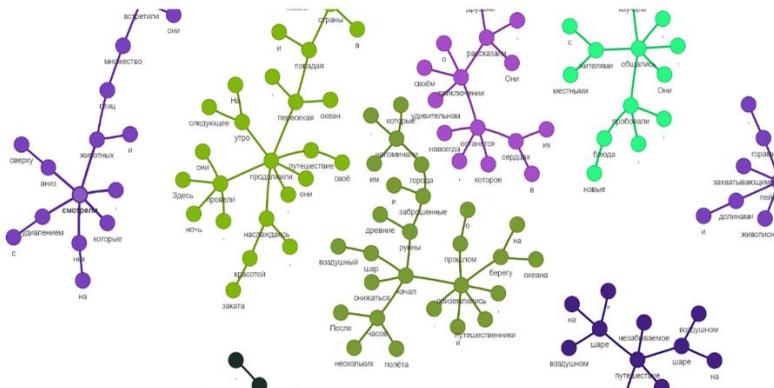


Рисунок 1 – Результаты анализа синтаксиса библиотекой Natasha.

Можно увидеть, как в каждом предложении ветви сходятся вокруг некоторых ключевых действий. В дальнейшем необходимо отойти от анализатора синтаксиса и обрабатывать текст отдельной языковой моделью.

В экономике это можно использовать для упрощения анализа или структуризации больших объемов текстовых данных, для разработки стратегий, планов или управления проектами. Но главным применением можно назвать проведение маркетинговых исследований – это позволит с легкостью связывать сущности, находящиеся на слуху у пользователей.

## Библиографический список

1. Проект Natasha. Набор качественных открытых инструментов для обработки естественного русского языка (NLP) // habr URL: <https://habr.com/ru/articles/516098/> (дата обращения: 24.05.2024).
2. 10 лучших библиотек Python для обработки естественного языка // unite.ai URL: <https://www.unite.ai/ru/10-лучших-библиотек-Python-для-обработки-естественного-языка/> (дата обращения: 25.05.2024).
3. Graph Text Generator // theresanaiforthat.com URL: <https://theresanaiforthat.com/gpt/graph-text-generator/> (дата обращения: 25.05.2024).

**Предварительный анализ данных для решения задачи  
многоклассовой классификации мутаций генома**

*О.Н. Половикова*

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*

В статье приведен анализ исходной выборки данных в рамках решения задачи многоклассовой классификации мутаций генома человека. На основе представленного анализа формируются рекомендации относительно моделей машинного обучения, способных решать представленную задачу. Кроме этого затрагивается общая проблематика исследований, связанных с секвенированием раковой опухоли.

**Ключевые слова:** *Предварительный анализ данных, выборка, классификация, секвенирование генома, гистограмма*

На сегодняшний день активно обсуждаются и используются на практике методы точной (или «прецизионной») медицины [1-4]. Клиники разнообразных профилей предлагают своим пациентам точный медицинский подход при лечении на основе результатов генетического тестирования. Используя генетическое тестирование, специалисты составляют индивидуальный план лечения каждого конкретного пациента.

Непрерывно растёт количество статей в этой области исследования, что свидетельствует не только об интересе к этому направлению, но, об увеличении числа вопросов, на которые необходимо ответить.

Генетическое тестирование, а именно секвенирование генома опухолевой ДНК является востребованной диагностикой, на результатах которой построены некоторые современные методы лечения. Секвенирование опухоли это метод получения своего рода молекулярного сканирования ДНК, извлеченной из опухолевых клеток, полученных из образца биопсии или из крови, или костного мозга пациента. Эта информация предоставляет подробную информацию о том, какие области ДНК опухоли отличаются от ДНК неопухолевых клеток, а интерпретация данных геномного секвенирования дает представление о мутациях, которые могут являться онкологией.

После секвенирования раковая опухоль может иметь тысячи генетических мутаций. Главная проблема в определении вида мутации.

На основе имеющихся данных нужно научиться отличать мутации, способствующие росту опухоли (драйверы), от нейтральных мутаций (пассажиры).

«Ручной» (не автоматизированный) способ определения вида мутации ресурсозатратен, а также требует привлечения специалистов. На платформе Kaggle.com открытом доступе представлены данные для выполнения исследований по классификации генетической мутации, которая позволит разделить разные виды мутаций. Автором данных выступает – Мемориальный Онкологический центр им. Слоана-Кеттеринга (MSKCC). Исследования на основе собранных и предоставленных данных призваны раскрыть потенциал персонализированной медицины. Важным шагом любого исследования является предварительный анализ данных, в рамках которого следует определить их базовые характеристики: типы, объемы, диапазоны значений ит.д. А также сделать выводы относительно сбалансированности анализируемой выборки. Поэтому целью данной работе является предварительный анализ данных для решения задачи классификации мутаций генома.

Выборка данных для обучения включает 3321 элемент (количество элементов в каждой выборке для обучения). Согласно аннотированию данных, генетическая мутация может быть отнесена к девяти различным классам. В таблице и на графиках представлены количественные соотношения элементов каждого класса и количество записей по каждому из 264 представленных генов.

Класс	Количество элементов в обучающей выборке
1	568
2	452
3	89
4	686
5	242
6	275
7	953
8	19
9	37

Таблица 1 - Количество элементов каждого класса в обучающей выборке

Gene	Class	Кол-во
ABL1	2	24
	7	2
ACVR1	2	1
	7	2
AGO2	1	4
	2	1
AKT1	2	3
	3	3
	5	3
	7	17
	8	2
AKT2	2	1
	7	8
	9	2
AKT3	2	1
	7	3
ALK	2	7
	3	10
	5	5
	7	47
APC	1	3
	4	2

Таблица 2 - Количество элементов выборки по разновидности генов

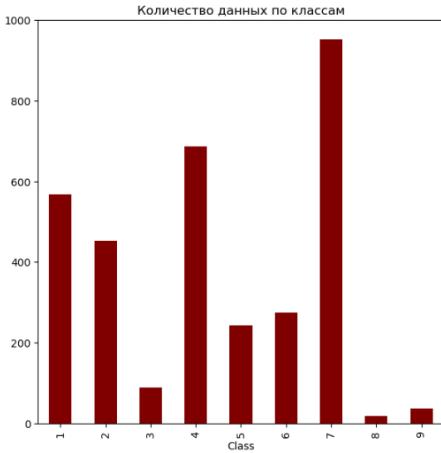


Рисунок 1 – Гистограмма количества экземпляров в обучающей выборке по классам

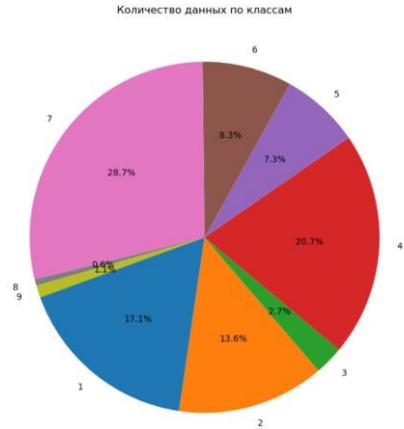
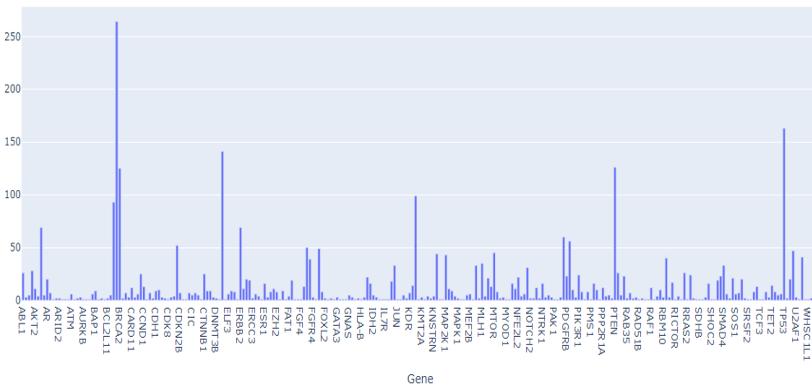


Рисунок 2 – Круговая диаграмма количества экземпляров в обучающей выборке по классам

Количественное соотношение записей выборки по генам



алгоритмов машинного обучения или нейронных сетей, следуют векторизовать текстовую информацию и использовать модели машинного обучения, которые зарекомендовали себя при решении задач классификации с несбалансированными классами.

### **Библиографический список**

1. 12 методов в картинках: секвенирование нуклеиновых кислот [Электронный ресурс]. – Заглавие с экрана. Режим доступа: <https://biomolecula.ru/articles/metody-v-kartinkakh-sekvenirovanie-nukleinovyx-kislot>. – Дата обращения: 7.06.2024.
2. 3 главных причины для геномного секвенирования рака. [Электронный ресурс]. – Заглавие с экрана. Режим доступа: <https://addon.life/ru/2021/08/02/genomic-sequencing-cancer/> – Дата обращения: 7.06.2024.
3. DiStefano MT, Goehringer S., Babb L. et al. The Gene Curation Coalition: A global effort to harmonize gene-disease evidence resources // Genetics in medicine: official journal of the American College of Medical Genetics. 2022.
4. Emmert-Streib F. Personalized medicine: Has it started yet? A reconstruction of the early history // Front Genet. №3. 2013. DOI: 10.3389/fgene.2012.00313. – Дата обращения: 7.06.2024.

## Интеграционная основа информационно-управляющей системы предприятия

Ф.А.Попов, А.В.Кодолов, Д.Г. Абрамов

АО «Федеральный научно-производственный центр  
«Алтай», г. Бийск

В статье, на примере АО «ФНПЦ «Алтай» рассмотрены вопросы и особенности создания цифровой платформы, представленной совокупностью цифровых данных, программным и информационным обеспечениями, интегрированных в единую информационно-управляющую систему (ИУС) предприятия.

**Ключевые слова:** *цифровая трансформация, научно-производственное предприятие, цифровая платформа, интегрированная информационно – управляющая система, онтологическое моделирование.*

Работы в области автоматизации процессов управления в различных отраслях промышленности начали развиваться в СССР в конце 1960-х. При этом основное внимание уделялось АСУТП и АСУП без рассмотрения их взаимосвязей, как локальных программно-технических разработок. С середины 1970-х годов в научно-производственных отраслевых центрах наметился переход к комплексному рассмотрению проблемы, к пониманию необходимости *интеграции систем автоматизации* между собой, в идеале – в рамках систем управления предприятием в целом [1,2]. В ФНПЦ АЛТАЙ в настоящее время решение данной проблемы обуславливает как повышение качества создаваемых изделий, так и требуемые уровни надежности функционирования систем управления технологическими процессами (АСУТП) и безопасности производства в целом. Кроме того, в этом случае речь идет о научно-производственном предприятии, где производство является опытным, задействованным в цепочке <НИР, ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ИЗГОТОВЛЕНИЕ, ИСПЫТАНИЯ>, вследствие чего актуальными являются проблемы *горизонтальной интеграции* этапов создания новых видов изделий.

Эти работы предусматривают создание цифровой платформы, представляющей собой совокупность данных, моделей и инструментов, информационно и технологически интегрированных в

единую ИУС предприятия. [3,4,5]. Интегрированная цифровая система управления при этом призвана обеспечить создание единого пространства данных для принятия управленческих решений и повышения операционной эффективности. Соответствующая ИУС в целом представляет собой многоуровневую систему управления, обеспечивающую автоматизированный сбор и обработку информации, необходимой для оптимизации режимов работы предприятия в соответствии с принятыми критериями. При этом критерием управления могут являться как технико-экономический, так и технический показатели, достижение которых обеспечивает необходимые уровни качества выходного продукта и безопасности протекания ТП.

Ее основными структурными компонентами являются: *Централизованное хранилище данных (ХД)* - интегрированная база зависимых от времени данных, предназначенная для подготовки отчетов и анализа с целью поддержки принятия решений техническими специалистами и руководством; *технологическая база данных реального времени*, предусматривающая синхронизацию, репликацию и резервирование данных для обеспечения отказоустойчивости системы управления; *база нормативных документов*, определяющих условия и регламент работы производства; *витрины данных*, ориентированные на представление необходимой информации техническим специалистам и руководству предприятия; *комплексы АРМ* обслуживающего персонала, технических специалистов и руководства, оснащенные интеллектуальными пользовательскими интерфейсами; *подсистемы централизованного контроля, программно-логического и интеллектуального управления, сбора и передачи данных* [3].

В целом все данные, формируемые в процессе создания изделий, сохраняются в структуре ХД и используются в дальнейшем как при создании новых изделий, так и при формировании цифрового паспорта изделия при завершении процесса его создания. При этом рассматриваемое ХД разрабатывается с учетом необходимости интеграции данных в рамках единого информационного пространства предприятия (ЕИП) и является основой *информационной платформы*, источником всех данных по текущему состоянию работ, необходимых руководству предприятия, техническим специалистам, производственным службам.

При создании такого рода систем на первый план выступает проблема концептуализации предметной области, заключающаяся в ее представлении через описание множества понятий и связей между

ними. На современном уровне развития методов проектирования сложных ИС для этих целей чаще всего применяется *онтологическое моделирование*, обеспечивающее формальное представление предметной области, включающее словарь ее понятий и соответствующих им терминов, а также логические выражения (аксиомы), описывающие множество отношений между понятиями [6]. Другими словами, онтологическая модель в нашем случае – концептуальная модель предметной области ИУС, описывающая систему ее понятий в явном виде, обеспечивающая согласованное понимание этой области разработчиками и пользователями ИУС, представленная в цифровом виде. При этом онтология выступает как в качестве высокоуровневого интерфейса к внутреннему ХД, упрощая доступ к данным, так и определяет формат представления данных в самой ИУС в виде тех же объектов предметной области (экземпляров понятий онтологии) и отношений между ними, что позволяет упростить обмен информацией между ее разнородными компонентами и модулями.

Онтологии используются как при проектировании и разработке системы управления, так и в качестве полноправного компонента в процессе ее функционирования. На начальном этапе разработки интегрированной системы онтологии позволили: провести структуризацию предметной области, выделить в ней основные концепты и их взаимосвязи, определить функциональность разрабатываемой системы, описать на концептуальном уровне классы решаемых задач, методы их решения и используемые данные, абстрагируясь от их конкретной программной реализации и физических средств представления.

Весь набор онтологий в рамках ИУС подразделяется на уровни: *верхний; предметной области; данных; задач*. Онтология *верхнего* уровня отображает взаимосвязь понятий, обусловленных процессами цифровизации предприятия в целом на уровне ИУС. Сосредоточившись на этапе изготовления изделий, как ключевом при их создании, отметим, что онтология данной *предметной* области отображает взаимосвязь понятий соответствующей интегрированной АСУТП. Ее компонентами являются онтологии обеспечений: технического, программного, информационного. Онтология *данных* при этом отражает особенности информационных структур, формируемых в процессе функционирования АСУТП. Онтология *задач* описывает типы решаемых системой задач, определяя тем самым ее функциональность и включает описания задач, а также модулей, реализующих их решения.

При этом особое внимание уделяется онтологиям технического, программного и информационного обеспечений, отражающим их структуру, состав и особенности, позволяющим наиболее эффективно разрешить проблемы интеграции АСУТП в составе ИУС. В частности, здесь разработана и приведена классификация событий в технологических процессах и обусловленных этими событиями ситуаций; особенности разработки и отладки прикладного ПО; особенности взаимодействия пользователей различных уровней с АСУ; эффективность, качество и надежность прикладного ПО, в т.ч. использование мобильных и мультиагентных систем.

В заключение необходимо отметить, что все рассмотренные выше работы ориентированы на интенсификацию процессов создания новых видов изделий на предприятии с максимальным учетом обеспечения их безопасности и необходимого качества [3].

### **Библиографический список**

1. Жарков А.С., Звольский Л.С., Литвинов А.В., Попов Ф.А. Проблемы создания интегрированных АСУ для производств спецхимии и пути их решения. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2014.–188 с.
2. Попов Ф.А., Груздев Г.П., Галигузов С.Н. Информационно-поисковая система в системе автоматизированного проектирования изделий машиностроения // Автоматизация проектирования. –1977. – № 1. – С. 51-56.
3. Абрамов Д.Г., Кодолов А.В., Попов Ф.А., Овчинников А.А. Проблемы и пути цифровизации управления предприятием отрасли спецхимии // Южно-Сибирский научный вестник.–2022.–№ 1.–С. 3-9.
4. Курбатов А.В., Кондрашов Д.А., Драничников И.А., Попов Ф.А. Информационно-измерительная система прочностных испытаний на этапе стендовых испытаний изделий из высокоэнергетических материалов // Южно-Сибирский научный вестник. –2021.–№ 3 (37).– С. 14-18.
5. Кодолов А.В., Попов Ф.А. Особенности построения хранилища интегрированных данных научно-производственного предприятия //МАК: «Математики – Алтайскому краю». [Электронный ресурс]: сб. трудов Всероссийской конф. по математике с международным участием. – Барнаул: АГУ, 2023. – С. 154-157.

6. Gruber T.R. The role of common ontology in achieving sharable, reusable knowledge bases // Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Proceedings of the Second International Conference. J.A. Allen, R. Fikes, E. Sandewell – eds. Morgan Kaufmann, 1991. P. 601-602.

**Разработка базы данных для системы мониторинга и анализа информации с климатических датчиков и метеостанций**

*Н.Е. Сопов, А.А. Колупаев  
АлтГУ, г. Барнаул.*

В статье описаны результаты разработки базы данных web-приложения для мониторинга и анализа данных с климатических датчиков и метеостанций, контроля технического состояния используемого оборудования.

**Ключевые слова:** *web-приложение, программное решение, база данных, SQLAlchemy, backend.*

В настоящее время отсутствует доступная цифровая система, которая полностью удовлетворяет функциональные требования ФГБУ “Государственный природный заповедник “Тигирекский” по наблюдению климатических показателей, их визуализации, фильтрации, многие из этих действий выполняются вручную, что требует значительных временных затрат. В связи с этим возникает необходимость разработки системы, важной частью которой является база данных, поддерживающая функциональные возможности web-приложения.

В ходе работы были проанализированы различные по структуре данные, которые необходимо хранить в базе, а также предусмотрено наличие информации о техническом состоянии климатических датчиков. Перед разработкой было рассмотрено использование различных библиотек и инструментов для работы с базой данных, включая SQLAlchemy и Django ORM. После тщательного анализа функциональности, производительности и удобства использования было принято решение о выборе SQLAlchemy, как наиболее подходящего инструмента для создания базы данных web-приложения. Наличие подробной документации [1], а также актуальность данного решения тоже повлияли на данный выбор. При разработке базы данных были выделены следующие основные требования, которые являются важными при практически любой разработке:

1. Целостность данных: гарантия сохранности и консистентности данных в базе.

2. Масштабируемость: способность эффективно обрабатывать увеличение объема данных и пользовательской нагрузки.

3. Производительность: быстродействие системы при выполнении запросов и обработке данных.

4. Безопасность: защита данных от несанкционированного доступа и утечек.

5. Отказоустойчивость: способность базы данных оставаться доступной и работоспособной при сбоях и отказах.

6. Гибкость и расширяемость: возможность изменения структуры базы данных и добавления новых функций. Стоит обратить внимание, что данное требование не является в данном случае ключевым, так как логика работы web-приложения действует в сильно ограниченной области, следовательно, требования по изменению схемы базы данных могут возникнуть лишь в исключительных случаях.

При разработке схемы реляционной базы была учтена семантика данных. Например, при работе с информацией, связанной с временем, важно избегать их перекрытия или дублирования, недостоверного содержания. Это обеспечит эффективное хранение информации и быстрый доступ к ней. Также следовало учитывать особенности работы сервиса.

Разработка базы данных осуществлялась в соответствии с построенной схемой. Предусмотрены некоторые ограничения, в то время как остальные формировались на моделях данных в процессе валидации. При их установке учитывалась возможность изменения большинства данных без нарушения целостности. Некоторые типы данных хранятся в значительных объемах, что повлекло за собой необходимость оптимизации или определённой реализации небольшой части функционала для обеспечения эффективности.

Планируется разворачивать базу данных с использованием Docker, платформа для разработки, доставки и запуска приложений в контейнерах. Используя Docker, можно создавать изолированные среды для развертывания приложений и баз данных, что обеспечивает удобство и надежность в работе с данными.

Результатом описанной работы стала база данных, которая является основой для серверной части web-приложения, позволяющего эффективно управлять климатическими данными и состоянием оборудования. Успешное внедрение цифровой системы позволит улучшить процессы мониторинга и анализа данных, сократить временные затраты и повысить эффективность работы персонала.

## Библиографический список

1. SQLAlchemy [Электронный ресурс] – URL: <https://www.sqlalchemy.org>
2. Docker [Электронный ресурс] – URL: <https://docs.docker.com/>

## Интервальное оценивание решения прямой геодезической задачи

*С.И. Суханов, Е.П. Крупочкин, А.С. Маничева  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена методике оценки погрешности геодезических измерений, с использованием метода центра неопределенности.

**Ключевые слова:** *геодезия, прямая геодезическая задача, метод центра неопределенности.*

Очень часто при проведении геодезических работ нет возможности измерить координаты всех точек на местности с использованием GPS-приемников. Возникает необходимость определить положение остальных точек на местности относительно измеренных. Для решения данной задачи существует следующая методика, носящая в геодезии название «прямая геодезическая задача». Суть данной задачи заключается в том, что по известным координатам одной точки, дирекционному углу и расстоянию до другой определяют координаты последней.

Дирекционный угол есть горизонтальный угол, отсчитываемый по ходу часовой стрелки от северного направления осевого меридиана или линии, ему параллельной, до направления данной линии местности. Изменяется он от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  [1]. В геодезии осевой меридиан — это меридиан, принятый за ось  $OX$  какой-либо части системы координат на поверхности. В данном случае ось  $OX$  направлена вверх, так как в геодезии принята правая система координат. Осевой меридиан изображается на плоскости прямой линией и является осью симметрии картографической сетки.

В классическом случае постановка прямой геодезической задачи звучит следующим образом: найти координаты  $X_B$  и  $Y_B$  точки  $B$ , если известны координаты  $X_A$  и  $Y_A$  точки  $A$ , расстояние  $d_{AB}$  и дирекционный угол  $\alpha_{AB}$  этой линии (рисунок 1).

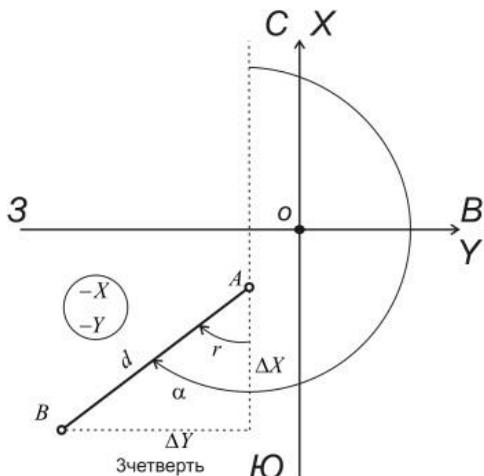


Рисунок 1 - Суть прямой геодезической задачи

Координаты точки  $B$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 X_B &= X_A + \Delta X \\
 Y_B &= Y_A + \Delta Y \\
 \Delta X &= d_{AB} \cos(\alpha_{AB}) \\
 \Delta Y &= d_{AB} \sin(\alpha_{AB})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Так как измерения расстояния  $d_{AB}$  и дирекционного угла  $\alpha_{AB}$  по определению имеют ошибки наблюдения, возникает необходимость их нивелировать. Для нивелировки погрешностей наблюдения предлагается  $n$ -кратное измерение данных величин, с последующим применением метода центра неопределенности.

Поиск координат точки  $B(x_B, y_B)$  предлагается проводить с помощью метода центра неопределенности, основы которого изложены в работах Суханова В.А. [2]. Использовалась следующая схема: ошибки измерения координат исходной точки  $A(x_i, y_i)$ , имеют одинаковую погрешность, а множество неопределенности допустимых значений параметров  $(x_B, y_B)$  в данной схеме записывалось так:

$$\begin{aligned}
 Q(k) &= (x_p, y_p) \left| (x_p - x_i^{расч})^2 + (y_p - y_i^{расч})^2 = d_i^2 \right. \\
 x_B^{расч} &= x_{A_i} + d_i^{расч} \cos \alpha_i^{расч}; \quad y_B^{расч} = y_{A_i} + d_i^{расч} \sin \alpha_i^{расч};
 \end{aligned}$$

$$d_i - k\varepsilon_1 \leq d_i^{расч} \leq d_i + k\varepsilon_1; \quad \alpha_i - k\varepsilon_2 \leq \alpha_i^{расч} \leq \alpha_i + k\varepsilon_2; \quad i \in \overline{1, n},$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  оценки модулей ошибок в измеренных значениях  $x_i^{расч}, y_i^{расч}$ , которые принадлежат прямоугольнику со сторонами  $2\varepsilon_1$  и  $2\varepsilon_2$  соответственно,  $i \in \overline{1, n}$ .

### **Библиографический список:**

1. Кочетова, Э.Ф. Инженерная геодезия: учебное пособие / Э.Ф. Кочетова, И.И. Акрицкая, Л.Р. Тюльникова, А.Б. Гордеев. Под ред. Э.Ф. Кочетовой. Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т; 2-е изд. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2017. – 158 с. ISBN 978-5-528-00236-1
2. Суханов В.А. Исследование эмпирических зависимостей: нестатистический подход: сборник научных статей / под. ред. Н.М. Оскорбина. П.И. Кузьмина. – Барнаул : Изд-во АлтГУ. 2007. – 290 с.

## УДК 631.3

### Создание ЦММ с использованием БПЛА для нужд сельского хозяйства

*С.И. Суханов, Е.П. Крупочкин, А.С. Маничева  
Алтайский государственный университет,  
г. Барнаул*

Основной проблемой для точного земледелия является отсутствие точных цифровых моделей местности (ЦММ). Создание ЦММ для нужд сельского хозяйства в основном сводится к созданию цифровой модели рельефа. Классический способ получения рельефа местности достаточно дорог при больших площадях. В данной статье описывается методика создания цифровых моделей местности с использованием беспилотной авиации.

**Ключевые слова:** *беспилотный летательный аппарат, сельское хозяйство, точное земледелие*

Сегодня все более важное значение приобретают новые способы получения актуальных сведений о точном расположении сельскохозяйственных угодий, их размерах и границах, что связано с необходимостью уточнения их кадастровых границ. При этом наиболее перспективным способом получения информации о структуре угодий, их размерах и их состоянии, является использование беспилотной авиации с разной полезной нагрузкой [1].

В качестве тестовой территории для получения цифровой модели местности с использованием беспилотной авиации была взята часть пахотных угодий КХ «Партнёр» общей площадью 1070 га. (около 11 кв. км) (рисунок 1).

Съемка выполнялась в летний период 2022 г. В качестве беспилотной авиации использовался аппарат самолетного типа: SenseFly eBee X.

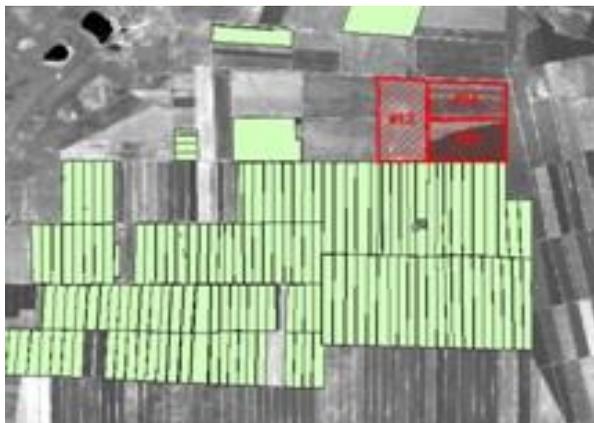


Рисунок - 1. Расположение тестовых полей

Первым этапом технологии создания ЦММ является изучение и рекогносцировка исследуемой территории, построение маршрута полета. Далее следует расстановка на местности опорных и контрольных опознавательных знаков.

На следующем этапе выполняются работы по созданию съемочного обоснования и координирование опорных знаков [2]. Использование беспилотной авиации для больших территорий (что особенно актуально для наших сельскохозяйственных земель с учетом их значительного охвата) обусловлено высокой производительностью, благодаря чему может быть предпочтительнее инструментальной съемки. Однако данная методика не может обойтись без создания съемочного обоснования, которое необходимо для геодезической съемки опорных знаков, без которых невозможна точная привязка и контроль измерений.

Съемка выполнялась с высоты 100-120 м над точкой старта. Точка старта выбиралась как наиболее высокая и удобная для посадки на исходной территории.



Рисунок 2 - Процесс построения полетного задания в программе “eMotion”

На конечном этапе происходила фотограмметрическая обработка снимков, представляющая собой компьютерную автоматизированную цифровую обработку фотоматериалов с последующим созданием мозаичного ортофотоплана и трехмерной цифровой модели местности. Для фотограмметрической обработки материалов мы использовали программу AgisoftMetashape [3].

Далее при построении ортофотопланов проводилась оценка погрешности его привязки к местности. На ортофотоплане выбираются надежно определяемые при полевых исследованиях точечные объекты, координаты которых можно определить с высокой точностью с использованием GPS измерений.

В нашем случае в качестве точечных объектов выступали контрольные знаки, координаты которых также были определены с использованием GPS измерений. Если  $x_i^k, y_i^k$  координаты контрольных знаков, которые были определены по ортофотоплану, а  $x_i^{GPS}, y_i^{GPS}$  их точные GPS измерения, тогда оценки точности положения объектов можно вычислить используя среднюю квадратическую ошибку ортофотоплана  $CKO$ .

$$CKO_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i^{ck} - x_i^{GPS})^2}{5}} \quad CKO_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (y_i^{ck} - y_i^{GPS})^2}{5}}$$

Для тестовых полей *CKO* определения составило в пределах: 0,2-0,3 м.

С помощью матриц высот высокого разрешения полученных с использование аэрофотосъемки можно выполнить моделирование поверхности и при необходимости 3D-визуализацию полей. Детальный рельеф помогает получить более подробную картину о формировании микростоков и каналов переноса микроэлементов в пределах полей, что важно учитывать при дифференцированном внесении удобрений и подготовке к мелиоративным работам.

### Библиографический список

1. Хлебникова Т.А., Опритова О.А. Экспериментальные исследования точности построения плотной цифровой модели по материалам беспилотной авиационной системы // Вестник СГУГиТ. – 2018. – Т. 23. № 2. – С. 119–129.
2. Крупочкин Е., Папин Д.В. О перспективах использования беспилотной съемки в археологических исследованиях // Теория и практика археологических исследований, 2018. Т. 24. № 4. С. 71-84.
3. Руководство пользователя AgisoftMetashapeProfessionalEdition, версия 1.5 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.agisoft.com/pdf/metashape-pro\\_1\\_5\\_ru.pdf](https://www.agisoft.com/pdf/metashape-pro_1_5_ru.pdf).

## Методы и инструменты восстановления пропущенных значений в данных

*Л.А. Хворова, Ф.Р. Рахматшоев  
АлтГУ, г. Барнаул*

Цель статьи – систематизировать основные подходы, методы и инструменты для заполнения пропусков в данных и продемонстрировать на различных данных использование методов импутирования (заполнения пропусков в данных).

**Ключевые слова:** *импутация данных, восстановление пропущенных значений, эффективности алгоритмов и инструментов импутирования.*

Пропущенные значения – это широко распространенная проблема в анализе данных, с которой приходится сталкиваться многим исследователям и аналитикам. Пропуски могут возникать по разным причинам, например, из-за ошибок в сборе данных, в процессе их хранения или передачи, или ошибок при обработке информации. Пропуски могут возникать из-за отказа участников предоставить определенные данные. Решение, как обработать пропущенные значения, играет важную роль в точности и надежности анализа. Неправильная обработка пропусков может привести к ошибкам в моделях и принятии решений.

В задачи данного исследования входили: обзор и анализ методов и инструментов обработки пропущенных данных [1, 2]; применение методов обработки пропущенных значений к различным данным [3, 4]; анализ и визуализация результатов исследования, оценка эффективности алгоритмов и инструментов импутирования [4, 5].

При решении задачи 1 – обзор и анализ методов и инструментов обработки пропущенных данных определили механизмы формирования пропусков в данных: MCAR, MAR, MNAR.

**MCAR** (Missing Completely At Random) – механизм формирования пропусков, при котором вероятность пропуска для каждой записи набора одинакова. Математически это может быть записано так:

если рассмотреть набор переменных  $X_1, \dots, X_N, X_p$ , то условная вероятность того, что значение переменной  $X_p$  пропущено, не зависит

ни от  $X_p$ , ни от других переменных  $X_1, \dots, X_N$  ( $P = \{X_p = \text{пропуск} \mid X_1, \dots, X_N, X_p\} = P\{X_p = \text{пропуск}\}$ ).

Пропуски относят к **MAR** (Missing At Random), если вероятность пропуска может быть определена на основе другой имеющейся в наборе данных информации, не содержащей пропуска, т.е. условная вероятность того, что значение переменной  $X_p$  пропущено, не зависит от  $X_p$ , но может зависеть от других переменных  $X_1, \dots, X_N$  ( $P = \{X_p = \text{пропуск} \mid X_1, \dots, X_N, X_p\} = P\{X_p = \text{пропуск} \mid X_1, \dots, X_N\}$ ).

**MNAR** (Missing Not At Random) – механизм формирования пропусков, при котором данные отсутствуют в зависимости от неизвестных факторов.

Наличие в массиве пропусков, относящихся к типу MNAR, является для исследователя сигналом о том, что необходимо совершенствовать инструментарий или способ сбора информации.

Понимание механизма формирования пропуска существенно, так как оно дает представление о степени важности пропущенных значений. Поэтому его выявление – первый этап в решении задачи импутации.

**Постановка задачи.** Обозначим  $A_{n \times m}$  матрицу исходных данных, где  $n$  – количество строк матрицы, каждая из которых соответствует тому или иному наблюдению (объекту);  $m$  – количеством столбцов (переменных, признаков, атрибутов), каждый из которых содержит значения некоторого признака, измеренного у каждого объекта;  $a_{ij}$  – элементы матрицы (могут быть как непрерывными, так и категориальными переменными). Некоторые элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A_{n \times m}$  могут содержать пропущенные значения, которые требуется восстановить.

Среди методов обработки пропусков можно выделить следующие: удаление пропущенных значений, заполнение средним или медианным значением, повторение результата последнего наблюдения, метод, предполагающий замену пропущенных значений нулями и добавление специального атрибута-индикатора, принимающего нулевые значения для записей, где данные изначально не содержали пропусков, и ненулевые значения там, где ранее были пропуски (Indicator Method), восстановление пропусков на основе регрессионных моделей, интерполяция, использование предсказательных моделей (это могут быть модели машинного обучения, регрессионные модели или другие алгоритмы, основанные на имеющихся данных), нейронные сети.

Инструментами для эффективного анализа данных с пропущенными значениями являются: Pandas – это библиотека для

анализа данных на языке Python, R – статистический язык программирования и среда разработки для анализа данных, Microsoft Excel – популярное программное средство для работы с таблицами и анализа данных, пакет SPSS Statistics.

При решении задача 2 – применение методов обработки пропущенных значений к различным данным использованы два набора данных: набор данных о диабете (442 записи), который содержит 10 признаков-характеристик, собранных у пациентов с диабетом, и набор данных living house (20640 записей и 8 признаков).

Поскольку в этих наборах данных отсутствуют пропущенные значения, мы удалили некоторые значения, чтобы создать новые версии наборов с искусственно пропущенными значениями. Добавили пропущенные значения в 75% строк.

В данном проекте мы исследуем следующие методы заполнения пропущенных значений: замещение постоянным значением 0; замещение средним значением каждого признака; k замещение ближайшим соседом; итеративное замещение.

Эффективность методов импутирования оценивалась по MSE – средней квадратической ошибке (таблица 1).

Таблица 1 – Эффективность методов импутирования по MSE

Значение MSE	Для полного набора	Замена 0 пропущенных значений	Замена средним ближайших соседей	Замена средними значениями наборов данных	Итеративное замещение пропущенных значений
living house	0.2384	0.3085	0.2948	<b>0.2738</b>	0.3083
diabetes	3340.452	3525.6014	<b>3494.5066</b>	3535.6769	3505.0721

Визуализируем расчеты mse (рисунок 1 и рисунок 2).

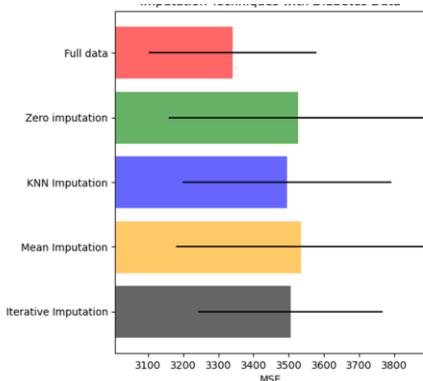


Рисунок 1 – Значения MSE для набора living house

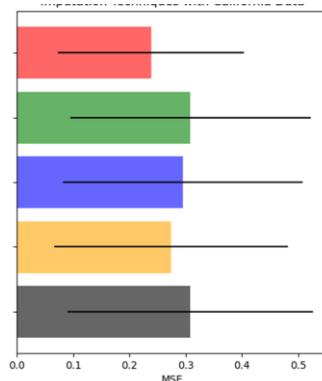


Рисунок 2 – Значения MSE для набора diabetes

Из рисунков видно, что для данных diabetes меньшую ошибку дает метод заполнения значениями ближайших соседей, а для данных living house меньшая ошибка при заполнении пропущенных значений достигается заполнением средним значением выборки.

Отметим, что для итеративного замещения пропущенных значений используется функция `IterativeImputer`. При этом строится линейная регрессия, моделирующая каждое пропущенное значение в зависимости от других значений.

## Библиографический список

1. Литтл Р.Дж.А., Рубин Д.Б. Статистический анализ данных с пропусками. Москва, Финансы и статистика, 1990. 430 с.
2. Яркова О.Н. Импутация данных методами статистического моделирования // Инженерный вестник Дона, №6 (2023). <https://cyberleninka.ru/article/n/imputatsiya-dannyh-metodami-statisticheskogo-modelirovaniya/viewer>.
3. Пимонов А.Г., Глебова Е.А., Сарапулова Т.В., Глебов В.В. Методы, алгоритмы и программные средства для восстановления пропущенных данных в массивах экономической статистики // Экономика и управление инновациями. 2017. №3. С. 52-66.
4. Фомина Е.Е. Сравнительный анализ методов импутации категориальных переменных в массивах с результатами

социологических опросов // Вестник ПНИПУ. Социально-экономические науки. 2021. №1. С. 83-96.

5. Зангиева И.К., Тимонина Е.С. Сравнение эффективности алгоритмов заполнения пропусков в данных в зависимости от используемого метода анализа // Мониторинг общественного мнения. 2014. №1(119). С. 42-55.

## СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

УДК 579.64

### Построение модели коллаборативной фильтрации с использованием глубокой нейронной сети.

*Я.И. Гришанов, И. В. Пономарев*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена построению алгоритма коллаборативной фильтрации, расширяя производительность матричной факторизации нелинейной функцией, а также глубокой нейронной сетью.

**Ключевые слова:** *матричная факторизация, нейронная сеть, коллаборативная фильтрация.*

Среди различных техник коллаборативной фильтрации матричная факторизация является наиболее популярным методом, который проецирует пользователей и объекты в скрытое пространство, используя вектор скрытых характеристик для представления пользователя или объекта. После этого взаимодействие пользователя с объектом моделируется как скалярное произведение их скрытых векторов.

Статья фокусируется на построении модели, обрабатывающей неявную обратную связь. Неявная связь косвенно отражает предпочтения пользователей через такие действия, как просмотр видео, и клик на объекты. По сравнению с явной обратной связью, неявную можно отслеживать автоматически, однако ее использование представляет больше сложностей, так как удовлетворенность пользователя не наблюдается напрямую, и существует естественный дефицит негативной обратной связи.

Обозначим  $M$  и  $N$ , как количество пользователей и объектов соответственно. Матрица взаимодействий пользователь-объект  $Y \in R_{M \times N}$  на основе неявной обратной связи определена следующим образом:

$$y_{ui} = \begin{cases} 1, & \text{если есть взаимодействие} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Задача рекомендации с неявной обратной связью формулируется, как задача нахождения оценки ненаблюдаемых записей в  $Y$ , которые используются для ранжирования объектов. Формально, это можно записать, как:  $\hat{y}_{ui} = f(u, i | \beta)$ , где  $\hat{y}_{ui}$ - предсказанная оценка,  $\beta$  - параметры модели, а  $f$  - функция, отображающая параметры модели в предсказанную оценку.

Для решения задачи оценивания выбрана архитектура модели Neural Matrix Factorization (*NeuMF*), которая комбинирует два основных подхода в рекомендательных системах: матричную факторизацию и нейронные сети. Этот подход позволяет модели использовать преимущества обоих методов, обеспечивая более высокую точность прогнозирования. Матричная факторизация используется при работе с разреженными данными, учитывая скрытые взаимосвязи между пользователями и объектами, в свою очередь глубокая нейронная сеть способна улавливать более сложные зависимости и моделировать нелинейную функциональную связь, что улучшает обобщающую способность модели.

В общем виде архитектура выглядит следующим образом:

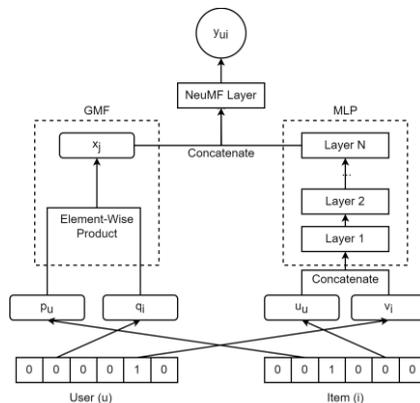


Рисунок 1 - Архитектура модели.

Модель преобразует входные данные в вектора вложений  $p_u$ ,  $u_u$ , а также  $q_i$ ,  $v_i$ , с заданным  $K$  - размерностью латентного пространства. Важно отметить, что слои вложений также являются параметрами модели и обучаются независимо друг от друга. Выходы слоев вложений передаются далее, как входы в обобщенную матричную факторизацию и многослойный перцептрон.

Обобщенная матричная факторизация (*GMF*) представляет собой расширение классической матричной факторизации, которое вводит дополнительные функции для более гибкого моделирования взаимодействий между пользователями и объектами. Расширение заключается в том, чтобы ввести некоторую нелинейную функцию  $g$ , применимую к вектору оценок латентных факторов. Формально, *GMF* можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi(p_u, q_i) &= p_u \odot q_i, \\ \hat{y}_{ui} &= g(\phi(p_u, q_i)),\end{aligned}$$

это позволяет модели захватывать более сложные паттерны взаимодействия, которые не могут быть учтены обычной линейной комбинацией скрытых факторов, что делает её более гибкой и мощной для рекомендательных систем и других задач, связанных с факторизацией матриц.

Многослойный перцептрон используетconcatенацию слоев вложений, что позволяет учитывать взаимодействие пользователей и объектов. Таким образом, модель наделяется высокой степенью гибкости и нелинейности для изучения взаимодействий между  $u_u$  и  $v_i$ . Модель *MLP* в структуре *NeuMF* определяется как:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \phi_1(u_u, v_i) = [u_u, v_i], \\ \lambda_2 &= \phi_2(\lambda_1) = a_2(W_2^T \lambda_1 + \beta_2), \\ &\dots \\ \lambda_L &= \phi_L(\lambda_{L-1}) = a_L(W_L^T \lambda_{L-1} + \beta_L), \\ \hat{y}_{ui} &= \phi_L(\lambda_{L-1}),\end{aligned}$$

где  $\lambda_k$  - выход соответствующего слоя,  $a_k$  - функция активации -го слоя,  $W_k$ - матрица весов,  $\beta_k$  - вектор смещения.

Результаты *GMF* и *MLP* concatенируются, однако с тем исключением, что эти две модели использовали предварительно разделенные данные, так как совместное использование слоев вложений может ограничить производительность объединенной модели, и передаются в слой *NeuMF*, его задача заключается в том, чтобы сделать предсказание всей модели. Формально это можно записать, как:

$$\begin{aligned}\phi^{GMF} &= g(p_u \odot q_i), \\ \phi^{MLP} &= a_L(W_L^T (a_{L-1}(W_{L-1}^T(\dots) + \beta_{L-1})) + \beta_L), \\ \hat{y}_{ui} &= \sigma([\phi^{GMF}, \phi^{MLP}]),\end{aligned}$$

где  $\sigma$  - некоторая функция активации. Таким образом  $\hat{y}_{ui}$  является предсказанием оценки для  $y_{ui}$ .

Обучение модели проводится на публично доступном датасете MovieLens. Этот датасет содержит информацию о рейтингах фильмов,

а также описания фильмов и информацию о пользователях. Данные для MovieLens собирались и поддерживались группой исследователей в рамках проекта GroupLens Research. Данные, на которых проводилось обучение имеют структуру: `userId` - идентификатор пользователя, `itemId` - идентификатор фильма, `rating` - оценка, поставленная пользователем, `timestamp` - время в секундах, от начала эпохи Unix. Для оценки эффективности модели используется метод поэлементной кросс-валидации. Согласно методу обучение происходит на всем датасете, исключая одну запись, на которой далее проводится тестирование модели, и так для всех данных. Далее случайным образом выбирается 100 объектов, с которыми пользователь не взаимодействовал, и среди них ранжируется тестовый объект. Эффективность ранжированного списка оценивается с помощью Hit Ratio (HR) и Normalized Discounted Cumulative Gain (NDCG). Таким образом, HR измеряет, присутствует ли тестовый объект в топ-10 списке, а NDCG учитывает позицию попадания, присваивая более высокие баллы за попадание на верхние позиции. Рассчитываются обе метрики для каждого тестового пользователя и записывается средний результат в рамках эпохи.

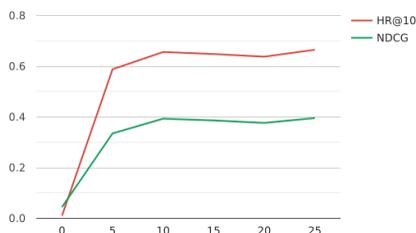


Рисунок 2 - Значения метрик HR@10 и NDCG в ходе обучения.

## Библиографический список

1. Рекомендательные системы на практике / пер. с англ. Д.М. Павлова. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 448 с.
2. Ricci F Recommender Systems Handbook / F Ricci. – New York : Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011. – 845 с.

3. SciPy Stats: сайт. [Электронный ресурс] – URL:  
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.mannwhitneyu.html>
4. Factorization machines / S. Rendle - New York, 2009. - 995 с.
5. Sparse linear methods for top-n recommender systems. / X. Ning and G. Karypis. Slim, Vancouver, 2011. - 497–506 с.

## Разработка обучающих игр и программ под VR

*Т.К. Ерофеев, Н.В. Лысенко*

*АлтГУ, г. Барнаул.*

В данном исследовании рассматривается процесс разработки обучающей игры, нацеленной на развитие памяти и логического мышления у детей, а также использование технологий Unity для её создания.

**Ключевые слова:** *VR-приложение, Unity, Unity XR, Blender, Adobe Photoshop, C#, головоломки.*

В наше время виртуальная реальность предоставляет уникальные возможности для создания инновационных обучающих игр и программ, которые способствуют развитию различных навыков у пользователей.

Целью разрабатываемой игры является обеспечение детей возможностью развивать свою память и логическое мышление через интерактивное взаимодействие в виртуальной реальности.

Современные исследования показывают, что применение виртуальной реальности в учебных процессах и развлекательных целях способствует более глубокому усвоению информации и развитию аналитического мышления. Развитие способностей памяти и логического мышления у детей является одной из основных задач образовательной системы, и технологии виртуальной реальности представляют собой эффективный инструмент для достижения этой цели.

Для создания обучающей игры воспользуемся мощным инструментом разработки - Unity. Эта платформа позволяет объединить различные компоненты, такие как графический движок, физический движок, звуковой движок, анимации и инструменты аналитики в одной среде, обеспечивая эффективную и удобную разработку.

Игра разрабатывается на языке программирования C# с использованием интегрированной разработочной среды Unity. Для создания ассетов используются инструменты Blender и Adobe Photoshop, что позволяет создавать высококачественные графические элементы и анимации. Интеграция Unity XR обеспечивает поддержку

виртуальной реальности, что позволяет пользователям погрузиться в увлекательный мир обучения.

На данный момент реализованы многие скрипты представляющие собой некоторые испытания (мини-игры) внутри одного уровня. Для начала, были созданы скрипты для управления виртуальной реальностью, включая обработку пользовательского ввода, отслеживание положения и ориентации гарнитуры VR, а также взаимодействие с контроллерами. Также велся поиск и создание 3D моделей для игры, с которыми пользователь на постоянной основе будет взаимодействовать. Далее, были разработаны скрипты для создания мини-игр, интегрированных в один уровень. Игроку предстоит внимательно следить за окружением, затем запоминать и анализировать изменения, чтобы успешно решать головоломки. Такой подход к разработке игры помогает развивать у игрока навыки внимательности, концентрации и способность взаимодействовать с окружающим миром для эффективного решения поставленных задач.

Для первого уровня был разработан и воплощен сценарий, который включал в себя распределение геометрических фигур в соответствии с их цветом и формой. Второй уровень был ориентирован на развитие памяти игрока через сценарий, в котором нужно найти потерянный предмет, запомнить последовательность действий и расставить предметы в нужном порядке.

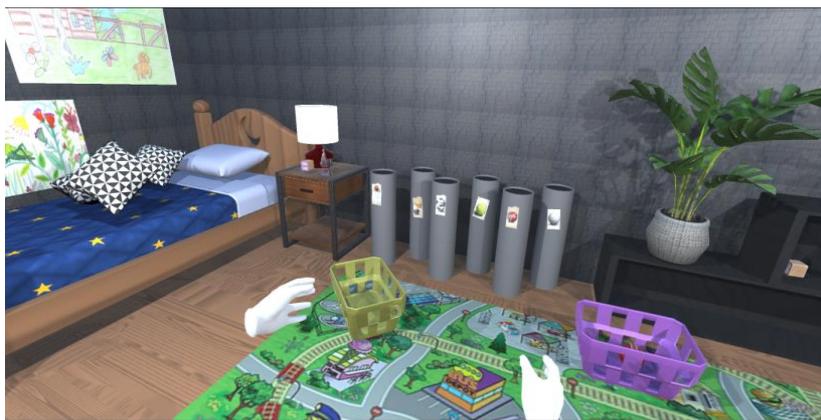


Рисунок 1 - Скриншот разработанного уровня

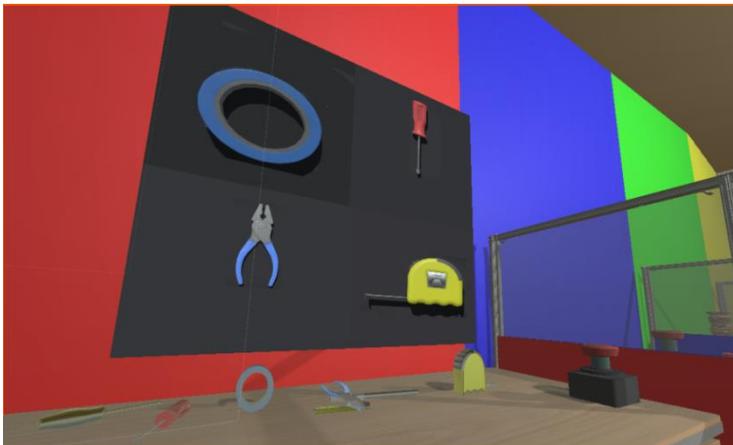


Рисунок 2 - Скриншот разработанного уровня

В дальнейшем планируется:

- Разработать несколько сценариев для текущей игры.
- Создать и воплотить другие обучающие игры.

Разработка обучающих игр и программ под VR представляет собой захватывающее и перспективное направление, способствующее развитию креативности, обучения и развлечений.

### **Библиографический список**

1. Unity documentation [Электронный ресурс]. - URL: <https://docs.unity.com/>.
2. Unity Asset Store - The Best Assets for Game Making. [сайт]. – URL: <https://assetstore.unity.com>.
3. Ларкович С.Н Евдокимов П.В «С# для UNITY-разработчиков. Практическое руководство по созданию игр».

## Классификация текстовых сообщений школьников с помощью методов NLP

*А.С. Маничева, В.В. Журавлева,  
С.И. Суханов, Л.Л. Смолякова  
АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена исследованию возможности разбивать на классы текстовые сообщения школьников в социальной сети «ВКонтакте». Классификация основывается на методах работы с естественным языком (NLP).

**Ключевые слова:** *естественный язык, классификация, социальные сети, школьник.*

В современном цифровом мире социальные сети играют значительную роль не только как средство общения и развлечения, но и как источник данных о поведении пользователей. Цифровые следы, оставляемые пользователями в сетях, стали объектом внимания исследователей в различных областях, таких как маркетинг, научная коммуникация, образование и других [1–3]. Машинное обучение и обработка естественного языка в данном контексте становятся неотъемлемой частью анализа и интерпретации пользовательских данных.

В данной статье мы рассмотрим, как технологии искусственного интеллекта используются для анализа данных из социальных сетей. Исследуется задача классификации текстовых сообщений пользователей социальной сети «ВКонтакте», соответствующих возрасту школьников четырнадцати–восемнадцати лет, проживающих на территории Алтайского края. Сообщения размечены в соответствии с тематикой сообществ, где они были расположены. Первоначальное количество тематик было сокращено до двух, имеющих наибольшее количество сообщений: «Покупки, интернет-магазины» – 130 записей, «Компьютерные игры, Киберспорт» – 198 записей, «Музыка» – 93 записи. К сообщениям были применены стандартные процедуры предобработки и векторизации.

Цифровое представление текстового описание позволяет воспользоваться методами машинного обучения для решения задачи многоклассовой классификации. На этом этапе была выбрана модель

Наивный байесовский классификатор (Naive Bayes). Данная модель предназначена для многоклассовой классификации данных с независимыми признаками и реализуется библиотекой Sklearn языка программирования Python.

Данные для обучения и тестирования разбивались в соотношении 80% к 20%. Путем варьирования значения  $\alpha$  (параметра сглаживания) модели Наивного байесовского классификатора в пределах от 0 до 1 с шагом 0,1 было оценено качество классификации по доле правильных ответов (accuarcy). Наилучшее значение accuarcy (0,53) было достигнуто при  $\alpha = 0,5$ .

В дальнейшем планируется улучшить качество классификации на основе алгоритма Наивный байесовский классификатор за счет использования более сбалансированного набора исходных данных и расширения тематик тестовых сообщений.

## Библиографический список

1. Тулупьева Т.В., Суворова А.В., Азаров А.А., Тулупьев А.Л., Бордовская Н.В. Возможности и опыт применения компьютерных инструментов в анализе цифровых следов студентов-пользователей социальной сети // Компьютерные инструменты в образовании. – 2017. – №5. – С. 3–13.

2. Айтенов Р.Д., Маничева А.С., Журавлева В.В. Классификация школьников по цифровым следам на основе нейронной сети MLP // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул, 2021. – 264 с. – С. 199-202.

3. Журавлева В.В., Маничева А.С., Фещенко А.В., Берестов А.В. Исследование различимости цифровых следов у различных групп школьников на территории Алтайского края // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. – 2020. – Т. 1, № 4. – С. 121–125.

## Разработка веб-приложения для прогнозирования результатов спортивных матчей

*С.А. Нестеров, И.В. Пономарёв*

*АлтГУ, г. Барнаул*

Статья посвящена разработке веб-приложения для прогнозирования исходов спортивных событий, которое позволит оценить составленные программой проценты на исходы определенной подборки матчей по разным видам спорта.

**Ключевые слова:** *веб-приложения, разработка веб-сервиса, букмекерская деятельность, прогнозирование исходов спортивных событий, проценты.*

Букмекерская контора — это игорное заведение, занимающееся приемом ставок. Букмекер оценивает вероятность того или иного исхода события и на каждый из возможных исходов выставляет коэффициент — числовое значение, на которое умножается ставка в случае успеха. [1]

Букмекерские конторы могут осуществлять свою деятельность в наземных пунктах приема ставок (ППС), а также в сети Интернет (онлайн-букмекеры). В пунктах приема ставок осуществляется наличный расчет, а выплата выигрышей производится через кассу. Некоторые компании называют свои ППС клубами и оформляют их так, чтобы у клиентов была возможность не только делать ставки, но и полноценно отдыхать, просматривая прямые трансляции спортивных событий.

Несмотря на комфорт, который букмекеры стараются обеспечить посетителям своих пунктов приема ставок, из года в год растет популярность онлайн-букмекеров — тех, которые принимают ставки через Интернет.

Цель работы – разработка веб-приложения для прогнозирования исходов спортивных событий, которое позволит оценить составленные программой проценты на исходы определенной подборки матчей по разным видам спорта. Для достижения этой цели были решены следующие задачи:

1. Разработка API: Создание и настройка API со статистикой, который будет хранить информацию о матчах, командах и их статистике.

На данный момент API хранит в себе данные о всех командах в трех разных дисциплинах и набор предстоящих матчей для каждого вида спорта.

Наш искусственно смоделированный API реализован следующим образом:

- На каждый вид спорта создается отдельный массив объектов, каждый объект является матчем.  
Внутри объекта матча находятся ID двух команд, место проведения и дата проведения.
- Для каждого вида спорта есть массив объектов со списком команд и их детальной статистикой  
Например, баскетбольные команды содержат следующие показатели: ID, название, логотип, средний процент успешных штрафных бросков, среднее кол-во подборов, среднее кол-во очков за игру и среднее кол-во фолов за игру.

2. Разработка функциональности прогнозирования: Реализация алгоритмов и логики, позволяющих программе оценивать проценты на победу команд на основе имеющихся данных и статистики.

Для каждого вида спорта был разработан свой отдельный алгоритм подсчета различных исходов матча.

Как пример, в баскетболе у каждой команды следующие показатели:

$R$  – среднее кол-во подборов,  $F$  – среднее кол-во фолов,  $T$  – средний процент успеха штрафного броска,  $S$  – среднее кол-во очков за игру.

Способ подсчета букмекерского коэффициента «эффективности» баскетбольной команды:

$$E = S \cdot \frac{\frac{R}{40} \cdot T}{F}$$

Далее подсчитываем эффективности двух команд и вычисляем процент вероятности победы той или иной команды

$$P1 = \frac{E1}{E1 + E2}, P2 = \frac{E2}{E1 + E2}$$

Таким образом получаем  $P1$  &  $P2$  – проценты победы в матче той или иной команды. На рисунке 1 результат подсчета в интерфейсе:

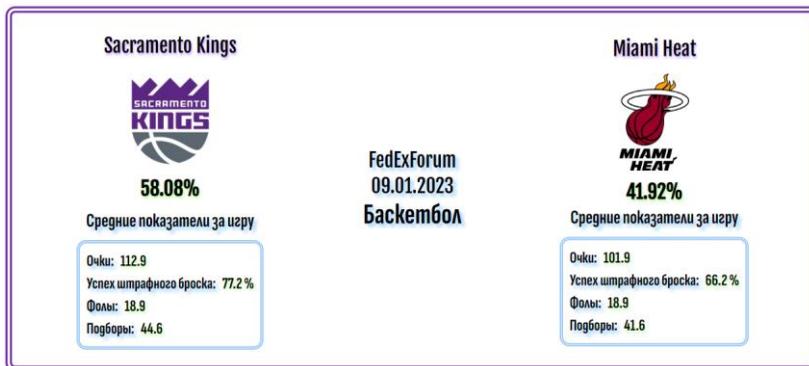


Рисунок 1 – Пример матча, который увидит пользователь

Также пользователю доступна вся статистика команд, из которой складывается вероятность.

Для других видов спорта расчет вероятности исхода вычисляется по несколько другим формулам, отражающим специфику конкретного спорта.

3. Создание пользовательского интерфейса: Разработка веб-интерфейса, который позволит пользователям выбирать вид спорта и просматривать соответствующие матчи и проценты на победу.

При разработке пользовательского интерфейса использовались современные технологии веб-разработки:

1. HTML (HyperText Markup Language) – язык гипертекстовой разметки [7]. Он нужен, чтобы размещать на веб-странице элементы: текст, картинки, таблицы и видео.
2. Cascading Style Sheets (CSS) — это язык иерархических правил (таблиц стилей), используемый для представления внешнего вида документа, написанного на HTML
3. JavaScript – это интерпретируемый язык программирования с объектно-ориентированными возможностями. [8]
4. React - это декларативная, эффективная и гибкая JavaScript библиотека для создания пользовательских интерфейсов. [5]

5. Redux - это библиотека JavaScript для управления состоянием приложения. Он позволяет легко управлять состоянием приложения в едином хранилище, что делает его более простым и предсказуемым. [3]
6. Redux Toolkit – упрощает процесс управления состоянием приложения и предлагает удобный API для работы с асинхронными запросами и управления состоянием приложения. [4]
7. Tailwind CSS - инструмент, который предоставляет набор готовых классов для быстрой и удобной разработки веб-приложений. [6]
8. React Router - это библиотека маршрутизации для React, которая позволяет создавать SPA (Single Page Application), где каждый компонент приложения может отобразиться на странице в зависимости от URL-адреса. [2]
9. Средой программирования было выбрано платное приложение WebStorm.

Веб-интерфейс дает доступ ко всему необходимому функционалу. На Рисунке 2 отображается приветственная страница, которую видит пользователь при входе.

Сверху находится меню, которое также позволяет оперативно переключаться между видами спорта и списками.

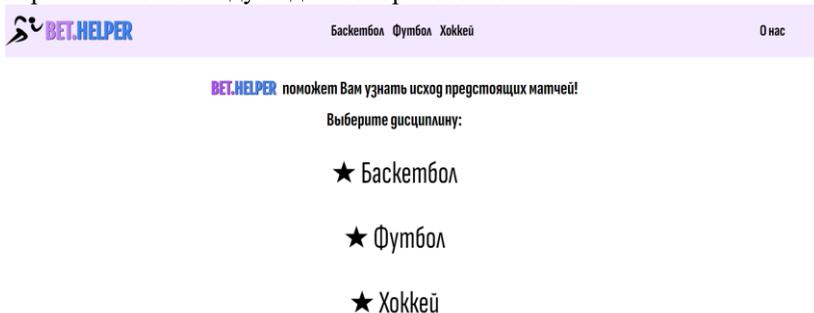


Рисунок 2 – Приветственная страница

При клике на один из видов спорта пользователь попадает на страницу с матчами по выбранной категории (Рисунок 3).



Рисунок 3 – Страница матчей

4. Интеграция с API: Установка соединения с API и реализация функциональности, позволяющей получать данные о матчах и командах из API со статистикой.

Наше API смоделировано локально, значит будем делать имитацию серверного запроса с помощью Promise. Наш Promise распознает категорию спорта, который запрашивает пользователь и подгружает с сервера необходимый набор матчей.

После, с помощью Redux будет реализован Slice с подгружаемым массивом объектов, который позволит гибко изменять запрашиваемые данные и использовать их в любом компоненте. Также создан асинхронный «Thunk», с помощью которого проводится проверка работоспособности сервера и успешной загрузки данных.

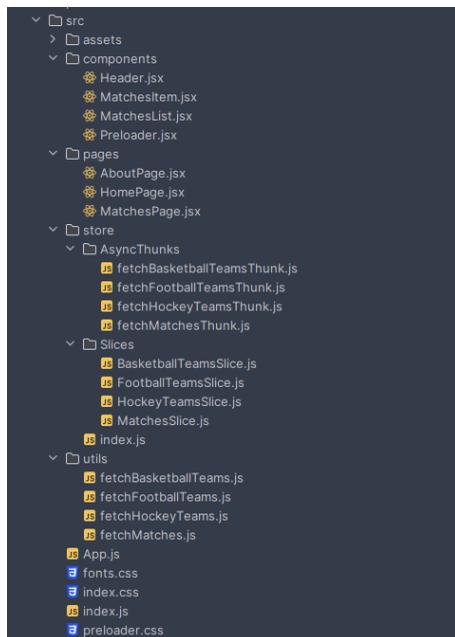


Рисунок 4 – Архитектура проекта

Основная сложность, возникшая в процессе разработки – суть реализации искусственного API. В силу того, что API спортивных событий являются платными, пришлось реализовать свою искусственную модель данных, которые должны приходить со стороны Back-end'a.

## Библиографический список

1. Букмекерская контора: что нужно знать до начала игры / Андрей Антанюк. – [Электронный ресурс] URL: <https://legalbet.ru/shkola-bettinga/bukmekerskaya-kontora-chno-nuzhno-znat-do-nachala-igri/>
2. Официальная документация React Router – [Электронный ресурс] URL: <https://reactrouter.com/en/main> (Дата обращения: 07.06.2023.)
3. Официальная документация Redux – [Электронный ресурс] URL: <https://redux.js.org/>
4. Официальная документация Redux Toolkit – [Электронный ресурс] URL: <https://redux-toolkit.js.org/>

5. Официальный сайт React – [Электронный ресурс] URL: <https://react.dev>
6. Официальный сайт Tailwind CSS – [Электронный ресурс] URL: <https://tailwindcss.com/>
7. Resources from Developers to Developers – [Электронный ресурс] URL: <https://developer.mozilla.org/ru> (Дата обращения: 06.06.2023.)
8. Флэнаган Д. JavaScript. Подробное руководство. - пер. с англ. – СПб: Символ Плюс, 2008.

## СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

УДК 378.147

### Использование цифровых технологий в процессе чтения лекций по математике в техническом вузе

*И.Э. Головичева<sup>1</sup>, В.В. Лодейщикова<sup>1,2</sup>*

*<sup>1</sup>Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул; <sup>2</sup>Алтайский  
государственный университет, г. Барнаул*

Статья посвящена анализу сочетания традиционных методов обучения и методов, использующих электронные средства.

**Ключевые слова:** лекция, цифровые технологии, математика.

В России реализуется ряд программ, направленных на создание необходимых условий для развития цифровой экономики. В первую очередь это Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы и программа «Цифровая экономика Российской Федерации».

Поэтому в современных условиях задача высших учебных заведений – не только дать выпускнику необходимые знания, но и развить мыслительные способности, которые позволят ему осваивать и создавать новые инженерные технологии. Специалист должен уметь использовать математический аппарат при решении сложных инженерных задач.

Изучение математики влияет на интеллектуальное развитие студента. Именно с ее помощью развиваются способности концентрации внимания, логического мышления, аккуратности и точности в любых рассуждениях.

Математика в техническом вузе читается на первом и втором курсах обучения и является для студентов одной из самых трудных дисциплин для усвоения. Проблемы усвоения учебного материала по высшей математике связаны, во-первых, с ее спецификой как науки, которая оперирует абстрактными понятиями и образами; во-вторых, с низким базовым уровнем математической подготовки первокурсников; в-третьих, с большим объемом изучаемого материала по сравнению с

небольшим количеством отведенных на изучение аудиторных часов. Решение этих проблем невозможно при использовании только традиционных методов и средств обучения. Для повышения качества и эффективности учебного процесса преподаватель должен стремиться самыми разнообразными приемами активизировать учебную деятельность студентов: при проведении лекционных и практических занятий использовать цифровые образовательные технологии.

На современном этапе лекция выступает и как организационная форма обучения – специфический способ взаимодействия преподавателя и студента, в ходе которого реализуются различные методы обучения, и как метод обучения – изложение учебного материала в систематической и последовательной форме [1]. Возникает вопрос: стоит ли проводить лекции в традиционной форме или перейти на онлайн лекции, создав электронный курс?

С одной стороны, онлайн лекции — это возможность обучаться, не посещая учебное заведение. Студенты заходят в систему, и изучают теоретический материал самостоятельно.

С другой стороны, большинство студентов первого курса являются вчерашними школьниками, и они привыкли к тому, что учитель излагает на уроке материал максимально подробно. Поэтому для студентов первого года обучения очный регулярный лекционный курс имеет во многом адаптационный характер: многие не умеют самостоятельно извлекать необходимые знания из учебной литературы и нарабатывать умения по методическим разработкам. Изучая материал самостоятельно, студенты зачастую теряются в объемах и с трудом расставляют приоритеты. Кроме этого, у отдельных студентов может быть разный доступ к цифровым устройствам, источникам и сервисам в домашних условиях, так называемый «технологический цифровой разрыв» [2].

К преимуществам традиционной формы проведения лекций можно отнести: систематический характер; упорядоченную, логически правильную подачу учебного материала; организационную четкость; постоянное эмоциональное воздействие личности преподавателя на студента. Ученый-педагог В.И. Загвязинский говорил: «Педагог, читающий лекцию, несет живое знание, обладание ценностями, смыслами, а не просто информацию».

Несомненно, лекции с использованием цифровых технологий являются более наглядными. Лекция в форме презентации позволяет излагать материал с достаточно высокой скоростью. Но для математических дисциплин большая скорость на лекции – это скорее минус. Появление слайда с готовым доказательством теоремы или

выводом формулы может вызвать затруднения в понимании, и студент будет занят только переписыванием, бездумным копированием информации. В случае презентации должна быть анимация, когда материал появляется по частям и позволяет студенту осознанно записывать лекции, или, например, все доказательства и выводы записывать на доске.

Таким образом, использование различных методов мультимедийной системы, позволяет постоянно поддерживать внимание слушателей, а также выделять наиболее существенные и важные моменты.

Для хорошей математической подготовки студентов нужно рационально сочетать традиционные методы с методами, использующими электронные средства обучения.

### **Библиографический список**

1. Калайдо Ю. Н. Особенности проведения лекционных занятий по математике с применением мультимедийных технологий // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы Международной заочной научно-практической конференции (4 – 10 июня, 2018 г., г. Луганск). – Луганск: Книта, 2018. – С. 51-56.
2. Кручинин М.В., Кручинина Г.А., Седов Д.С., Сорокин И.А. Традиционные и цифровые технологии обучения в оценке студентов высшей школы // Человек и образование. – 2020. – № 3 (64) – С. 55-61.

## **Некоторые аспекты применения электронных курсов на базе LMS Moodle.**

*Н.Ф. Кобелева*

*Сибирский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ),  
г.Новосибирск*

Статья посвящена применению системы дистанционного обучения Moodle, использованию в учебном процессе электронных курсов, созданных на её базе, на кафедре высшей математики ИБД СибГУТИ, проблеме возникающей при активном и длительном использовании предметных курсов.

**Ключевые слова:** *электронные курсы, LMS Moodle, математика, методика преподавания, цифровые технологии.*

В высшем образовании применение предметных электронных курсов стало неотъемлемой частью учебного процесса. Содержательное наполнение и структура курсов в разных учебных заведениях, как правило, определяются внутренними инструкциями. В СибГУТИ каждый преподаватель имеет возможность структурировать и наполнять свой электронный курс самостоятельно. Такой подход имеет свои плюсы и минусы. Так, при недостаточных компетенциях преподавателя курс становится похожим на «склад», в котором в произвольном порядке размещены файлы с теоретическими, практическими материалами, задания РГР, причём сам преподаватель заглядывает в электронный курс редко. В случае средних и высоких компетенций преподавателя, электронный курс становится эффективным инструментом в учебном процессе. На кафедре высшей математики Института базовых дисциплин СибГУТИ широко применяются электронные курсы разных форматов [1, с. 231-233]. Их используют для организации самостоятельной работы студентов [2, с. 642-643], проведения текущего и итогового контроля, закрепления теоретического материала, проверки РГР, организации балльно-рейтинговой системы [3, с. 66-67]. Средства СДО MOODLE, такие как тесты и интерактивные лекции, требуют достаточно высоких компетенций от преподавателя для их создания и актуального использования в процессе обучения. Предметные курсы с таким

наполнением находят живой отклик у студентов, а их эффективность подтверждается и статистикой активности студентов в курсе, и результатами БРС. Используя предметные курсы такого формата, преподаватель имеет возможность делать процесс освоения дисциплины более индивидуальным, регулируя доступность тех или иных элементов курса, в случае необходимости, задавая условия доступа к ним. Грамотное составление вопросов в тестах [4, с. 509-510] минимизирует использование онлайн-калькуляторов при их решении, а случайная «раздача» заданий РГР, организованная средствами СДО MOODLE, затрудняет студентам «обмен» решенными заданиями РГР.

При использовании электронных курсов у преподавателя возникают разного рода проблемы, требующие решения [5, с. 111-112]. Поэтому применение электронных курсов в учебном процессе должно сопровождаться грамотной технической поддержкой, что, к сожалению, бывает далеко не всегда. Оказалось, что активное длительное использование предметного электронного курса на больших потоках может привести к серьёзной проблеме: курс становится «перегруженным» и перестаёт функционировать. Так случилось уже с несколькими курсами, в частности, в начале 2023/24 учебного года это произошло с активно используемым на больших потоках в течение трёх лет, курсом «ТВиМС». Причина этой проблемы в том, что СДО MOODLE накапливает большие объёмы статистических данных по работе преподавателя и студентов в электронном курсе. Система «ведёт» журнал всех событий курса с момента его создания. Так, например, СДО MOODLE сохраняет сведения по попыткам, используемых в курсе тестов, даже тех студентов, которые уже отчислились с курса. Объём и разнообразие собираемых СДО MOODLE данных не виден обычному пользователю, но при длительном активном использовании курса становится «тяжелым», что и приводит к «перегруженности» курса. Статистика, собираемая системой, редко используется преподавателями, хотя при достаточных компетенциях преподавателя она может быть полезна для анализа как работы студентов с теми или иными элементами курса, так и самих элементов курса. К сожалению, в случае с курсом «ТВиМС», техподдержка оказалась бессильна, поэтому пришлось в экстренном порядке создавать новый курс. СДО MOODLE предусматривает экспорт и импорт элементов курса, тем не менее просто скопировать всё содержание старого курса в новый не получится. Например, банк вопросов сначала нужно перевести в определённый тип файла, и не все вопросы после переноса в новый курс могут открыться корректно. Так

что не учитывать подобные риски нельзя и, возможно, необходимо производить определённое дублирование курса своевременно, а не в случае форс-мажора. Работа такого рода требует как компетенций преподавателя, так и грамотной технической поддержки.

Обратим внимание на статистические данные, собираемые системой, которые может использовать любой преподаватель в своей работе с предметным курсом, если при назначении роли преподавателя в электронном курсе доступ к статистике открыт. Для анализа предметного курса наиболее информативен «отчёт о деятельности», размещённый в разделе «управление курсом». При выборе интересующего интервала времени, формируется отчёт по каждому элементу (ресурсу) курса с указанием количества просмотров и количества пользователей. Данная информация полезна для анализа предметного курса и для анализа активности студентов. В случае регулярного применения тестов стоит обратить внимание на отчёты, которые находятся в разделе «управление тестом». На мой взгляд, интересен отчёт «статистика», содержащий ряд числовых характеристик как теста в целом, так и по отдельным вопросам теста. По этим характеристикам можно понять, достигает ли преподаватель целей тестирования. Это лишь некоторые примеры статистических данных, собираемых СДО MOODLE.

На основании многолетнего опыта можно говорить о том, что СДО MOODLE удобная платформа для решения разных педагогических целей. Инструменты платформы разнообразны, статистика собираемая системой информативна. Но для эффективной работы с электронными курсами преподавателю необходимы не только компетенции по предмету, но и достаточно высокие компетенции по работе с СДО MOODLE. Грамотная техническая поддержка может обеспечить более разнообразное применение средств платформы, избежать «неожиданного конца» активно используемых курсов. В этом случае собираемая системой статистика станет одним из инструментов, который поможет преподавателю в анализе курса. Замечу, что опыт применения электронных курсов на кафедре ВМ ИБД СибГУТИ регулярно обобщается в статьях преподавателей кафедры, например, [1-7].

### **Библиографический список**

1. Храмова Т.В., Кобелева Н.Ф. Об опыте внедрения элементов e-learning в процесс преподавания дисциплин математического блока // Качество высшего и среднего профессионального образования в

рамках требований профессионального сообщества. Материалы 61-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2020 – С. 230–234.

2. Кобелева Н.Ф. Некоторые подходы к организации самостоятельной работы студентов в предметном электронном курсе на примере преподавания дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» /Современные вопросы естествознания и экономики: Сборник трудов V Международной научно-практической конференции. – Прокопьевск: филиал КузГТУ в г. Прокопьевске, 2023. С. 642-644.

3. Кобелева Н.Ф. Некоторые подходы к организации учебного процесса и итогового контроля с использованием предметного электронного курса в рамках преподавания дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика». // «Актуальные вопросы совершенствования среднего профессионального и высшего образования в современных условиях». Материалы 63-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2022, – С. 64-69.

4. Храмова Т.В. О разработке тестовых заданий для дисциплин математического блока в условиях дистанционного обучения // Актуальные проблемы модернизации высшей школы: высшее образование в информационном обществе / Материалы XXXII Международной научно-методической конференции, Новосибирск, 27 января 2021 года. – Новосибирск: Сибирский государственный университет путей сообщения, 2021. – С.508-511.

5. Кобелева Н.Ф. Обзор некоторых инструментов СДО MOODLE и возникающих при их использовании вопросов и проблем // Актуальные вопросы образования. – 2023.– № 3. – С. 110-115.

6. Захарова Т.Э. Некоторые аспекты проектирования электронного учебного курса // Цифровые трансформации в образовании (E-Digital Siberia'2023): материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. (Новосибирск, 20 апреля 2023 г.); Сиб. гос. ун-т путей сообщения. – Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2023. – С. 148-153.

7. Захарова Т.Э. Интерактивные лекции LMS Moodle как элемент курса в электронной образовательной среде // «Актуальные вопросы совершенствования среднего профессионального и высшего образования в современных условиях». Материалы 63-ой межвузовской научно-методической конференции. – Новосибирск, СибГУТИ, 2022, – С. 51-57.

## Искусственный интеллект в образовании: общие аспекты

*Г.В. Кравченко, А.В. Устюжанова*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В статье проанализированы способы применения искусственного интеллекта в образовании. Рассмотрены передовые информационные технологии, которые играют огромную роль как для преподавателей, так и для обучающихся.

**Ключевые слова:** *информационные технологии, искусственный интеллект, образование.*

Образование меняет жизнь и меняется само за счет внедрения образовательных технологий. Передовые технологии не только облегчают доступ к обучающим процессам, но и делают их более наукоемкими и человекоцентричными. Одной из таких прорывных технологий является искусственный интеллект (ИИ).

Под искусственным интеллектом чаще всего понимают область информационных технологий, первостепенная задача которой состоит в разработке интеллектуальных компьютерных систем, нацеленных на решение задач, ранее решаемых с помощью человеческого разума [1, 3, 4].

Выделяют четыре основных метода искусственного интеллекта [1]:

– машинное обучение, сущность которого заключается в использовании статистических методов и алгоритмов с целью выявления закономерностей и обучения систем прогнозированию или принятию решения без явного программирования;

– глубокое обучение, в основе которого лежит подход, опирающийся на искусственные нейронные сети для замены нейронных путей человеческого мозга. Это представляет особую ценность для развития компьютерного зрения, возможности распознавания речи, осуществления машинного перевода, фильтрации социальных сетей, для выполнения медицинской диагностики и пр.;

– байесовские сети, полагающиеся на вероятностные графические модели, которые используют случайные величины и условную независимость для лучшего понимания и воздействия на установившиеся между вещами отношения;

– генетический алгоритм, использующий для поиска эвристический

подход, смоделированный на основе механизма естественного отбора.

Рассмотрим некоторые способы использования искусственного интеллекта в образовании [1-3]:

*1. Персонализированное обучение.* ИИ, анализируя данные об успеваемости и предпочтениях каждого студента, позволяет создавать уникальные персонализированные учебные планы для каждого обучающегося на основе их индивидуальных потребностей, способностей и темпа обучения.

Используя алгоритмы ИИ, можно создавать персонализированные игры, которые помогают ускорить процесс обучения, делая его более увлекательным, способствуют лучшему усвоению материала. Геймификация в образовании используется для повышения мотивации учащихся, помогает добиться более высокой концентрации, интереса к изучаемому материалу и удержанию внимания на протяжении всего занятия.

*2. Адаптивное обучение.* ИИ может анализировать данные обучения, чтобы ИИ способен отслеживать прогресс каждого студента и предоставлять ему персонализированные рекомендации по материалам и заданиям, и либо корректировать курс, либо информировать преподавателя о материале, который конкретному учащемуся трудно понять.

*3. Автоматическая оценка и обратная связь.* Системы ИИ могут автоматизировать процесс проверки большого количества работ учащихся, анализировать их ответы, а также предоставлять более детальную и немедленную обратную связь.

*4. Накопление данных и прогнозирование успеваемости студентов.* ИИ может анализировать данные обучения для прогнозирования успеха учащихся и выявления возможных проблем заблаговременно.

*5. Виртуальные преподаватели и помощники.* ИИ может использоваться для создания виртуальных помощников или роботов, которые могут: помочь студентам в изучении материала, объяснять сложные концепции, контролировать знания, следить за успеваемостью или за временем выполнения задания.

*6. Обучение с использованием чат-ботов.* Генеративный ИИ используется для улучшения учебного процесса. Например, чат-бот способен отвечать на вопросы студентов, помогая им в процессе обучения, а нейросети могут анализировать результаты проведенных занятий, подбирать темы и материалы для новых, подсказывать, какие программы требуют корректировки и т.д.

За последний год популярность этой технологии ИИ стремительно выросла. В 2023 году в России появилась вторая версия нейросети

GigaChat от Сбер, которая работает в формате чат-бота. Пользователь задает вопрос, а GigaChat использует нейронные сети для обработки информации и генерации ответов. GigaChat умеет: переводить тексты на различные языки; генерировать тексты на основе заданных параметров; создавать изображения на основе заданных параметров; отвечать на фактологические вопросы; предлагать решения для конкретных задач; помогать пользователям в поиске информации; автоматически отвечать на сообщения пользователей.

7. *Прокторинг*. Алгоритмы ИИ используются для проведения прокторинга – особого процесса наблюдения и контроля за проходящим в удаленном формате тестированием или экзаменом. Данная технология считается достаточно освоенной и широко применяется во множестве ведущих вузов международного уровня [2].

Хотя применение ИИ в образовании имеет много преимуществ, важно также учитывать этические и конфиденциальные вопросы, связанные с использованием персональных данных обучающихся и преподавателей и прозрачностью алгоритмов ИИ для обеспечения безопасности и справедливости в образовательной среде.

Таким образом, применение ИИ открывает принципиально новые возможности для совершенствования методов и способов обучения, способствующих улучшению и ускорению учебно-педагогических и коммуникационных процессов.

## **Библиографический список**

1. Вовк Е.В. Методы искусственного интеллекта в учебном процессе высшей школы // Проблемы современного педагогического образования. – 2022. – № 77-1. – С. 109-112.

2. Лучшева Л.В. Социальные проблемы использования искусственного интеллекта в высшем образовании: задачи и перспективы // Научный Татарстан. – 2020. – №. 4. – С. 84-89.

3. Медведев А.В., Головятенко Т.А., Подымова Л.С. Роль искусственного интеллекта в современной системе высшего образования // Высшее образование сегодня. – 2022. – № 3-4. – С. 151-155.

4. Технологии искусственного интеллекта в образовании: перспективы и последствия [Электронный ресурс]. – URL: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000382446> (дата обращения: 19.05.2024).

## Применение динамической программы GeoGebra при подготовке к ОГЭ по математике

*Л.А. Линевич<sup>1</sup>, Г.В. Кравченко<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> МБОУ «Гимназия №123», г. Барнаул*

*<sup>2</sup> АлтГУ, г. Барнаул*

В статье рассмотрена возможность применения кроссплатформенной динамической среды GeoGebra для решения заданий с параметром при подготовке учащихся к ОГЭ по математике.

**Ключевые слова:** *динамическая математика, GeoGebra, построение графиков, уравнение, функция, параметры.*

В современном образовании все более актуальной становится реализация индивидуального подхода к обучению. На уроках сложно ориентироваться на каждого отдельного ученика, так как у детей разный уровень знаний, каждый из них по-разному воспринимает учебную информацию. Без использования новых форм, методов подачи материала и подходов в его изложении невозможно заинтересовать учащихся и повысить эффективность учебного процесса. С их помощью занятия можно сделать интереснее и повысить доступность учебного материала. Необходимость компьютерной поддержки учебного процесса также обусловлена стремительным развитием информационных технологий, которые позволяют реализовать новые подходы к процессу обучения, использовать новые формы подачи учебного материала.

Одной из информационных технологий, широко используемых в образовании, является интерактивная среда GeoGebra [1]. GeoGebra – это бесплатная кроссплатформенная динамическая математическая программа, которая дает возможность создания динамических чертежей для использования на разных уровнях обучения геометрии, алгебры, физики и других смежных дисциплин. Идея программы GeoGebra заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления [3].

GeoGebra – это удобный и эффективный инструмент, который помогает ученикам и преподавателям лучше понять и применять математические концепции. Он стимулирует интерес к математике и облегчает ее изучение благодаря визуализации, интерактивности и

возможностям коллаборации.

Преимущества программы GeoGebra – это наличие онлайн и офлайн версий, простой интерфейс при большом количестве функциональных возможностей. С помощью GeoGebra можно строить геометрические фигуры, находить их периметры и площади, решать уравнения и системы уравнений, проводить графические анализы функций, строить графики, вычислять значения функций в заданных точках и многое другое. Данная программа может быть использована для создания интерактивных учебных материалов, демонстрации математических концепций, исследования и моделирования сложных математических проблем.

Рассмотрим применение программы GeoGebra на примере решения заданий ОГЭ по математике, связанных с построением графиков сложных функций и нахождением значений параметра. В данных задачах второй части ОГЭ уже закладываются базовые принципы решения задач с параметрами, которые очень часто связаны с построением графиков функций.

Задачи с параметрами являются исследовательскими, предполагают развитое логическое мышление и сформированную математическую культуру [2]. Сложность решения задач с параметром чаще всего заключается в том, что учащийся не всегда может увидеть, как меняется решение задачи при изменении параметра. Очень часто при решении таких задач приходится применять комбинацию графического и аналитического методов решений. Построение графиков позволяет наглядно продемонстрировать, как количество решений (на графике – число точек пересечения) меняется с изменением значения параметра. Поэтому динамическую программу GeoGebra, позволяющую точно построить графики необходимых функций, на наш взгляд, нужно использовать для решения таких заданий.

Рассмотрим решение задания №22 ОГЭ по математике с помощью программы GeoGebra.

**Задание:** Постройте график функции  $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$  и определите, при каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

При построении графика указанной функции учащийся не всегда сразу может понять, что это график параболы. Это становится очевидным только при выполнении дополнительных преобразований. Или, если тип графика определен верно, и учащийся правильно проводит преобразование дробно-рационального выражения, но при

этом забывает учесть ОДЗ для начальной функции, то и выколотых точек на графике у него не появляется. Таким образом, получаем неверное построение графика, а значит и неверное нахождение значения параметра.

При решении данной задачи мы предлагаем использовать программу GeoGebra для построения графика функции (рисунок 1). Программа построит параболу, но не уберет на графике точки, соответствующие абсциссам  $x = -2$  и  $x = 3$ . Поэтому, построив в программе GeoGebra график заданной функции, можно предложить учащимся определить, какие точки графика следует выколоть и почему. На графике эти точки можно выколоть самостоятельно, выбрав в настройках построения точек их вид.

Найти значения параметра в программе GeoGebra тоже достаточно просто. Программа при вводе функции автоматически определяет параметр и его исходное значение, добавляя соответствующий ползунок. Менять значение ползунка можно сдвигая его указателем мыши или изменяя числовое значение в настройках ползунка. Ползунки обеспечивают эффективную визуализацию, помогают быстро «считывать» ответ, анализируя различные положения прямой.

В нашем случае нетрудно понять, что прямая  $y = a$  имеет с графиком функции ровно одну общую точку только в трех случаях:

1 случай (рисунок 1) – прямая  $y = a$  проходит через вершину параболы;

2 случай (рисунок 2) – прямая  $y = a$  проходит через точку с абсциссой  $x = -2$  (точка В);

3 случай (рисунок 2) – прямая  $y = a$  проходит через точку с абсциссой  $x = 3$  (точка А).

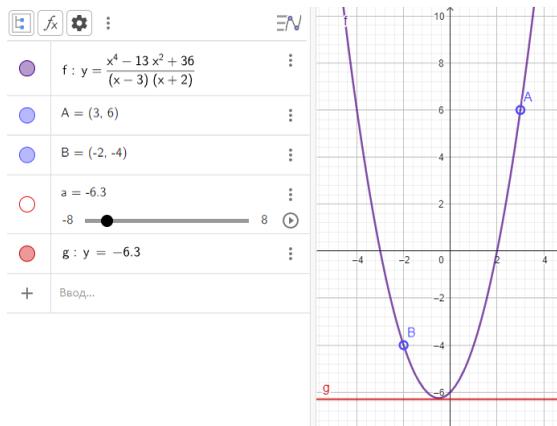


Рисунок 1 – Прямая  $y = a$  проходит через вершину параболы (случай 1)

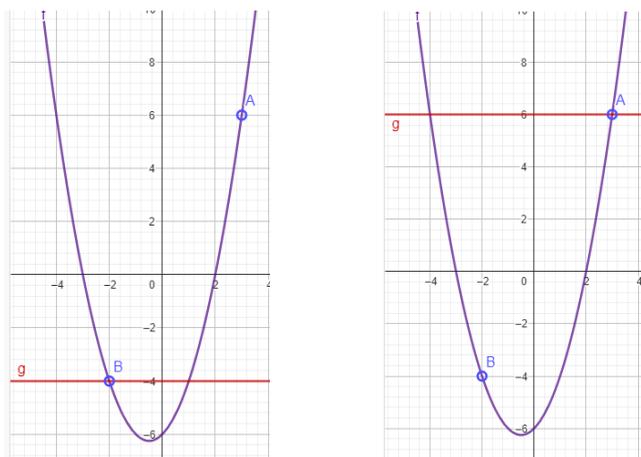


Рисунок 2 – Прямая  $y = a$  проходит через выколотые точки параболы (случай 2 и 3)

Однако, следует заметить, что значение параметра  $a$  в первом случае (без дополнительных настроек) GeoGebra определяет приближенно (истинное значение  $a = -6,25$  вычисляется по формуле определения абсциссы вершины параболы). Поэтому после построения заданных графиков функций в среде GeoGebra, необходимо описать увиденное на графике решение математически.

В результате получим ответ на задание:  $a = -6,25; -4; 6$ .

Кроме того, графики в GeoGebra можно анимировать, что позволяет учащимся лучше понимать и анализировать все возможные случаи расположения графиков. Применение программы GeoGebra позволяет экономить время, способствует подготовке школьников к решению более сложных заданий с параметром, повышает у школьников интерес к математике, повышает наглядность и динамику процессов подачи и усвоения материала.

Применение информационных технологий при изучении математики позволяет формировать у обучающихся навыки исследовательской деятельности, создавая в процессе решения задач проблемные ситуации, помогать школьникам осуществлять самостоятельный поиск решения.

### **Библиографический список**

1. GeoGebra [Электронный ресурс]: Графический калькулятор для функций, геометрии, статистики и 3D геометрии. – URL: <http://www.geogebra.com> (дата обращения: 19.05.2024).

2. Кашицына Ю.Н. Методика обучения решению задач с параметрами с использованием программы GeoGebra // Мир науки и образования. – № 1 (80). – 2020. – С. 249-255.

3. Чернышева Д.А., Кравченко Г.В. Возможности применения интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК-2015», 2015. – С. 225-229.

## **Использование беспилотных летательных аппаратов в образовательных целях**

*А.А. Лисимов*

*Югорский государственный университет,  
г. Ханты-Мансийск*

Статья посвящена вопросу об использовании беспилотных автоматизированных систем, и беспилотных летательных аппаратов в образовательном процессе

**Ключевые слова:** *БАС, БПЛА, образовательный процесс, программирование дронов, технические навыки, интерактивное обучение.*

Аннотация: Современное образование стремится идти в ногу с технологическими инновациями, и одним из наиболее перспективных и важных направлений в нашей стране, а также во всем мире являются беспилотные летательные аппараты (БПЛА). Их использование в образовательных учреждениях открывает новые возможности для обучения, развития навыков и подготовки студентов к профессиональной деятельности в различных областях.

Abstract: Modern education strives to keep pace with technological innovations, and one of the most promising and important areas in our country, as well as worldwide, is unmanned aerial vehicles (UAVs). Their use in educational institutions opens up new opportunities for learning, skill development, and preparing students for professional activities in various fields.

Внедрение БПЛА в образовательный процесс в России началось относительно недавно, но уже показало значительные успехи. Одним из первых проектов по обучению БПЛА в качестве дополнительного образования, стали Кванториумы. Первый такой детский технопарк был открыт в городе Нефтеюганск 28 ноября 2015 года. В список направлений по дополнительным образовательным программам стала программа под названием «аэротехнологии», в процессе получившая названия «аэроквантум». [1]

Главной целью использования БПЛА и БАС в образовательном процессе является повышения интереса к инженерным и техническим специальностям. Обучающиеся получают возможность развивать навыки программирования, моделирования, управления дронами и

т.п., что в свою очередь способствует их технической подготовке. Такое обучение будет интерактивным что в свою очередь позволит отрабатывать сложные концепции и выполнять практические задания, что повысит усвоение материала.

Применение БПЛА может быть эффективно интегрировано в различные программы образовательного процесса. Сельскохозяйственные дроны – анализ почвы благодаря специальным датчикам, посадка семян, обработка сельскохозяйственных посевов. Строительные дроны – проведение аналитики, мониторинг процессов строительства, создание аэрофотоснимков и 3D-моделей объектов строительства, контроль за строительными и ремонтными работами. Полицейский дроны – мониторинг опасных участков дорожного движения, наблюдение за крупными скоплениями людей, мониторинг зданий, поисковые операции. [2]

Перспективы использования БПЛА в образовании огромны. С развитием технологий и снижением стоимости оборудования можно ожидать широкого распространения этих инструментов в школах и университетах. Это сделает получение новых знаний более интерактивным и прикладным. В России к 2030 году подготовят около миллиона специалистов по беспилотным летательным аппаратам. Такую цифру в апреле этого года на совещании президента с членами кабмина назвал глава Минобрнауки Валерий Фальков. [3]

Внедрение БПЛА в образовательный процесс представляет собой важный шаг на пути к модернизации образования. Данная технология не только повысит интерес студентов к учебе, но и предоставит им практические навыки. Важно развивать данную отрасль и поддерживать инициативы, направленные на использование БПЛА в образовании, чтобы обеспечить подготовку специалистов.

## Библиографический список

1. ПЕРВЫЕ ДЕТСКИЕ ТЕХНОПАРКИ РОССИИ / [Электронный ресурс] // времяроссии.рф: [сайт]. — URL: <https://времяроссии.рф/event/pervye-detskie-tehnoparki-rossii> (дата обращения: 5.05.2024).

2. Павлушкин А.А., Тарасов О.А., Федосеева Н.А. Дроны в различных профессиях и их будущее. / Павлушкин А.А., Тарасов О.А., Федосеева Н.А. [Электронный ресурс] // Киберленинка: [сайт]. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/drony-v-razlichnyh-professiyah-i-ih-budushee/viewer> (дата обращения: 5.05.2024).

3. В Минпросвещения рассказали, как будут учить школьников управлять беспилотниками. Подробнее в ПГ: <https://www.pnp.ru/social/v-minprosveshheniya-rasskazali-kak-budut-uchit-shkolnikov-upravlyat-besplotnikami.html> / [Электронный ресурс] // Парламентская газета: [сайт]. — URL: <https://www.pnp.ru/social/v-minprosveshheniya-rasskazali-kak-budut-uchit-shkolnikov-upravlyat-besplotnikami.html> (дата обращения: 15.05.2024).

**Расстояние между ортоцентром и центром тяжести  
треугольника**

*Н. В. Новохатько*

*Алтайский государственный педагогический университет,  
г. Барнаул, Россия*

Работа посвящена измерению расстояний между ортоцентром и центром тяжести треугольника при помощи координатно-векторного метода.

**Ключевые слова:** *треугольник, замечательные точки, координатно-векторный метод, ортоцентр, центр тяжести.*

Изучение расстояний между замечательными точками треугольника является очень важным направлением в геометрии, позволяющим нам глубже понять геометрические законы и принципы, лежащие в основе построения фигур и решения задач.

В работе предполагается вычислить расстояния между ортоцентром и центром тяжести треугольника при помощи координатно-векторного метода [1, 2]. Рассматриваемая задача решена, например, в [3], однако, применение координатно-векторного метода делает сильным решение этой задачи для студентов и даже школьников.

Напомним, что ортоцентр треугольника – точка пересечения высот треугольника, проведенных из его вершин, а центр тяжести треугольника – точка пересечения медиан треугольника.

Идея решения задачи предложенным методом состоит в следующем. Для начала вычислим координаты вершин треугольника  $ABC$  (рисунок 1).

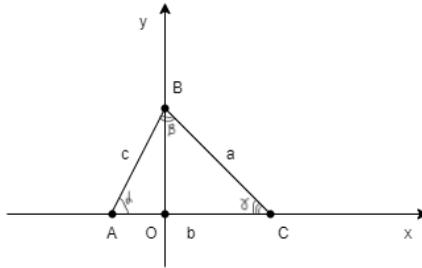


Рисунок 1 – Треугольник ABC

Рассмотрим треугольник  $AOB$ :  $AO = c \cdot \cos\alpha$ . Тогда  $A(-c \cdot \cos\alpha; 0)$ .

$BO = c \cdot \sin\alpha$ . Тогда  $B(0; c \cdot \sin\alpha)$ .

Рассмотрим теперь треугольник  $BOC$ :  $OC = a \cdot \cos\gamma$ , следовательно,  $C(a \cdot \cos\gamma; 0)$ .

Имеем:  $A(-c \cdot \cos\alpha; 0)$ ;

$B(0; c \cdot \sin\alpha)$ ;

$C(a \cdot \cos\gamma; 0)$ .

Найдем координаты точки  $H$  пересечения высот (рисунок 2). Для этого достаточно найти точку пересечения двух высот.

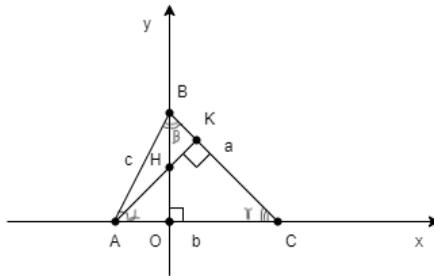


Рисунок 2 – Пересечение высот треугольника ABC

Видно, что уравнение  $BO$ :  $x = 0$ .

Составим уравнение  $AK$  по точке  $A$  и вектору нормали  $\overrightarrow{BC}$ .

Пусть  $K(x; y)$ ;

$\overrightarrow{AK} = (x + c \cdot \cos\alpha; y)$ .

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AK}$ , следовательно,  $a \cdot (x + c \cdot \cos\alpha) + (-c \cdot \sin\alpha) \cdot y = 0$ ;

$AK$ :  $ax - c \cdot \sin\alpha \cdot y + ac \cdot \cos\alpha = 0$ .

Найдем координаты точки  $H$ :

$$\begin{cases} x = 0, \\ a \cdot (x + c \cdot \cos\alpha) + (-c \cdot \sin\alpha) \cdot y = 0. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = a \cdot ctg\alpha. \end{cases}$$

Таким образом,  $H(0; a \cdot ctg\alpha)$ .

Найдем координаты центра тяжести – точки пересечения медиан  $M$  (рисунок 3): для этого достаточно найти точку пересечения двух медиан.

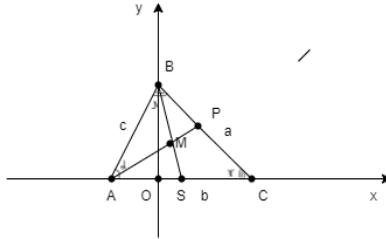


Рисунок 3 – Пересечение медиан треугольника  $ABC$

Имеем:  $P(\frac{a \cdot \cos\gamma}{2}; \frac{c \cdot \sin\alpha}{2})$ ,  $S(\frac{a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha}{2}; 0)$ .

Пусть  $M(x, y)$ . По свойству центра тяжести имеем:  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MP}$

Тогда  $(x + c \cdot \cos\alpha; y) = 2(\frac{a \cdot \cos\gamma}{2} - x; \frac{c \cdot \sin\alpha}{2} - y)$

$$\begin{cases} x + c \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\gamma - 2x, \\ y = c \cdot \sin\alpha - 2y. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:  $M(\frac{1}{3}(a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha); \frac{1}{3}(c \cdot \sin\alpha))$ .

Окончательно получаем, что:

$$|HM| = \sqrt{\left(\frac{a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{c \cdot \sin\alpha - 3a \cdot ctg\alpha}{3}\right)^2}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $ABC$  – произвольный треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и противолежащими углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тогда расстояние между ортоцентром и центром тяжести треугольника равно

$$\frac{1}{3}\sqrt{(a \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\alpha)^2 - (c \cdot \sin\alpha - 3a \cdot ctg\alpha)^2}.$$

## Библиографический список

1. Новохатько, Н.В. Применение координатно-векторного метода к доказательству теорем планиметрии // Актуальные проблемы развития математического образования в школе и вузе: материалы XII региональной научно-практической конференции, г. Барнаул, 16–17 ноября 2023 года / под науч. ред. И. Г. Кулешовой. – Барнаул: АлтГПУ, 2023. – Текст (визуальный): электронный. – С. 196-199.
2. Брехова, В. С. Основы аналитической геометрии в школьном курсе математики / В. С. Брехова, О. П. Малофей // Modern Science. – 2021. – № 5-1. – С. 271-279. – EDN EVYWCW.
3. Избранные лекции по геометрии треугольника и четырехугольника : учебное пособие / Ю. Н. Мальцев, А. С. Кузьмина ; Алтайский гос. пед. ун-т. - Барнаул : АлтГПУ, 2016. - 99 с. - Библиогр.: с. 96-98.

УДК 378.21.

## Некоторые аспекты изучения элементов комбинаторики в школьном курсе математики

*А.К. Юсупова*

*Ферганский государственный университет,  
г. Фергана, Республика Узбекистан*

В статье приведены некоторые методики изучения элементов комбинаторики. В статье изучается Элементы комбинаторики развивает у учеников интуицию, логическое мышление.

**Ключевые слова:** *методика преподавания элементов комбинаторики, учить учеников к творчеству, решения задач комбинаторики, найти нужный подход в задачах, увеличить успех учителя и ученика.*

Математика обеспечивает развитие мышления учеников. Особенно комбинаторные задачи развивает интуитивные, пространственные, конструктивные, символические мышления учащихся, также развивает математические способности учеников, как молодые людей развивает интерес обучению, эффективно применять комбинаторные задачи на практике, в решение жизненных проблем, готовит преодолевать в трудных жизненных ситуациях и подготовить молодых людей преодолеть различные проблемы, сталкиваемые в их дальнейшей жизни, принятие большинство хороших решений открывает большие возможности, воспитывает учеников в духе исследовательской и творческой деятельности, достичь своих целей, психологическую активность и формирует интеллектуальные способности.

Анализ психологической, педагогической и методической литературы о методике преподавания раздела комбинаторики [1] дают теоретические основы в преподавании математики, в том числе раздела комбинаторики. В этих литературах указываются проблемы в решении комбинаторных задач; творческий подход, решаются и находятся методология в соответствии с из опыта известных учителей. Приводятся примеры и рекомендация по методике преподавания элементов комбинаторики.

Используя эти рекомендации мы разрабатываем свои методики и разработки для уроков математики и развития учеников. К сожалению, большинство учителей не развивают мышление детей, готовят их к стереотипам, учеников заставляют принудительно, не давая им шанс

самовыражению своих мыслей, решений. Учитель решает задачу, притом решение даются только одним методом, ученики повторяют, и они не видят сколько различных решений или возможности есть в самом деле, но по нашему мнению эти методы эффективны. Психологи утверждают, что интеллектуальная активность это не означает использовать готовые решения или использовать шаблоны. Такой образовательный процесс не дает возможность развитию ребенка, и поэтому они не эффективны.

Анализ исследований по проблемам методики преподавания комбинаторики рекомендуют нам следующее аспекты работы:

- разработать методов комбинаторики;
- для решение задач не дать готовые схемы одаренным ученикам, не представить готовые решения, а дать возможность ученику применять для решения задач эффективное творческое мышление, формирование которого обеспечивает активность учеников при решении задач, организовать индивидуальную работу, на основе которого получит различные способы решения задач, отличающиеся друг от друга, находить нестандартные решения задачи.

Анализ методической, психологической и педагогической литературы также указывает, что учителя и психологи должны изучать учеников не только понять вещи, но и найти связи между задачами и формулами, создавать или брать подходящие формулы, также надо добавить идеи, и все это означает что, развитие не только высокого интеллектуального потенциала, также развития детей работать над задачей, использовать различные приёмы решений, все это постоянно повышает уровень и разум детей.

Учить учеников к творчеству, которое требует решения задач комбинаторики, найти нужный подход в задачах увеличивает успех учителя и ученика [2]. Предоставлять ученику настоящую творческую среду – это не простая методическая проблема. Но эта среда развивает активность и креативность учеников.

Разработка заданий и успешное решения этих заданий - сильное эмоциональное событие, в том числе «радость» от полученного правильного решения задачи – эти чувства являются причиной дальнейшего развития, вдохновение учащихся. Опять и опять повторные успехи и от них положительные эмоции - новый мотив формы - "психическое счастье" учителя и учеников [3].

Математическое образование требует от учителя разработки, эффективно увеличивать различные факторы развития образовательного процесса, их дидактической возможности для улучшения эффективности урока математики.

Такие научные методы преподавания математики как наблюдение, сравнение, обобщение являются хорошими инструментами при решении задач комбинаторики. К тому же для решения задач нужно организовать проблемную ситуацию вставляя следующее на вопросы

- " Все параметры учтены?";
- " Выбранный метод решения задач правильный? ";
- " Выбранный метод решения задач оптимальный?".

Прежде всего, при изучении комбинаторики нужно знать основные правила. Кроме этого, ученики должны знать типы комбинаторных соединений.

На школьной кухне на первое есть борщ, суп, рисовый суп, а на второе есть мясной фарш макароны, рыба и картофель, курица и рис , на третий чай или компот. Из выше названных блюд со сколькими способами можно выбрать обед?

**Решение.** Способ 1. Все возможные выборы в виде таблицы:

чай(ч), компот (к)	мясной фарш макароны ( м.ф.м. )	Рыба и картофель ( р.к. )	Рис с курицей (р.к)
борщ (б)	б;м.ф.м;ч / б;м.ф.м;к	б; р.к;ч / б; р.к;к	б; р.к;ч. / б; р.к;к
суп (с)	с; м.ф.м;ч / с; м.ф.м;к	с; р.к ;ч / с; р.к;к	с; р.к;ч / с; р.к;к
Рисовый суп (р.с.)	р.с.;м.ф.м;ч /р.с.; м.ф.м;к.	р.с.; р.к;ч / р.с.; р.к;к	р.с;р.к.;ч / р.с;р.к.;к

Способ 2. Мы используем граф решения

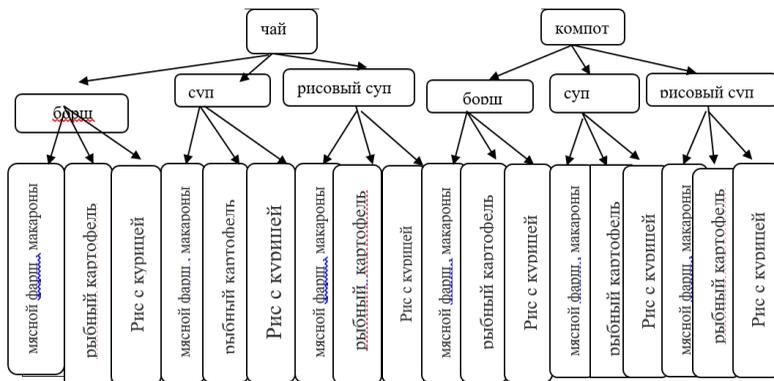


Рисунок 1.

Способ 3. Из правила умножения комбинаторики имеем:  $3 \times 3 \times 2 = 18$ .

Задача 2. Мать подарила в день рождения Гульнаре 4 куклы, 2 мяча, 5 воздушных шаров. Эти подарки вложили в большую коробку. Со сколькими способами Гульнара может выбрать 1 куклу, 1 мяч, 1 шарик?

**Решение.** Способ 1. Обозначим мячик через K, куклу через Q, шар через S. Составляем всевозможные выборы :

(K1,Q1,S1);	(K1,Q1,S2);	(K1,Q1,S3);	(K1,Q1,S4),	(K1,Q1,S5);
(K1,Q2,S1);	(K1,Q2,S2);	(K1,Q2,S3);	(K1,Q2,S4),	(K1,Q2,S5);
(K1,Q3,S1);	(K1,Q3,S2);	(K1,Q3,S3);	(K1,Q3,S4),	(K1,Q3,S5);
(K1,Q4,S1);	(K1,Q4,S2);	(K1,Q4,S3);	(K1,Q4,S4),	(K1,Q4,S5);
(K2,Q1,S1);	(K2,Q1,S2);	(K2,Q1,S3);	(K2,Q1,S4),	(K2,Q1,S5);
(K2,Q2,S1);	(K2,Q2,S2);	(K2,Q2,S3);	(K2,Q2,S4),	(K2,Q2,S5);
(K2,Q3,S1);	(K2,Q3,S2);	(K2,Q3,S3);	(K2,Q3,S4),	(K2,Q3,S5);
(K2,Q4,S1);	(K2,Q4,S2);	(K2,Q4,S3);	(K2,Q4,S4),	(K2,Q4,S5);

Способ 2. Из правила умножения комбинаторики имеем:  $2 \times 4 \times 5 = 40$ .

Ответ. 40 вариантов.

Задача 3. Сколько двухзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9.

Способ 1. Все возможные варианты указываем в виде таблицы:

	0	2	6
2	20	22	26
3	30	32	36
6	60	62	66
7	70	72	76
9	90	92	96

Способ 2. В разряд десять можно вставить цифры 2;3;6;7; 9. В разряд единицы так как это число четное можно вставить цифры 0; 2; 6. И так, в разряд десятки можно вставить 5 возможностей и а в разряд единицы есть 3 возможности. Согласно правилу умножения комбинаторики имеем:  $5 \times 3=15$ .

Учителю нужно обратить внимание на того чтобы ученики сосредоточили внимание на смысл задачи, именно какая формула или какое правило комбинаторики нужно применять в каждом случае [4].

### **Библиографический список**

1. Юсупова А.К. Методика преподавания математики (частная методика). Фергана 2024 г. стр.378.
2. Роль решения задач в изучения теории вероятностей. Журнал «Все науки», 2022 № 6 ст 326-343
3. The role of student attentiveness in the classroom of probability theory and mathematical statistics in higher education. Asia Journal of Research in Social Sciences and Humanities. ISSN: 2249-7315 vol.11 Issue 11, November 2021 self 2021-9,037.
4. Typical mistakes of students in analytical geometry and diagnostics of the causes of errors. Current research journal of pedagogics (ISSN-2767-3278) 2022 01.

## НАШИ АВТОРЫ

[Абрамов Дмитрий Георгиевич](#), АО «ФНПЦ «Алтай», директор по качеству, e-mail: [post@frpc.secna.ru](mailto:post@frpc.secna.ru).

[Алгазин Геннадий Иванович](#), доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, профессор кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: [algaz46@yandex.ru](mailto:algaz46@yandex.ru).

[Алгазина Дарья Геннадьевна](#), кандидат технических наук, Алтайский государственный университет, МИЭМИС (ЭФ), доцент кафедры цифровых технологий и бизнес-аналитики, e-mail: [darya.algazina@mail.ru](mailto:darya.algazina@mail.ru).

[Алгазина Юлия Геннадьевна](#), кандидат экономических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, доцент кафедры информационных систем в экономике, e-mail: [algazina@inbox.ru](mailto:algazina@inbox.ru).

[Ахмерова Ирина Геннадьевна](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: [iakhmerova@mail.ru](mailto:iakhmerova@mail.ru).

[Баянова Надежда Владимировна](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: [bayanova@math.asu.ru](mailto:bayanova@math.asu.ru).

[Беспалов Алексей Сергеевич](#), Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, студент, e-mail: [bespalov\\_022@mail.ru](mailto:bespalov_022@mail.ru).

[Борисов Павел Валерьевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: [Saintersgame@mail.ru](mailto:Saintersgame@mail.ru).

[Будкин Александр Иванович](#), доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, e-mail: [budkin@math.asu.ru](mailto:budkin@math.asu.ru).

[Вараксин Сергей Владимирович](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры

и математической логики, e-mail: varaksin@math.asu.ru.

Вицц Рудольф Александрович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра дифференциальных уравнений, преподаватель, e-mail: virtsrudolf@gmail.com

Волкова Анастасия Константиновна, Алтайский государственный университет, Институт географии, кафедра экономической географии и картографии, преподаватель, e-mail: nastasiakonstantinovna@gmail.com.

Гамова Алла Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный университет, факультет компьютерных наук и информационных технологий, доцент, gamovaan@yandex.ru.

Головичева Ирина Эмильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра высшей математики, доцент, e-mail: kfmn\_ii@mail.ru.

Голубятников Владимир Петрович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, главный научный сотрудник, e-mail: golubyatn@yandex.ru.

Гончарова Дарья Витальевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: darya.goncharova25@mail.ru

Гришанов Ярослав Иванович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: melstmottle@gmail.ru.

Губер Юлия Владимировна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, лаборант-исследователь, e-mail: yulia.guber@inbox.ru.

Донцова Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород), Институт информационных технологий, математики и механики, доцент, e-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru.

Ерофеев Тимур Константинович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: erofeevt04@gmail.com.

Журавлев Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail:

[evzhuravlev@mail.ru](mailto:evzhuravlev@mail.ru).

*Журавлева Вера Владимировна*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: [zhuravlevavv@mail.ru](mailto:zhuravlevavv@mail.ru)

*Изотов Андрей Александрович*, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [andrei07062002@mail.ru](mailto:andrei07062002@mail.ru)

*Касмынин Владислав Сергеевич*, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [kasmynin02@mail.ru](mailto:kasmynin02@mail.ru).

*Кислицин Алексей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный педагогический университет, кафедра математики и методики обучения математике, доцент, e-mail: [kislitsin@altspu.ru](mailto:kislitsin@altspu.ru).

*Клепиков Павел Николаевич*, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: [klepikov.math@gmail.com](mailto:klepikov.math@gmail.com).

*Кодолов Артем Владимирович*, АО «ФНПЦ «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматизации, директор по информационным ресурсам, e-mail: [post@frpc.secna.ru](mailto:post@frpc.secna.ru)

*Корней Дмитрий Владимирович*, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [korney1404@gmail.com](mailto:korney1404@gmail.com).

*Колупаев Александр Андреевич*, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [alexanderkolupaev84@gmail.com](mailto:alexanderkolupaev84@gmail.com).

*Кобелева Надежда Федоровна*, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ), Институт базовых дисциплин, Кафедра высшей математики, старший преподаватель, e-mail: [kobeleva@sibguti.ru](mailto:kobeleva@sibguti.ru).

*Кравченко Галина Владимировна*, кандидат педагогических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: [kravchenko@math.asu.ru](mailto:kravchenko@math.asu.ru).

*Крупочкин Евгений Петрович*, Алтайский государственный университет, Институт географии, заведующий кафедрой экономической географии и картографии, e-mail: [krupochkin@mail.ru](mailto:krupochkin@mail.ru).

Кузьмин Александр Максимович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: alexander-mercet@mail.ru.

Латышев Артём Романович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: artemlinkin@mail.ru

Леонова Эвелина Ивановна, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, лаборатория краевых задач механики сплошных сред, м.н.с., Новосибирский государственный университет, кафедра теоретической механики, аспирант, e-mail: leonova.e.i@hydro.nsc.ru.

Линевич Любовь Андреевна, кандидат педагогических наук, учитель математики высшей категории, МБОУ «Гимназия №123», e-mail: linevich la@mail.ru.

Лисимов Артем Андреевич, Югорский государственный университет, Инженерная школа цифровых технологий, старший преподаватель, e-mail: art.lisimov@yandex.ru

Лодейщикова Виктория Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, факультет информационных технологий, кафедра высшей математики, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, кафедра алгебры и математической логики, доцент, e-mail: lodeischikova@gmail.com.

Лукьянов Михаил Сергеевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: michael.lukianov.03@mail.ru.

Лысенко Никита Витальевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: nikita\_lysenko\_04@mail.ru.

Маничева Анастасия Станиславовна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: manichevaas@mc.asu.ru.

Найденова Кристина Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: kristina-akulova00@mail.ru.

Нестеров Савва Александрович, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: nsavva@inbox.ru.

[Новохатько Наталья Вадимовна](#), Алтайский государственный педагогический университет, студент, e-mail: [novohatko.natasha@mail.ru](mailto:novohatko.natasha@mail.ru).

[Оглезнев Дмитрий Иванович](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: [ogleznev\\_96@mail.ru](mailto:ogleznev_96@mail.ru)

[Оскорбин Дмитрий Николаевич](#), кандидат физико–математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: [oskorbin@yandex.ru](mailto:oskorbin@yandex.ru).

[Папин Александр Алексеевич](#), доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: [rapin@math.asu.ru](mailto:rapin@math.asu.ru).

[Пекарская Татьяна Андреевна](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: [pekarskayat@yandex.ru](mailto:pekarskayat@yandex.ru).

[Петров Евгений Петрович](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: [pep@mail.asu.ru](mailto:pep@mail.asu.ru).

[Плотникова Елена Александровна](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра математического анализа, доцент, e-mail: [pselena@gmail.com](mailto:pselena@gmail.com).

[Половикова Ольга Николаевна](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры информатики, e-mail: [ponOlga@gmail.com](mailto:ponOlga@gmail.com).

[Полосин Георгий Витальевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, ассистент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: [georgiy.polosin2019@gmail.com](mailto:georgiy.polosin2019@gmail.com).

[Пономарев Игорь Викторович](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа, e-mail: [igorpon@mail.ru](mailto:igorpon@mail.ru).

[Понькина Елена Владимировна](#), кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, заведующая кафедрой теоретической кибернетики и прикладной математики, Барнаул, e-mail: [ponkina@math.asu.ru](mailto:ponkina@math.asu.ru).

[Попов Федор Алексеевич](#), доктор технических наук, профессор, АО «ФНИЦ «Алтай», Отделение вычислительной техники и автоматики главный научный сотрудник, e-mail: [pfa2004@mail.ru](mailto:pfa2004@mail.ru).

[Почёмин Никита Михайлович](#), Алтайский государственный университет, Институт географии, кафедра природопользования и геоэкологии, преподаватель, e-mail: [pochyomin@list.ru](mailto:pochyomin@list.ru).

[Правдивцев Артем Сергеевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: [as.pravdivtsev@yandex.ru](mailto:as.pravdivtsev@yandex.ru).

[Рахматшоев Фариз Рахматшоевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [r.fariz00@mail.ru](mailto:r.fariz00@mail.ru).

[Родионов Евгений Дмитриевич](#), доктор физико-математических наук, профессор, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, профессор, e-mail: [edr2002@mail.ru](mailto:edr2002@mail.ru)

[Рупасов Кирилл Степанович](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент.

[Рябов Иван Юрьевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, старший преподаватель кафедры информатики, e-mail: [wanjaiwan@mail.ru](mailto:wanjaiwan@mail.ru).

[Саженов Александр Николаевич](#), кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, ИМИТ, кафедра математического анализа, заведующий, e-mail: [sazhenkov\\_an@mail.ru](mailto:sazhenkov_an@mail.ru).

[Серых Кирилл Сергеевич](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: [s.kirill123@mail.ru@mail.ru](mailto:s.kirill123@mail.ru@mail.ru).

[Сибин Антон Николаевич](#), кандидат физико-математических наук, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, НОЦГПННГУ, научный сотрудник; Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, ведущий научный сотрудник; Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, лаборатория цифровых и интеллектуальных систем добычи углеводородов, научный сотрудник, e-mail: [sibin\\_anton@mail.ru](mailto:sibin_anton@mail.ru).

[Сибирякова Татьяна Андреевна](#), Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: [sibiriakova.tatiana@mail.ru](mailto:sibiriakova.tatiana@mail.ru).

Смолякова Лариса Ленгардовна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, старший преподаватель кафедры информатики, e-mail: [knaus.larisa@gmail.com](mailto:knaus.larisa@gmail.com).

Сонов Никита Евгеньевич, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, студент, e-mail: [nsopov79@gmail.com](mailto:nsopov79@gmail.com).

Суханов Сергей Иванович, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: [sukhanov-s@yandex.ru](mailto:sukhanov-s@yandex.ru).

Токарева Маргарита Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: [tma25@mail.ru](mailto:tma25@mail.ru).

Уколова Анастасия Анатольевна, Алтайский государственный университет, Институт гуманитарных наук, студент, e-mail: [martyanova326@gmail.com](mailto:martyanova326@gmail.com).

Устюжанова Алла Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: [ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru](mailto:ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru).

Филина Ольга Александровна, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, аспирант, e-mail: [olya-filina@mail.ru](mailto:olya-filina@mail.ru).

Хворова Любовь Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, e-mail: [KhvorovaLA@gmail.com](mailto:KhvorovaLA@gmail.com).

Хромова Олеся Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: [khromova.olesya@gmail.com](mailto:khromova.olesya@gmail.com).

Хуторный Сергей Дмитриевич, Саратовский государственный университет, факультет компьютерных наук и информационных технологий, студент, e-mail : [seergei.hutorniy123@gmail.com](mailto:seergei.hutorniy123@gmail.com).

Шахова Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Алтайский государственный университет, институт математики и информационных технологий,

доцент кафедры алгебры и математической логики, e-mail: sashakhova@gmail.com.

Шишмарев Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, доцент, e-mail: shishmarev.k@mail.ru.

Эрниёзов Абдуманнон, Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, магистрант, e-mail: abdumannoneshniyozov@gmail.com.

Юсупова Анора Каримовна, доктор физико-математических наук, Ферганский государственный университет, Кафедра математики, профессор, e-mail: anoraxon.yusupova@gmail.com.

## Оглавление

### **СЕКЦИЯ 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ..... 4**

<i>Баянова Н.В.</i> , О конечно-порожденных $\ell$ - группах из многообразия $\mathcal{L}_p$ .....	4
<i>Будкин А.И.</i> , О пополнении нильпотентных групп .....	6
<i>Вараксин С.В.</i> , О полумногочисленно упорядоченных группах.....	8
<i>Вараксин С.В.</i> , О представлении свободных произведений в классе нормальнозначных $m$ -групп автоморфизмами линейно упорядоченных множеств 10	
<i>Журавлев Е. В., Филина О. А.</i> , О классификации конечных локальных колец .....	12
<i>Кислицин А.В.</i> , Об одном почти коммутативном $L$ -многообразии.....	15
<i>Лодейщикова В.В.</i> , О свойствах класса Леви, порожденного квазимногообразием 3-ступенно нильпотентных групп.....	17
<i>Лукьянов М.С.</i> , О независимой аксиоматизируемости квазимногообразий 2-нильпотентных групп.....	19
<i>Петров Е.П.</i> , О стандартном тождестве в $n$ -мерных нильпотентных алгебрах с двумя и тремя определяющими соотношениями и условием $\dim R_2/R_3 = \dim R_3/R_4 = 3$ .....	22
<i>Петров Е.П.</i> , О минимальном тождестве в 3-алгебрах. 27	
<i>Шахова С.А.</i> , О классах Леви, порожденных квазимногообразиями нильпотентных групп .....	30

## **СЕКЦИЯ 2. ГЕОМЕТРИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ..... 32**

- ГОЛУБЯТНИКОВ В.П.*, НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ЦИКЛОВ И СПРЯТАННЫЕ АТТРАКТОРЫ В ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТАХ ТРЁХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ..... 32
- ДОНЦОВА М.В.*, УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ..... 36
- КЛЕПИКОВ П.Н., РОДИОНОВ Е.Д., ХРОМОВА О.П.*, ОБ ОДНОРОДНЫХ СОЛИТОНАХ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ..... 38
- ОГЛЕЗНЕВ Д. И., ПОНОМАРЕВ И. В.*, МОДЕЛЬ ДИАГРАММЫ БЛЯШКЕ НА ПРИМЕРЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ..... 42
- ОСКОРБИН Д.Н., РОДИОНОВ Е.Д.*, О КОНФОРМНО-КИЛЛИНГОВЫХ ПОЛЯХ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАЭНА-УОЛЛАХА ..... 46
- ПЛОТНИКОВА Е.А., САЖЕНКОВ А.Н.*, ОБ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧАХ НА ПРАКТИКУМЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ..... 48

## **СЕКЦИЯ 3. МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ..... 53**

- АХМЕРОВА И.Г., УСТЮЖАНОВА А.В., ПРАВДИВЦЕВ А.С.*, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ..... 53
- ГОНЧАРОВА Д.В., ВИРЦ Р.А., ТОКАРЕВА М.А.*, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АУТОИММУННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ ..... 57
- ГУБЕР Ю. В., ПАПИН А. А., СИБИН А. Н.*, РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТАЮЩЕГО СНЕЖНО-ЛЕДОВОГО ПОКРОВА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ..... 62
- ИЗОТОВ А.А., ПАПИН А.А.*, АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ..... 66

<i>КАСМЫНИН В.С., ВИРЦ Р.А., ТОКАРЕВА М.А.,</i> ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИОТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЖИВЫХ ТКАНЯХ .....	70
<i>ЛАТЫШЕВ А.Р., ПАПИН А.А.,</i> Одномерная фильтрация жидкости в пороупругой среде с неоднородными граничными условиями.....	74
<i>ЛЕОНОВА Э.И.,</i> Усреднение термоупругого композита в случае переменных коэффициентов .....	79
<i>ПЕКАРСКАЯ Т.А., СИБИН А.Н.,</i> Фазовый переход вода-лед в тающем снеге .....	83
<i>СИБИРЯКОВА Т.А., ШИШМАРЕВ К.А., СЕРЫХ К.С., НАЙДЕНОВА К.Е.,</i> Влияние характеристик льда на распространение изгибно-гравитационных волн в ледовом покрове .....	87
<i>СИБИРЯКОВА Т.А., НАЙДЕНОВА К.Е., ШИШМАРЕВ К.А., БОРИСОВ П.В.,</i> Решение задачи о разрушении вязкоупругой полубесконечной ледовой пластины ...	92
<i>УСТЮЖАНОВА А.В., КРАВЧЕНКО Г.В.,</i> Напряженно-деформированное состояние упругой области с эллиптическим отверстием .....	96
<b>СЕКЦИЯ 4. ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА.....</b>	<b>99</b>
<i>АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г.,</i> Агрегативные игры олигополии при линейных функциях спроса и издержек агентов.....	99
<i>ВОЛКОВА А.К., ПОЧЁМИН Н.М.,</i> Кластеризация как метод исследования опорного каркаса хозяйства сельских территорий Алтайского края.....	102
<i>КОРНЕЙ Д.В., ЖУРАВЛЕВА В.В.,</i> Разработка веб-приложения для сбора и обработки медицинских данных по патологиям, связанным с дисплазией соединительной ткани.....	108

<i>Маничева А.С., Эшниезов А., Суханов С.И.,</i>	
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ РЕГИОНОВ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН.....	112
<i>Полосин Г.В., Понькина Е.В., Рябов И.Ю., Рупасов К.С.,</i>	
БАЗА ДАННЫХ ИНДИКАТОРОВ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ БОЛЬШОГО АЛТАЯ В ПОСТСОВЕТСКИЙ ПЕРИОД.....	115
<i>Уколова А.А., Алгазина Ю.Г., Беспалов А.С.,</i>	
ПРОТОТИПИРОВАНИЕ РЕКЛАМНО-ИНФОРМАЦИОННОГО САЙТА ДЛЯ МАГАЗИНА АРОМАТИЧЕСКИХ СВЕЧЕЙ VAREZHKA ....	121
<b>СЕКЦИЯ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ .....</b>	<b>125</b>
<i>Гамова А.Н., Хуторный С.Д.,</i>	
ПОМЕХОУСТОЙЧИВОЕ КОДИРОВАНИЕ.....	125
<i>Колупаев А.А., Сопов Н.Е.,</i>	
РАЗРАБОТКА ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО WEB-ИНТЕРФЕЙСА ДЛЯ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ С КЛИМАТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ И МЕТЕОСТАНЦИЙ .....	132
<i>Кузьмин А.М.,</i>	
ОБРАБОТКА ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ ТЕКСТА .....	134
<i>Половикова О.Н.,</i>	
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОКЛАССОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ МУТАЦИЙ ГЕНОМА .....	136
<i>Попов Ф.А., Кодолов А.В., Абрамов Д.Г.,</i>	
ИНТЕГРАЦИОННАЯ ОСНОВА ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЯ.....	141
<i>Сопов Н.Е., Колупаев А.А.,</i>	
РАЗРАБОТКА БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ С КЛИМАТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ И МЕТЕОСТАНЦИЙ.....	146
<i>Суханов С.И., Крупочкин Е.П., Маничева А.С.,</i>	
ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ .....	149

*Суханов С.И., Крупочкин Е.П., Маничева А.С.,* Создание ЦММ с использованием БПЛА для нужд сельского хозяйства..... 152

*Хворова Л.А., Рахматшоев Ф.Р.,* Методы и инструменты восстановления пропущенных значений в данных .. 156

## **СЕКЦИЯ 6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА . 161**

*Гришанов Я.И., Пономарев И. В.,* Построение модели коллаборативной фильтрации с использованием глубокой нейронной сети. .... 161

*Ерофеев Т.К., Лысенко Н.В.,* Разработка обучающих игр и программ под VR..... 166

*Маничева А.С., Журавлева В.В., Суханов С.И., Смолякова Л.Л.,* Классификация текстовых сообщений школьников с помощью методов NLP..... 169

*Нестеров С.А., Пономарёв И.В.,* Разработка веб-приложения для прогнозирования результатов спортивных матчей ..... 171

## **СЕКЦИЯ 7. ЦИФРОВЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ ..... 178**

*Головичева И.Э., Лодейщикова В.В.,* Использование цифровых технологий в процессе чтения лекций по математике в техническом вузе..... 178

*Кобелева Н.Ф.,* Некоторые аспекты применения электронных курсов на базе LMS MOODLE. .... 181

*Кравченко Г.В., Устюжанова А.В.,* Искусственный интеллект в образовании: общие аспекты ..... 185

*Линевич Л.А., Кравченко Г.В.,* Применение динамической программы GeoGebra при подготовке к ОГЭ по математике ..... 188

<i>Лисимов А.А.</i> , ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЯХ ....	193
<i>Новохатько Н. В.</i> , РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ОРТОЦЕНТРОМ И ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА.....	196
<i>Юсупова А.К.</i> , НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОМБИНАТОРИКИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ .....	200
<b>НАШИ АВТОРЫ .....</b>	<b>205</b>